2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.8 問 86–問 97 (7/10 配布分)

中レポート課題は問 86, 問 90, 問 91, 問 92. 中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 7/16.

キーワード: 座標変換, C^∞-atlas

設定 (問 86 から問 93 まで): 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また $\mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ を M の n 次元局所座標系全体の集合とし, $(O,U,\boldsymbol{u}),(O',V,\boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

問 86. (中レポート) 座標変換を説明する図を描け.

問 87. $(O,U,\boldsymbol{u})$ から $(O,U,\boldsymbol{u})$ (自分自身) への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{u}(O) \to \boldsymbol{u}(O)$$

は恒等写像であることを示せ (講義 Proposition 9.1.3).

問 88. $(O,U,\boldsymbol{u})$ から $(O',V,\boldsymbol{v})$ への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O')$$

と $(O',V,\boldsymbol{v})$ から $(O,U,\boldsymbol{u})$ への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{v}(O \cap O') \to \boldsymbol{u}(O \cap O')$$

は互いに逆写像であることを示せ (講義 Proposition 9.1.4).

問 89. $(O_1,U_1,\boldsymbol{u}_1),(O_2,U_2,\boldsymbol{u}_2),(O_3,U_3,\boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ であって, $O_1 \cap O_2 \cap O_3 \neq \emptyset$ とする. このとき $\boldsymbol{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ から $\boldsymbol{u}_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ への写像として

$$\tau_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3}|_{\boldsymbol{u}_1(O_1\cap O_2\cap O_3)} = (\tau_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3}|_{\boldsymbol{u}_2(O_1\cap O_2\cap O_3)}) \circ (\tau_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2}|_{\boldsymbol{u}_1(O_1\cap O_2\cap O_3)})$$

となることを示せ (講義 Proposition 9.1.5).

問 90. (中レポート) $f \in C(M)$ とする. 以下をそれぞれ示せ (講義 Lemma 9.2.3):

(1) $f \circ (\boldsymbol{v}|_{O\cap O'})^{-1} = \tau^*_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}(f \circ (\boldsymbol{u}|_{O\cap O'})^{-1})$.

(2) $f \circ (\boldsymbol{u}|_{O\cap O'})^{-1} = \tau^*_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}(f \circ (\boldsymbol{v}|_{O\cap O'})^{-1})$.

問 91. (中レポート) 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O')$, $\tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{v}(O \cap O') \to \boldsymbol{u}(O \cap O')$ が共に C^∞ 級写像であるとする. このとき $f \in C(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 9.2.2):

条件 (i): $f \in C^\infty(M;(O\cap O', \boldsymbol{u}(O\cap O'), \boldsymbol{u}|_{O\cap O'}))$.

条件 (ii): $f \in C^\infty(M;(O\cap O', \boldsymbol{v}(O\cap O'), \boldsymbol{v}|_{O\cap O'}))$.

問 92. (中レポート) $\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする. このとき $C^\infty(M;\mathcal{A}_0)$ が $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Proposition 9.3.5).

問 93. $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とする. $(O,U,\boldsymbol{u}),(O',V,\boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R})$ を

- $O = O' = M$.
- $U = V = \mathbb{R}$.
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto x_1$.
- $\boldsymbol{v} : O \to V,\ x \mapsto x_2$.

このとき座標変換 $\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$, $\tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}$ をそれぞれ求めよ. また $\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$, $\tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}$ が C^∞ 級写像であるか否か論じよ (講義 Example 9.2.1).

設定 (問 94 から問 97 まで): 以下, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とおく．また各 $k = 1, \ldots, n+1$ について, $(O_k^{\pm}, U_k^{\pm}, \boldsymbol{u}_k^{\pm}) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ を以下のように定める:

- $O_k^+ = \{x \in S^n \mid x_k > 0\}, O_k^- = \{x \in S^n \mid x_k < 0\} \subset S^2$.
- $U_k^{\pm} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{u}_k^{\pm} : O_k^{\pm} \to U_k^{\pm},\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$.

また $\mathcal{A}_0 = \{(O_k^+, U_k^+, \boldsymbol{u}_k^+) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \cup \{(O_k^-, U_k^-, \boldsymbol{u}_k^-) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \subset \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ とおく.

問 94. 各 $k = 1, \ldots, n+1$ について, $\boldsymbol{u}_k^+$, $\boldsymbol{u}_k^-$ の逆写像をそれぞれ求めよ.

問 95. $1 \leq k_1 < k_2 \leq n+1$ とする．$\boldsymbol{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$, $\boldsymbol{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$ をそれぞれ求めよ．また座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{u}_{k_1}^+ \boldsymbol{u}_{k_2}^-} : \boldsymbol{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-) \to \boldsymbol{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$$

を求め, C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Example 9.1.2, Example 9.2.4 の類題).

問 96. $\mathcal{A}_0$ が S^n の C^∞-atlas であることを示せ (Example 9.3.4 の一部).

問 97. D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であって, $S^n \subset D$ となるものとする．このとき任意の $f \in C^\infty(D)$ について, $f|_{S^n} \in C^\infty(S^n; \mathcal{A}_0)$ であることを示せ (Example 9.3.4 の一般化).