

2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.2 問 15–問 27 (6/19 配布分)

中レポート課題は問 21, 問 25, 問 26. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 6/25.

キーワード: \mathbb{R}^n の開集合上の C^∞ 級関数

以下 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を \mathbb{R}^n の空でない開集合とする.

問 15. (解析の復習) U 上の C^1 級関数は全微分可能であることを示せ.

問 16. (解析の復習) U 上の全微分可能な関数は連続であることを示せ.

問 17. (解析の復習) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. U 上の C^k 級関数は U 上 C^{k-1} 級でもあることを示せ (講義: Proposition 3.1.3).

問 18. (解析の復習) $k \geq 1$ とする.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^k(U) \rightarrow C(U), f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

は well-defined であることを示せ. また各 $f, g \in C^k(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ (講義: Proposition 3.3.4).

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (3)$$

問 19. (解析の復習) n 変数多項式関数が \mathbb{R}^n 上 C^∞ 級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.1).

問 20. (やや難: 解析の復習) α を実数とする.

(1) 正の実数 t について, 実数 t^α の定義を述べ, その定義が well-defined であることを示せ (Hint: まず α が整数の場合の定義を述べ, 次に α が有理数の場合の定義を述べよ. 最後に α が一般の実数の場合には極限の形で t^α を定義せよ).

(2) 関数

$$\phi_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^\alpha$$

が $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.2).

問 21. (中レポート問題; 解析の復習) V を \mathbb{R} の空でない開集合とする. また $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^∞ 級関数, $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ を V 上の C^∞ 級関数とし, $U \cap g^{-1}(V) (\subset U)$ は空でないとする.

(1) $U \cap g^{-1}(V)$ 上で $h \circ g$ の偏導関数を, g の偏導関数と h の導関数を用いて表せ (連鎖律).

(2)

$$f = h \circ g : U \cap g^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

は $U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.3).

問 22. 変数 t についての実多項式 $P(t)$ について,

$$f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} P(\frac{1}{x})e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

とおく.

(1) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が \mathbb{R} 上連続であることを示せ.

(2) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が \mathbb{R} 上 C^∞ 級であることを示せ (講義: Example 3.2.5 の一般化).

(3) (重要度:低) 以下の関数が $x = 0$ においてテイラー展開不可能であることを示せ:

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

問 23. $p \in \mathbb{R}^n$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ with $0 < r_1 < r_2$ とする. このとき \mathbb{R}^n 上の C^∞ 級関数

$$b = b_{p, r_1, r_2}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

であって, 以下の二条件を満たすものが存在することを示せ (講義: Theorem 3.2.6):

条件 (i) $b(x) = 1$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \leq r_1$.

条件 (ii) $b(x) = 0$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \geq r_2$.

問 24. $p \in U$ とし, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ with $0 < r_1 < r_2$ and $\mathcal{U}_{r_2}(p) \subset U$ とする. ただし $\mathcal{U}_{r_2}(p)$ は p の r_2 開近傍 (in \mathbb{R}^n) とする. また $b_{p, r_1, r_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を上の問題の二条件を満たす \mathbb{R}^n 上の C^∞ 級関数として固定しておく. ここで各 $f \in C^\infty(U)$ について,

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) \cdot b_{p, r_1, r_2}(x) & (\text{if } x \in U), \\ 0 & (\text{if } x \notin U) \end{cases}$$

と定める. このとき任意の $f \in C^\infty(U)$ について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ:

(1) \tilde{f} は \mathbb{R}^n 上 C^∞ 級である.

(2) 任意の $i = 1, \dots, n$ について, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$.

問 25. (中レポート問題) $C^k(U)$ は $C(U)$ の部分 \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義: Theorem 3.3.2).

問 26. (中レポート問題) $C^\infty(U)$ は $C(U)$ の部分 \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義: Corollary 3.3.3).

問 27. (重要度:低) $n \geq 1$ とする. このとき $C^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元であることを示せ (講義: Proposition 3.3.6).