2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.7 問 73–問 85 (7/8 配布分)

中レポート課題は問 79, 問 82, 問 83, 問 84. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 7/14.

キーワード: 局所座標系

設定: 以下, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

問 73. (位相空間論の復習) A を X の部分集合とし, 包含写像を $\iota : A \hookrightarrow X$ とおく. このとき $\mathcal{O}_X(A)$ は “ι を連続とするような最弱な位相” であることを示せ (講義 Proposition 8.1.2).

問 74. (位相空間論の復習) $B \subset A \subset X$ とする. このとき

$$\mathcal{O}_X(B) = (\mathcal{O}_X(A))(B)$$

となることを示せ (講義 Proposition 8.1.3).

問 75. (位相空間論の復習) $U \in \mathcal{O}_X$ (i.e. U は X の開集合) とする. U の部分集合 V について, 以下の条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 8.1.4):

条件 (i): $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (i.e. V は U の開集合).

条件 (ii): $V \in \mathcal{O}_X$ (i.e. V は X の開集合).

問 76. (位相空間論の復習) $\phi : X \to Y$ を全単射連続写像とする. このとき以下の条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 8.1.5):

条件 (i): $\phi : X \to Y$ は同相写像 (i.e. 逆写像 $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続).

条件 (ii): $\phi : X \to Y$ は開写像 (i.e. 任意の $U \in \mathcal{O}_X$ について, $\phi(U) \in \mathcal{O}_Y$).

問 77. (位相空間論の復習) $A \subset X$, $B \subset Y$ とする. 相対位相 $\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ により A, B をそれぞれ位相空間とみなす. 次を示せ (講義 Proposition 8.1.6):

(1) $\phi : X \to Y$ を連続写像であって, $\phi(A) \subset B$ となるものとする. このとき ϕ は A から B への写像としても連続.

(2) $\phi : X \to Y$ を同相写像であって, $\phi(A) = B$ となるものとする. このとき ϕ は A から B への写像としても同相.

設定: 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

問 78. O_0 を O の空でない開集合とする. このとき $(O_0, \boldsymbol{O_0}, \boldsymbol{u}|_{O_0} : O_0 \to \boldsymbol{u}(O_0)) \in \mathcal{LC}(M : \mathbb{R}^n)$ となることを示せ (講義 Proposition 8.2.4).

問 79. (中レポート) $C^\infty(M; (O, U, \boldsymbol{u}))$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Proposition 8.3.3).

設定: 以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく. S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準位相の定める相対位相により位相空間とみなす. また

- $O = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > 0\} \subset S^n$,
- $U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$

とおく.

問 80. (位相空間論の復習) S^n は連結コンパクトハウスドルフ位相空間であることを示せ.

問 81. 上記 $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ が well-defined であることを示せ.

問 82. (中レポート) O が S^n の空でない開集合であることを示せ. また U が $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合であることを示せ (講義 Example 8.2.3).

問 83. (中レポート) 写像 $\boldsymbol{u} : O \to U$ の逆写像を構成せよ (講義 Example 8.2.3).

問 84. (中レポート) $\boldsymbol{u} : O \to U$ が同相写像であることを示せ (講義 Example 8.2.3).

問 85. D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であって, $S^n \subset D$ となるものとする. このとき任意の $h \in C^\infty(D)$ について, $h|_{S^n} \in C^\infty(S^n; (O, U, \boldsymbol{u}))$ となることを示せ (講義 Example 8.3.4 の一般化).