先端数学: 群作用と等質空間(レポート課題)

担当: 奥田隆幸

2024年度

レポート課題の形式, 成績評価, 注意点など: 以下 Section 2,3,4 で挙げるレポート課題からいくつか選択し, 解いたものをレポートにまとめてください. ただし「必答問題 (レポート課題 14)」については必ず解答をつけてください.

満点の場合の点数は課題ごとに設定してあります. 成績は100点満点としますが, それを超えてレポートにしても構いません (その場合は点数を足していって, 100点で打ち切ります). ただし必答問題 (レポート課題 14) について解答されていない, または全く解答になっていないものはレポートとして受理しません (多少の減点は OK とします) ので注意してください.

線型代数, 位相空間論, 群論の各種一般的な定理などはその場で証明せずに用いてもよいこととします. ただし, どのような一般的な定理を用いたかをなるべく正確に明記してください (よい書き方をされているレポートは各課題の満点を超えて加点します). また, あるレポート課題 (解いていなくてもよい) の結果をそれより後のレポート課題のための議論に用いることは構いませんが, その場合は「どの課題の結果を用いたか」を明記してください.

レポートにまとめられる証明には, 「結論を得るためには何を示せばよいか (示すべきこと)」を適宜書くようにしてください. **読み手が想像力を発揮しないと何をしたいのか分からない, また結論が明記されていない**ようなレポートは大幅に減点します.

レポートの作成に際しては, 掲示されている要請に従ってください (表紙やページ番号など注意). また提出ファイルは

- TeX 原稿をコンパイルして作った PDF ファイル

- PC やタブレット上で動作する手書きソフトによって作成されたレポート原稿を PDF ファイルにしたもの
- 紙に手書きしたものを写真に撮る or スキャンして PDF ファイルにしたもの

のいずれかでお願いします. 各形式のファイル (JPEG など) を PDF 化する方法は各自で調べてください. 上記以外の形式で事前の相談なく提出されたレポートは受理しません.

レポートの内容・形式などについての質問, 問い合わせ, 相談については奥田 (okudatak@hiroshima-u.ac.jp) までご連絡ください.

1 レポート課題の目的

このレポート課題は「等質空間と部分群の関係」の議論に慣れてもらうことを目的として出題しています. 群論と位相空間論, 線型代数の初歩的な知識のみで考えられる問題がほとんどです. 幾何学と群論の関係性の一端を感じ取ってもらえれば幸いです.

記号の注意: この課題全体を通じて, n は正整数を表すものとする.

2 群作用と等質集合

この節では群作用と等質集合についての用語をまとめておく.

以下, G を群, X を空でない集合とする. 集合 X の置換群 $\mathfrak{S}_X$ を

$$\mathfrak{S}_X := \{ f : X \to X \mid f \text{ は全単射写像} \}$$

とおく.

レポート課題 1 (10 点)**.** $\mathfrak{S}_X$ は写像の合成について群をなすことを示せ.

「群作用」を以下で定義する.

Definition 2.1. *G から $\mathfrak{S}_X$ への群準同型を G の X への作用と呼ぶ. また $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ を G の X への作用とするとき, 組 (X, ρ) を G 集合 (G-set) と呼ぶ.*

G の X への作用 $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ が与えられているとき, この課題では, 各 $g \in G$, $x \in X$ について

$$g \cdot_\rho x := (\rho(g))(x) \in X$$

と表すことにする.

「等質集合」を以下で定義する.

Definition 2.2. G の X への作用 ρ が推移的 (*transitive*) であるとは, 任意の $x, y \in X$ について, $g \cdot_\rho x = y$ となる $g \in G$ が存在することとする. G 集合 (X, ρ) が等質 (*homogeneous*) であるとは ρ が推移的であることとする.

レポート課題 2 (10 点)**.** n 次正方行列全体の集合を $M(n; \mathbb{R})$ と書くことにする. このとき n 次一般線型群

$$GL(n; \mathbb{R}) := \{g \in M(n; \mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\}$$

は行列の積について群をなすことを示せ. また n 次直交群

$$O(n) := \{g \in GL(n; \mathbb{R}) \mid {}^t g = g^{-1}\}$$

は $GL(n; \mathbb{R})$ の部分群であることを示せ.

レポート課題 3 (10 点)**.** $\mathbb{R}^n$ を n 次の縦ベクトルの集合とみなす. 行列とベクトルの積により n 次一般線型群 $GL(n; \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への作用が定まることを示せ (証明作成に当たっては「何を示す必要があるか」を必ず序盤に明記せよ). 以下, この作用を ψ とおく.

レポート課題 4 (10 点)**.**

$$S^{n-1} := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

とおく ($n-1$ 次元球面). 各 $g \in O(n)$, $x \in S^{n-1}$ について,

$$g \cdot_\sigma x := g \cdot_\psi x$$

とおくと, $O(n)$ の S^{n-1} への作用 σ が定まることを示せ (ただし記号 ψ の説明はレポート課題 3 を参照せよ). また作用 σ は推移的であることを示せ.

レポート課題 5 (20 点)**.**

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の } k \text{ 次元部分空間}\}$$

とおく (*k-Grassmannian of* $\mathbb{R}^n$). 各 $g \in O(n)$, $x \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ について,

$$g \cdot_{\tau_k} x := \{g \cdot_\psi v \mid v \in x\}$$

とおくと, $O(n)$ の $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ への作用 τ_k が定まることを示せ (ただし記号 ψ の説明はレポート課題 3 を参照せよ). また作用 τ_k は推移的であることを示せ.

「二つの G 集合が同型である」ということを以下で定義しておく:

Definition 2.3. (X_1, ρ), (X_2, τ) を共に G 集合とする. 写像 $\phi : X_1 \to X_2$ が G 同変 (*G-equivalent*) であるとは, 任意の $g \in G$, $x \in X_1$ について

$$\phi(g \cdot_\rho x) = g \cdot_\tau \phi(x)$$

が成り立つこととする. また全単射な G 同変写像 $\phi : X_1 \to X_2$ が存在するとき, (X_1, ρ) と (X_2, τ) は G 集合として同型であるという.

レポート課題 6 (10 点)**.** 「全単射な G 同変写像の逆写像は G 同変」を定式化し, 証明せよ.

レポート課題 7 (10 点)**.** 「等質性は同型で保たれる」を定式化し, 証明せよ.

レポート課題 8 (10 点)**.** レポート課題 5 で定めた等質 $O(n)$ 集合 $(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n), \tau_k)$ と $(\mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{R}^n), \tau_{n-k})$ について考える. 両者は $O(n)$ 集合として同型であることを示せ.

3 位相群の等質空間

この節では位相群, 等質空間の定義を紹介する.

まず G を群とする. G 上の位相 $\mathcal{O}_G$ を固定し, G を位相空間とみなす. また直積集合 $G \times G$ についても直積位相 $\langle \mathcal{O}_G \times \mathcal{O}_G \rangle$ により位相空間とみなす.

Definition 3.1. 上記の設定において以下の二条件が満たされているとき, $(G, \mathcal{O}_G)$ を位相群 (*topological group*) という.

条件 (i) 写像 $G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ が連続. ただし $g_1 g_2$ は g_1 と g_2 の G における積を表すものとする.

条件 (ii) 写像 $G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ が連続. ただし g^{-1} は g の G における逆元を表すものとする

レポート課題 9 (10 点)**.** G を位相群とする. 各 $g \in G$ について, 写像

$$L_g : G \to G,\ h \mapsto gh$$

および

$$R_g : G \to G,\ h \mapsto hg$$

は共に同相写像であることを示せ.

レポート課題 10 (10 点)**.** $M(n;\mathbb{R})$ を n^2 次元ユークリッド空間と自然に同一視し, 位相空間とみなす. また一般線型群 $GL(n;\mathbb{R})$ (レポート課題 2 参照) を $M(n;\mathbb{R})$ の部分集合として相対位相により位相空間とみなす. このとき $GL(n;\mathbb{R})$ は位相群となることを示せ.

レポート課題 11 (10 点)**.** 「位相群の部分群は相対位相について位相群をなす」を定式化し, 証明せよ. 特に位相群 $GL(n;\mathbb{R})$ の部分群として n 次直交群 $O(n)$ (レポート課題 2 参照) は自然に位相群とみなせる.

以下, $G = (G, \mathcal{O}_G)$ を位相群とし, (X, ρ) を等質 G 集合とする. 各元 $x \in X$ について, 写像 $\pi_x : G \to X$ を

$$\pi_x(g) := g \cdot_\rho x \text{ for each } g \in G$$

として定める.

レポート課題 12 (10 点)**.** $g \in G$, $x \in X$ を固定する. このとき $\pi_{g \cdot_\rho x} = \pi_x \circ R_g$ が成り立つことを示せ. ただし $R_g : G \to G$ はレポート課題 9 で定めた同相写像とする.

レポート課題 13 (10 点)**.** O を G の部分集合とする. このとき

$$\pi_x^{-1}(\pi_x(O)) = \bigcup_{k \in G \textit{ with } k \cdot_\rho x = x} R_k(O)$$

が成り立つことを示せ. また O が G の開集合であるとき, $\pi_x^{-1}(\pi_x(O))$ も G の開集合であることを示せ (*Hint:* レポート課題 9 を用いてよい).

等質 G 集合 X 上の位相についての次の定理が成り立つ:

Theorem 3.2. *G を位相群, (X,ρ) を等質 G 集合とする.*

(1) *X 上の位相 $\mathcal{O}_X$ について, 以下の二条件は同値である:*

- **条件 (i)** *X を $\mathcal{O}_X$ により位相空間とみなしたとき, 任意の $x \in X$ について, $\pi_x : G \to X$ は連続かつ開写像.*
- **条件 (ii)** *X を $\mathcal{O}_X$ により位相空間とみなしたとき, $\pi_x : G \to X$ が連続かつ開写像となる $x \in X$ が存在する.*

(2) *上記の同値な二条件を満たす X 上の位相 $\mathcal{O}_X$ が一意に存在する.*

以下の課題 (定理 3.2 の証明) をこのレポートの必答問題とする:

レポート課題 14 (30 点: 必答問題)**.** 定理 3.2 を示せ (*Hint: (2)* の証明にはレポート課題 *13* の結果を用いるとよい).

「等質空間」を以下で定める.

Definition 3.3. *X に定理 3.2 (2) により特徴付けられる位相が定められているとき, (X,ρ) を等質 G 空間 (homogeneous G-space) とよぶ.*

レポート課題 15 (20 点)**.** G を位相群, (X,ρ) を等質 G 空間とする. 各 $g \in G$ について $\rho(g) : X \to X$ は同相写像であることを示せ. また, 写像

$$G \times X \to X, \ (g,x) \mapsto g \cdot_\rho x$$

が連続であることを示せ. ただし $G \times X$ には G の位相と X の位相の直積位相が定まっているものとする.

レポート課題 16 (10 点)**.** レポート課題 4 で定めた等質 $O(n)$ 集合 S^{n-1} に $\mathbb{R}^n$ の自然な位相の相対位相を定め, 位相空間とみなす. この位相について S^{n-1} は等質 $O(n)$ 空間であることを示せ.

レポート課題 17 (20 点)**.** (X,ρ) を等質 G 空間とする. G が位相空間としてコンパクトであるとき, X も位相空間としてコンパクトであることを示せ. また G が位相空間としてハウスドルフであったとしても, X が位相空間としてハウスドルフであるとは限らない. このことを, 具体例を挙げて示せ.

レポート課題 18 (10 点)**.** n 次直交群 $O(n)$ は位相空間としてコンパクトであることを示せ．また, レポート課題 5 で定めた等質 $O(n)$ 集合 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ を等質 $O(n)$ 空間とみなす (つまり, 定理 3.2 で特徴付けられる位相を定めて位相空間とみなす)．等質 $O(n)$ 空間 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ は位相空間としてコンパクトであることを示せ.

レポート課題 19 (10 点)**.** (X_1, ρ), (X_2, τ) を共に等質 G 空間とする．$\phi : X_1 \to X_2$ が全単射 G 同変写像であるとき, ϕ は同相写像であることを示せ.

レポート課題 20 (30 点)**.** 等質 $O(2)$ 空間 (S^1, σ) と $(\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^2), \tau)$ について考える．両者は位相空間として同相であることを示せ．また $O(2)$ 集合としては同型ではないことを示せ.

4　等質空間と部分群

G を位相群とする．この節では「等質 G 空間」と「G の部分群」の関係について述べる.

まず H を G の部分群とする．H から等質 G 空間 G/H を以下のように構成しよう.

各元 $g \in G$ について, g の右 H-剰余類を

$$[g]_H := \{gh \mid h \in H\} \subset G$$

と書くことにする．また G の H による右剰余類全体のなす集合を

$$G/H := \{[g]_H \mid g \in G\}$$

と書き, 商写像を

$$\varpi : G \to G/H,\ g \mapsto [g]_H$$

と書くことにする．G の位相の定める ϖ による商位相について, G/H を位相空間とみなす.

レポート課題 21 (20 点)**.** G/H が位相空間としてハウスドルフであることと, H が G の閉集合であることが同値であることを示せ.

G の G/H への作用 η を,

$$g \cdot_\eta [g']_H := [gg']_H \quad \text{for each } g, g' \in G$$

として定める.

レポート課題 22 (20 点)**.** 上の記述により G の G/H への作用 η (G から $\mathfrak{S}_{G/H}$ への群準同型) が定まっていることを示せ. またその作用が推移的であることを示せ. さらに先に定めた G/H の位相により $(G/H, \eta)$ が等質 G 空間であることも示せ.

次に (X, ρ) を等質 G 空間とする. (X, ρ) の各点から G の部分群を定義する方法を以下に述べる.

Definition 4.1. 各点 $x \in X$ について,

$$G^x := \{g \in G \mid g \cdot_\rho x = x\}$$

を G の x におけるイソトロピー部分群 (*isotropy subgroup*) と呼ぶ.

レポート課題 23 (10 点)**.** 任意の $x \in X$ について, G^x が G の部分群であることを示せ. また $x, y \in X$ を固定し, $g \in G$ について $g \cdot_\rho x = y$ が成り立つとする. このとき, $G^x = g^{-1} G^y g$ を示せ.

レポート課題 24 (10 点)**.** 等質 $O(n)$ 空間 S^{n-1} について,

$$x := e_1 \in S^{n-1}$$

とおく. ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする. このとき, イソトロピー部分群 $O(n)^x$ を決定せよ.

レポート課題 25 (10 点)**.** 等質 $O(n)$ 空間 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ について,

$$x = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$$

とおく. ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし, $\langle v_1, \ldots, v_N \rangle$ はベクトル達 $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ の張る $\mathbb{R}^n$ の部分空間を表すこととする. このとき, イソトロピー部分群 $O(n)^x$ を決定せよ.

次の定理は「等質 G 空間」と「G の部分群」の対応を述べるものである:

Theorem 4.2. 「イソトロピー部分群をとる」という操作は,

$$\{\text{等質 } G \text{ 空間}\}/\text{同型}$$

から[1]

$$\{G\text{ の部分群}\}/\text{共役}$$

への一対一対応を誘導する.

[1]厳密には集合論的に問題のある書き方であるが, ここでは気にしないことにする.

この定理の証明を以下三つのレポート課題に分割する:

レポート課題 26 (10 点)**.** 等質 G 空間 (X, ρ) は右剰余類の空間 $(G/G^x, \eta)$ と G 集合として同型であることを示せ.

レポート課題 27 (10 点)**.** H を G の部分群とし, 等質 G 空間 $(G/H, \eta)$ について考える. G/H の $[e]_H$ におけるイソトロピー部分群は H であることを示せ.

レポート課題 28 (10 点)**.** 定理 4.2 を示せ.

最後に等質 G 空間のハウスドルフ性についても以下の命題を述べておく:

Theorem 4.3. 「イソトロピー部分群をとる」という操作は,

$$\{\text{ハウスドルフな等質 } G \text{ 空間}\}/\text{同型}$$

から[1]

$$\{G\,\text{の閉部分群}\}/\text{共役}$$

への一対一対応を誘導する. ただし閉部分群とは閉集合かつ部分群となるものを指す.

レポート課題 29 (10 点)**.** 位相群 G の部分群 H_1, H_2 が互いに共役であるとする. このとき H_1 が G 内で閉であることと H_2 が G 内で閉であることが同値であることを示せ.

レポート課題 30 (10 点)**.** 定理 4.3 を示せ.

レポート課題 31 (10 点)**.** 等質 $O(n)$ 空間 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ はハウスドルフであることを示せ.