2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.6 問 63–問 72 (7/3 配布分)

中レポート課題は問 63, 問 64, 問 65, 問 70. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 7/9.

キーワード: C^∞ 級写像の合成, 合成写像の全微分, 曲線の速度ベクトル

設定: 以下 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1. U_2, U_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_3}$ の空でない開集合とする. また $\varphi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする.

問 63. (中レポート)

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad \text{as } C^\infty(U_3) \to C^\infty(U_1)$$

となることを示せ (講義 Lemma 7.1.2).

問 64. (中レポート)

$$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$$

は C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 7.1.1).

問 65. (中レポート) $p \in U_1$ を固定する. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

が成り立つことを示せ (講義 Theorem 7.1.3).

問 66. 次の等式と「連鎖律」の関連について述べよ:

$$(J(\psi \circ \varphi))_p = (J\psi)_{\varphi(p)} \cdot (J\varphi)_p$$

(講義 Corollary 7.1.4).

設定: 以下 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする. また (a, b) を空でない開区間とする.

問 67.

$$c : (a, b) \to U \subset \mathbb{R}^n,\ (a, b) \mapsto (c_1(t), \ldots, c_n(t))$$

を U 上の C^∞ 級曲線とする. このとき以下が成り立つことを示せ.

$$\dot{c}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{c(t_0)}$$

(講義 Proposition 7.2.4).

問 68. $p \in U$, $\eta \in T_pU$ とする. このとき U 上の C^∞ 級曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ (ただし $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$) であって, $c(0) = p$ かつ $\dot{c}(0) = \eta$ となるものが存在することを示せ (講義 Proposition 7.2.5)(Hint: うまい直線を考えれば OK).

設定: 以下 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とし, $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とする. また (a, b) を空でない開区間とする.

問 69. (定義の確認) $c : (a, b) \to U_1$ を U_1 上の C^∞ 級曲線とする. このとき $(\varphi \circ c) : (a, b) \to U_2$ は U_2 上の C^∞ 級曲線であることを示せ (講義 Proposition 7.3.1).

問 70. (中レポート) $a < 0 < b$ とし, $c : (a, b) \to U_1$ を U_1 上の C^∞ 級曲線であって, $c(0) = p$ なるものとする. このとき

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(0)) = (\varphi \dot{\circ} c)(0)$$

が成り立つことを示せ (講義 Proposition 7.3.2).

問 71. 写像 $\Xi : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ が以下の条件を満たすとき, $\Xi = (d\varphi)_p$ となることを示せ (講義 Theorem 7.3.3):

条件: 任意の $c \in \mathrm{Curve}(U_1, p)$ について, $\Xi(\dot{c}(0)) = (\varphi \dot{\circ} c)(0)$.

問 72. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を, C^∞ 級写像であって, $\varphi((0,0)) = (0,0,1)$ となるものとする. また

- $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 2t^3)$
- $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t)$

とおく. $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 $\varphi \circ c_1$, $\varphi \circ c_2$ がそれぞれ

- $\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t^2, 2t, t^2 + t + 1)$,
- $\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (0, 2t, t + 1)$.

となるとする. このとき φ の $(0,0)$ におけるヤコビ行列 $(J\varphi)_{(0,0)}$ を求め, さらに線型写像

$$(d\varphi)_{(0,0)} : T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 \to T_{(0,0,1)}\mathbb{R}^3$$

の階数を求めよ (講義 Example 7.3.4 の類題).