2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.9 問 98–問 119 (7/15 配布分)

中レポート課題は問 107, 問 108, 問 109, 問 110, 問 117.

中レポート, 演習発表原稿の提出締め切りは 7/21.

キーワード: 極大 C^∞-atlas, C^∞ 級多様体

設定 (問 98 から問 100 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする.

問 98. U_0 を U の空でない開集合とし, $f \in C^\infty(U)$ とする. このとき $f|_{U_0} \in C^\infty(U_0)$ であることを示せ (講義 Proposition 10.1.1).

問 99. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U の開被覆 with $U_\lambda \neq \emptyset$ for any $\lambda \in \Lambda$ とする. このとき関数 $f : U \to \mathbb{R}$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 10.1.2):

条件 (i) $f \in C^\infty(U)$.

条件 (ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$.

問 100. 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Corollary 10.1.3):

条件 (i) $f \in C^\infty(U)$.

条件 (ii)' 任意の $p \in U$ について, ある p の開近傍 $U_p \subset U$ が存在して, $f|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$.

設定 (問 101 から問 105 まで): $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする.

問 101. U_0 を U_1 の空でない開集合とする. このとき任意の $f \in C(U_2)$ について,

$$(\varphi^*(f))|_{U_0} = (\varphi|_{U_0})^*(f)$$

が成り立つことを示せ (講義 Lemma 10.1.5).

問 102. U_0 を U_1 の空でない開集合とし, $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とする. このとき制限写像 $\varphi|_{U_0} : U_0 \to U_2$ も C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Proposition 10.1.4).

問 103. $\{U_{1,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U_1 の開被覆 with $U_{1,\lambda} \neq \emptyset$ for any $\lambda \in \Lambda$ とする. 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件は同値であることを示せ (講義 Proposition 10.1.6):

条件 (i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, 制限写像 $\varphi|_{U_{1,\lambda}} : U_{1,\lambda} \to U_2$ は C^∞ 級写像.

問 104. 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Corollary 10.1.7):

条件 (i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii)' 任意の $p \in U_1$ について, ある p の開近傍 $U_{1,p} \subset U_1$ が存在して, 制限写像 $\varphi|_{U_{1,p}} : U_{1,p} \to U_2$ は C^∞ 級写像.

問 105. U_2' を U_2 の空でない開集合とする. 写像 $\varphi : U_1 \to U_2'$ について以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 10.1.8):

条件 (A) $\varphi : U_1 \to U_2'$ は C^∞ 級写像.

条件 (B) φ は U_1 から U_2 への写像として C^∞ 級写像.

設定 (問 106 から問 112 まで): 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の C^∞-atlas とする.

問 106. $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$ となることを示せ (講義 Theorem 10.2.4 (1)).

問 107. (中レポート) $[\mathcal{A}_0]$ は M の極大 C^∞-atlas であることを示せ (講義 Theorem 10.2.4 (2)).

問 108. (中レポート) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ に限ることを示せ (講義 Theorem 10.2.4 (3)).

問 109. (中レポート) $\mathcal{B}_0$ を M の C^∞-atlas とする．このとき以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 10.2.5):

条件 (i)　$[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$.

条件 (ii)　任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{B}_0$ について, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$, $\tau_{\boldsymbol{vu}}$ は共に C^∞ 級写像.

問 110. (中レポート) $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; [\mathcal{A}_0])$ が成り立つことを示せ (講義 Theorem 10.3.1).

問 111. $\mathcal{A}$ を M の極大 C^∞-atlas とする．このとき関数 $f : M \to \mathbb{R}$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 10.3.2):

条件 (i)　$f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

条件 (ii)　任意の $p \in M$ について, ある $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, と p の開近傍 $O_p \subset O$ が存在して, $(f \circ \boldsymbol{u}^{-1})|_{\boldsymbol{u}(O_p)} \in C^\infty(\boldsymbol{u}(O_p))$.

問 112. (重要度:低) $\mathcal{A}$ を M の極大 C^∞-atlas とする．$\{f_k\}_{k=1,2,\ldots}$ を M 上一様収束する関数列であって, 任意の k について $f_k \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ となるものとする．このとき

$$f_0 : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \lim_{k\to\infty} f_k(p)$$

とおくと $f_0 \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ となることを示せ (解析で学んだ定理などを用いてよい).

設定 (問 113 から問 119 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく．また $(O_N, V_N, \boldsymbol{v}_N), (O_S, V_S, \boldsymbol{v}_S)$ を以下のように定める．

$$O_N := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \ldots, 0, -1)\} \subset S^n,\ O_S := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \ldots, 0, 1)\} \subset S^n,$$
$$V_N = V_S = \mathbb{R}^n,$$
$$\boldsymbol{v}_N : O_N \to V_N,\ x \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right),\ \boldsymbol{v}_S : O_S \to V_S,\ x \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right).$$

さらに $\mathcal{B}_0 := \{(O_N, V_N, \boldsymbol{v}_N), (O_S, V_S, \boldsymbol{v}_S)\}$ とおく．

問 113. $(O_N, V_N, \boldsymbol{v}_N), (O_S, V_S, \boldsymbol{v}_S) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ であることを示せ．また $\boldsymbol{v}_N$, $\boldsymbol{v}_S$ の逆写像も構成せよ (講義 Example 10.2.6 の準備).

問 114. $\mathcal{B}_0$ が S^n の C^∞-atlas であることを示せ (講義 Example 10.2.6 の準備).

問 115. $n = 2$ の場合を考える．$(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_3^+, U_3^+, \boldsymbol{u}_3^+)$ (演習問題 No.8 問 94-97 の設定で定めたもの), $(O', V, \boldsymbol{v}) = (O_S, V_S, \boldsymbol{v}_S)$ とおく．座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O')$ を求めよ (定義域, 値域も明示的に求めること).

問 116. 一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について考える．$\mathcal{A}_0$ を演習問題 No.8 問 94-97 の設定で定めた S^n の C^∞-atlas とする．このとき $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$ を示せ.

問 117. (中レポート)

$$f : S^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2$$

とおく．$f \in C^\infty(S^n; [\mathcal{A}_0])$ となることを示せ.

問 118.「第二可算公理を満たす位相空間の部分集合は相対位相について第二可算公理を満たす」を定式化し, 証明せよ.

問 119. $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ が n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ.