2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.3 問 28–問 35 (6/24 配布分)

中レポート課題は問 30, 問 33, 問 35. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 6/30.

キーワード: 方向微分, 接ベクトル

以下 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合, $p \in U$ とする.

問 28. (解析の復習) 以下をそれぞれ示せ (講義: Proposition 4.1.2; Hint: 演習問題 15)

(1) 各 $v \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(U)$ について,

$$v_p(f) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} \in \mathbb{R}$$

が well-defined である.

(2) $\{e_1, \dots, e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ とする. $v := \sum_{i=1} a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ とおく. このとき任意の $f \in C^\infty(U)$ について

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

となる.

問 29. 以下の設定において, それぞれ $v_p(f)$ を求めよ.

(1) $U = \mathbb{R}^2$, $p = (1, 0)$, $f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad v = (1, 0)$.

(2) $U = \mathbb{R}^2$, $p = (1, 0)$, $f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad v = (0, 1)$.

(3) $U = \mathbb{R}^2$, $p = (1, 0)$, $f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad v = (1, 1)$.

(4) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $p = (1, 0)$, $f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = (1, 0)$.

問 30. (中レポート問題) $v \in \mathbb{R}^n$ とする. 写像

$$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto v_p(f)$$

が線型であることを示せ (講義: Proposition 4.1.3).

問 31. (解析の復習) $v \in \mathbb{R}^n$, $f, g \in C^\infty(U)$ とする. このとき

$$v_p(f \cdot g) = v_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p(g)$$

となることを示せ (講義: Proposition 4.1.4).

問 32. (定義の確認) 各 $v \in \mathbb{R}^n$ において $v_p \in T_pU$ となることを示せ (講義: Proposition 4.2.3).

問 33. (中レポート問題) T_pU は $\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ の線型部分空間であることを示せ (講義: Proposition 4.3.1).

問 34. 写像

$$\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU,\ v \mapsto v_p$$

が線型であることを示せ (講義: Proposition 4.3.3).

問 35. (中レポート問題) 写像

$$\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU,\ v \mapsto v_p$$

が単射であることを示せ (講義: Proposition 4.3.4).