2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.11 問 131–問 154 (7/31 配布分)

中レポート課題は問 131, 問 138, 問 144, 問 147, 問 152.

中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 8/6 .

キーワード: 射影空間, $C^\infty$ 級関数の延長

**設定 (問 131–140):** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また各 $i = 1, \dots, n+1$ について,

- $O_i := \{[x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_i \neq 0\}$,
- $U_i = \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u}_i : O_i \to U_i,\ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

とおく.

**問 131.** (中レポート) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の二項関係 $\sim$ を, $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ such that } y = \lambda x$$

として定める. この二項関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ.
(講義 Definition 12.1.1)

**問 132.** 商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ が開写像であることを示せ (講義 Proposition 12.1.4).

**問 133.** $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$ とおく. このとき $\pi(S^n) = P(\mathbb{R}^{n+1})$ となることを示せ. また $P(\mathbb{R}^{n+1})$ がコンパクトであることを示せ (Hint: $S^n$ がコンパクトであることは用いてよい).

**問 134.** $X$ を位相空間, $\sim$ を $X$ 上の同値関係とし, 商写像 $\pi : X \to X/\!\sim$ が開写像であるとする. このとき以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 12.1.5):
条件 (i) $\{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ は $X \times X$ の閉集合.
条件 (ii) $X/\sim$ はハウスドルフ.

**問 135.** $X$ を位相空間, $\sim$ を $X$ 上の同値関係とし, 商写像 $\pi : X \to X/\!\sim$ が開写像であるとする. また $X$ が第二可算公理を満たすとする. このとき $X/\!\sim$ も第二可算公理を満たすことを示せ (講義 Proposition 12.1.6).

**問 136.** $P(\mathbb{R}^{n+1})$ がコンパクトハウスドルフで, 第二可算公理を満たすことを示せ (講義 Proposition 12.1.3).

**問 137.** 写像

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) \to \{\mathbb{R}^{n+1}\text{の一次元部分空間}\},\ [x] \mapsto [x] \cup \{0\}$$

は well-defined で全単射であることを示せ (講義 Propositon 12.1.7).

**問 138.** (中レポート) $(O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$ となることを示したい (講義 Example 12.2.1). 何をチェックする必要があるか, チェック項目を述べよ.

**問 139.** $(O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$ となることを示せ (講義 Example 12.2.1).

**問 140.** $\mathcal{A}_0 := \{(O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}$ が $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の $C^\infty$-atlas であることを示せ (講義 Proposition 12.2.2).

**設定 (問 141–151):** 以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とし, $\Omega$ を $M$ の空でない開集合とする.

**問 141.**

$$\mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n) = \{(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n) \mid O \subset \Omega\} \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$$

を示せ (講義 Proposition 13.1.1).

**問 142.** $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ であって $O \cap \Omega \neq \emptyset$ となるものを考える．このとき $(O \cap \Omega, \boldsymbol{u}(O \cap \Omega), \boldsymbol{u}|_{O \cap \Omega}) \in \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ となることを示せ (講義 Lemma 13.1.4).

**問 143.** $\mathcal{A}_\Omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ は $\Omega$ の極大 $C^\infty$-atlas であることを示せ (講義 Theorem 13.1.2).

**問 144.** (中レポート) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ とする．$f|_\Omega \in C^\infty(\Omega; \mathcal{A}_\Omega)$ を示せ (講義 Proposition 13.1.6).

**問 145.** $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $M$ の開被覆 with $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ for any $\lambda \in \Lambda$ とする．このとき $f : M \to \mathbb{R}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 13.2.5):

条件 (i)　$f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

条件 (ii)　任意の $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda; \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$.

**問 146.** $M$ 上の定数関数が $(M; \mathcal{A})$ 上 $C^\infty$ 級であることを示せ (Proposition 13.2.6).

**問 147.** (中レポート) $p \in \Omega$ を固定する．$(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ とし, $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ が

$$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \boldsymbol{u}(p)\| \leq r_0\} \subset U$$

を満たすとする．このとき $\boldsymbol{u}^{-1}(\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \boldsymbol{u}(p)\| \leq r_0\}) \subset O \subset M$ がコンパクトであり, さらに $M$ の閉集合であることを示せ (講義 Proposition 13.2.7).

**問 148.** $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ とする．このとき $\mathcal{A}_O = [\{(O, U, \boldsymbol{u})\}]$ となることを示せ (講義 Proposition 13.2.8). ただし $\mathcal{A}_O := \mathcal{A} \cap \mathcal{LC}(O; \mathbb{R}^n)$.

**問 149.** $p \in \Omega$ を固定する．このとき任意の $h \in C^\infty(\Omega; \mathcal{A}_\Omega)$ について, $\tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ であって, $p$ のまわりで $h$ と一致するものが存在することを示せ (講義 Theorem 13.2.3).

**問 150.** $C^\infty(M; \mathcal{A})$ がベクトル空間として無限次元であることを示せ (講義 Corollary 13.2.9).

**問 151.** (重要度低) $C^\infty$ 級多様体上の $C^\infty$ 級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数について, 各点における stark の定義を述べよ．また講義 Theorem 13.2.4 を示せ.

**問 152.** (中レポート) $(M, \mathcal{A}) = (S^1, [\mathcal{A}^1_{\mathrm{reg}}])$ ($\mathbb{R}^2$ の正則部分多様体としての $S^1$) とし $\Omega = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ とする.

$$h : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x_1}{1 - x_2}$$

が well-defined かつ $h \in C^\infty(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ となることを示せ (講義 Example 13.2.1).

**問 153.** 上の問題と同じ設定で, $h$ は $(M, \mathcal{A})$ 上の $C^\infty$ 級関数に延長されないことを示せ (講義 Example 13.2.1).

**問 154.** 上の問題と同じ設定で, $\tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ であって, $p = (0, -1) \in \Omega$ のまわりで $h$ と一致するものを構成せよ (講義 Example 13.2.1 への Theorem 13.2.3 の応用).