2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.10 問 120–問 130 (7/29 配布分)

中レポート課題は問 120, 問 125, 問 127, 問 129, 問 130.

中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 8/4.

キーワード: 正則部分多様体, 正則値の逆像.

**設定 (問 120–121):** $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とする. また $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ を $C^\infty$ 級写像とし,

$$S_\varphi := \{(u, \varphi(u)) \mid u \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

とおく.

**問 120.** (中レポート)

$$\boldsymbol{u} : S_\varphi \to U, (x_1, \ldots, x_{n+k}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

が同相写像であることを示せ (講義 Proposition 11.1.1).

**問 121.** $\mathcal{A}_0 = \{(S_\varphi, U, \boldsymbol{u})\}$ とおく. $D$ を $S_\varphi \subset D$ となる $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合とし, $f \in C^\infty(D)$ とする. このとき $f|_{S_\varphi} \in C^\infty(S_\varphi; [\mathcal{A}_0])$ となることを示せ (講義 Proposition 11.1.2).

**問 122.**

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とし, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ を

- $O = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > 0\} \subset S^n$,
- $U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$

として定める (講義 Example 8.2.3 で定めたもの). このとき $(O, U, \boldsymbol{u})$ は正則 in $\mathbb{R}^{n+1}$ であることを示せ (講義 Example 11.2.4).

**設定 (問 123–130):** $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ を空でない部分集合とする (開集合とは限らない). また $S$ についての "条件 $(\star)_n$" は以下を意味するものとする:

**条件** $(\star)_n$: 任意の $p \in S$ について, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$ であって, 正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$ かつ $p \in O$ となるものが存在する.

**問 123.** $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$ が正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$ であるとする. $D$ を $S \subset D$ となる $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合とし, $f \in C^\infty(D)$ とする. このとき $f|_S \in C^\infty(S; (O, U, \boldsymbol{u}))$ となることを示せ (講義 Theorem 11.2.5).

**問 124.** $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$ が共に正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$ かつ $O \cap O'$ とする. このとき座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O')$ が $C^\infty$ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 11.2.6).

**問 125.** (中レポート) $S$ が条件 $(\star)_n$ を満たすとする. このとき

$$\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}} := \{(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, \boldsymbol{u}) \text{ は正則 in } \mathbb{R}^{n+k}\}$$

は $S$ の $C^\infty$-atlas であることを示せ (講義 Theorem 11.3.1).

**問 126.** グラフ多様体は正則部分多様体であることを示せ (講義 Example 11.3.3)

**問 127.** (中レポート) $S$ が条件 $(\star)_n$ を満たすとする. $D$ を $S \subset D$ となる $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合とし, $f \in C^\infty(D)$ とする. このとき $f|_S \in C^\infty(S; [\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}])$ となることを示せ (講義 Proposition 11.3.4).

**問 128.** $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 級写像とする. $q \in \mathbb{R}$ を $\psi$ の正則値とする. このとき $S_q := \psi^{-1}(\{q\}) \subset \mathbb{R}^2$ は条件 $(\star)_1$ を満たすことを示せ (講義 Theorem 11.4.3 の特殊版).

**問 129.** (中レポート) $C^\infty$ 級写像 $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x, y, z, w) \mapsto xw - yz$ の臨界点をすべて求めよ.

**問 130.** (中レポート) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$ とおく. $M$ の絵を描け. また $M$ が条件 $(\star)_2$ を満たすことを示せ.