2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.4 問 36–問 51 (6/26 配布分)

中レポート課題は問 36, 問 38, 問 42. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 7/2.

キーワード: ベクトル場

以下 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする.

問 36. (中レポート問題)

$$\mathfrak{X}^\infty(U) := \{X \in \mathrm{End}(C^\infty(U)) \mid X \text{ は } U \text{ 上のベクトル場 }\}$$

が $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ の線型部分空間であることを示せ (講義: Proposition 5.1.4).

問 37. 各 $h \in C^\infty(U)$ について,

$$L_h : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot f$$

が線型写像であることを示せ (講義: Lemma 5.1.6).

問 38. (中レポート問題) 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $h \in C^\infty(U)$ について,

$$hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot (Xf)$$

は U 上のベクトル場であることを示せ (講義: Proposition 5.1.5).

問 39. $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は単位的 $C^\infty(U)$ 加群であること, すなわち以下が成り立つことを示せ (講義: Proposition 5.1.10):

(1) 写像

$$C^\infty(U) \times \mathfrak{X}^\infty(U) \to \mathfrak{X}^\infty(U),\ (h, X) \mapsto hX$$

は双線型.

(2) 各 $h_1, h_2 \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について,

$$h_1(h_2 X) = (h_1 \cdot h_2)X.$$

(3) 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について,

$$1_U X = X.$$

問 40. 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $p \in U$ について,

$$X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (Xf)(p)$$

が T_pU の元であることを示せ (講義: Proposition 5.2.2).

問 41. 写像

$$\mathfrak{X}^\infty(U) \to T_pU,\ X \mapsto X_p$$

は線型写像であることを示せ (講義: Proposition 5.2.3).

問 42. (中レポート問題) $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ についての以下の二条件が同値であることを示せ (講義: Proposition 5.2.4):

条件 (i): $X = Y$ as in $\mathfrak{X}^\infty(U)$.

条件 (ii): 任意の $p \in U$ について $X_p = Y_p$ as in T_pU.

問 43. $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする. 次のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ のイメージ図をそれぞれ描け (演習発表はどれか一つだけでも可とする):

(1)
$$X = \boldsymbol{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$
(2)
$$X = -\frac{1}{3}\boldsymbol{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{3}\boldsymbol{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$
(3)
$$X = \boldsymbol{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \boldsymbol{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

問 44. $n \geq 1$ のとき
$$\frac{\partial}{\partial x_1} \circ \frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathrm{End}(C^\infty(U))$$
は U 上のベクトル場でないことを示せ (cf. 講義: Proposition 5.3.1).

問 45. $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ 上の二項演算 $[\cdot,\cdot]$ を
$$[\eta_1, \eta_2] := \eta_1 \circ \eta_2 - \eta_2 \circ \eta_1 \quad \text{for each } \eta_1, \eta_2 \in \mathrm{End}(C^\infty(U))$$
と定める. このとき $(\mathrm{End}(C^\infty(U)), [\cdot,\cdot])$ は Lie 代数であることを示せ (講義: Proposition 5.3.3)(Hint: 問 6,14 を用いてよい).

問 46.「Lie 代数の部分 $\mathbb{R}$ 代数は Lie 代数」を定式化し, 証明せよ (講義: Example 5.3.4).

問 47. $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は $(\mathrm{End}(C^\infty(U)), [\cdot,\cdot])$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数となることを示せ. また $\mathfrak{X}^\infty(U)$ が Lie 代数であることを示せ (講義: Proposition 5.3.5).

問 48. $h_i, g_j \in C^\infty(U)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ とし, U 上のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を
$$X = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$
として定める. このとき
$$[X, Y] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \left(h_l \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_l} - g_l \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_l} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$
となることを示せ (講義: Example 5.3.6). ただし, 任意の $i, j = 1, \ldots, n,\ f \in C^\infty(U)$ について,
$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$$
となるという事実 (解析の講義で扱われた) は用いてよい.

問 49. (重要度:低) $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく. また
$$X = -\boldsymbol{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(U)$$
とおく. このとき
$$\{f \in C^\infty(U) \mid Xf = 0\} = \{k(\sqrt{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2}) \mid k \in C^\infty((0,\infty))\}$$
となることを示せ (講義: Example 5.4.1).

問 50. (重要度:低) 問 49 の設定において,

$$\{f \in C^\infty(U) \mid Xf = f\} = \{O_U\}$$

を示せ (講義: Example 5.4.2).

問 51. (線形代数の復習) $Q : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ を線型写像とし, $g \in C^\infty(U)$ とする.

$$\Omega := \{f \in C^\infty(U) \mid Qf = g\} \subset C^\infty(U)$$

とおく. このとき任意の $f_1, f_2 \in \Omega$ について, $f_1 - f_2 \in \operatorname{Ker} Q$ となることを示せ (cf. 講義: Example 5.4.4).