2020 年前期 幾何学 A 大レポート課題 問 1–16; 100 点満点 (7/22 配布)

大レポート原稿の提出締め切りは 7/28 (火).

キーワード: 多変数関数の微分論の代数化, 可微分多様体.

設定: 大レポート課題全体を通じて $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする. また M を空でない位相空間とし, $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の n 次元局所座標系全体のなす集合とする.

$\boxed{1}$ (10 点満点)

問 1. (5 点) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 関数

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

について, f の k 階導関数

$$f^{(k)} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

を求めよ (結論のみでよい).

問 2. (5 点) 関数

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

について, h が C^{∞} 級関数でないことの理由を簡潔に述べよ.

$\boxed{2}$ (45 点満点) 以下の定義達はそれぞれ誤りがある. それぞれ正しく修正したものを述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること).

問 3. (5 点) 各 $p \in U$ について

$$T_pU = \{\eta \in \mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in C^\infty(U)\}$$

を U の p における接空間という.

問 4. (5 点) $X \in T_pU$ が U 上のベクトル場であるとは, 任意の $f, g \in C^\infty(U)$ について,

$$X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$$

が成り立つこと.

問 5. (5 点) 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞ 級であるとは,

$$\varphi^*(C^\infty(U_1)) \subset C^\infty(U_2)$$

となること.

問 6. (5 点) C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ および点 $p \in U_1$ について,

$$(d\varphi)_p : C^\infty(U_1) \to C^\infty(U_2),\ \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$$

を φ の p における全微分という.

問 7. (5 点) $(O, U, \boldsymbol{u})$ が M の n 次元局所座標系であるとは, 以下を満たすこと:

- O が M の空でない開集合,
- U が $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合,
- $\boldsymbol{u} : O \to U$ が全単射連続写像 (ただし O, U の位相はそれぞれ相対位相として定める).

問 8. (5 点) $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ が $O \cap O \neq \emptyset$ を満たすとき,

$$\tau_{\boldsymbol{uv}} : O \cap O' \to O \cap O',\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}^{-1}(u))$$

を $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換という.

問 9. (5 点) $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ が M の C^∞-atlas であるとは, 以下を満たすこと:

- $\bigcup_{(O,U,\boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0} O = M$,
- 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$ について
$$\boldsymbol{u} : O \to U$$
が C^∞ 級写像.

問 10. (5 点) $\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする. $f \in C(M)$ が $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級であるとは, 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$ について, $f \circ \boldsymbol{u}^{-1} \in C^\infty(O)$ となること.

問 11. (5 点) $\mathcal{A} \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする. 組 $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞ 級多様体であるとは, M がハウスドルフかつ第二可算公理を満たすこと.

$\boxed{3}$ (20 点満点)

問 12. (10 点) $f_1, f_2 \in C^\infty(U_2)$ とし, 連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, 点 $p \in U_1$ を固定する. このとき等式

$$(\varphi^*(f_1 + f_2))(p) = (\varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2))(p)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること).

議論:

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\varphi^*(f_1 + f_2))(p) \\
&= (f_1 + f_2)(\varphi(p)) \quad (\because \varphi^* \text{の定義}) \\
&= f_1(\varphi(p)) + f_2(\varphi(p)) \quad (\because f_1, f_2 \text{の線型性}) \\
&= (\varphi^*(f_1))(p) + (\varphi^*(f_2))(p) \quad (\because \varphi^* \text{の定義}) \\
&= (\varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2))(p) \quad (\because \varphi^*(f_1), \varphi^*(f_2) \text{ の線型性}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

問 13. (10 点) $\eta_1, \eta_2 \in T_pU_1$ とし, C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ および点 $p \in U_1$ を固定する. このとき等式

$$(d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2) = (d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること).

議論: $f \in C^\infty(U_2)$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\ ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) = ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) \\
&= ((\eta_1 + \eta_2) \circ \varphi^*)(f) \quad (\because \text{全微分の定義}) \\
&= (\eta_1 + \eta_2) \circ (\varphi^*(f)) \\
&= (\eta_1 \circ (\varphi^*(f))) + (\eta_2 \circ (\varphi^*(f))) \quad (\because \text{汎関数の和の定義}) \\
&= (\eta_1 \circ \varphi^*)(f)) + (\eta_2 \circ \varphi^*)(f)) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1))(f) + ((d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because \text{全微分の定義}) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because \text{汎関数の和の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (25 点満点)

以下, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とおく. また $(O_1^+, U_1^+, \boldsymbol{u}_1^+)$, $(O_1^-, U_1^-, \boldsymbol{u}_1^-)$, $(O_2^+, U_2^+, \boldsymbol{u}_2^+)$, $(O_2^-, U_2^-, \boldsymbol{u}_2^-) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^2)$ を以下のように定める:

- $O_1^+ = \{x \in M \mid x_1 > 0\}$, $U_1^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{u}_1^+ : O_1^+ \to U_1^+,\ x \mapsto (x_2, x_3)$.
- $O_1^- = \{x \in M \mid x_1 < 0\}$, $U_1^- = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{u}_1^- : O_1^- \to U_1^-,\ x \mapsto (x_2, x_3)$.
- $O_2^+ = \{x \in M \mid x_2 > 0\}$, $U_2^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{u}_2^+ : O_2^+ \to U_2^+,\ x \mapsto (x_1, x_3)$.
- $O_2^- = \{x \in M \mid x_2 < 0\}$, $U_2^- = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{u}_2^- : O_2^- \to U_2^-,\ x \mapsto (x_1, x_3)$.

また

$$\mathcal{A}_0 = \{(O_1^+, U_1^+, \boldsymbol{u}_1^+), (O_1^-, U_1^-, \boldsymbol{u}_1^-), (O_2^+, U_2^+, \boldsymbol{u}_2^+), (O_2^-, U_2^-, \boldsymbol{u}_2^-)\} \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^2)$$

とおく.

問 14. (5 点) M の絵を描け.

問 15. (10 点) このとき

$$O_1^+ \cup O_1^- \cup O_2^+ \cup O_2^- = M$$

となることを示せ.

問 16. (10 点) $(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_1^-, U_1^-, \boldsymbol{u}_1^-)$, $(O', V, \boldsymbol{v}) = (O_2^+, U_2^+, \boldsymbol{u}_2^+)$ とおく. このとき座標変換 $\tau_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ を求めよ (定義域, 値域もそれぞれ明示的に求めること).