先端数学2024

担当：奥田隆幸

題目：群作用と等質空間

◎ レポート課題については
アップロードされているファイルを参照。

レポート課題	講義動画
一般論＋具体例	具体例（グラスマン）

内容

§1: 研究分野紹介 + この講義について

§2: グラスマンへの直交群の作用

§3: グラスマンの位相

§4: グラスマンのイソトロピー

§1 研究分野紹介 + この講義の内容について

奥田の専門 : 対称空間論

対称空間とは… 位相空間の一種であり

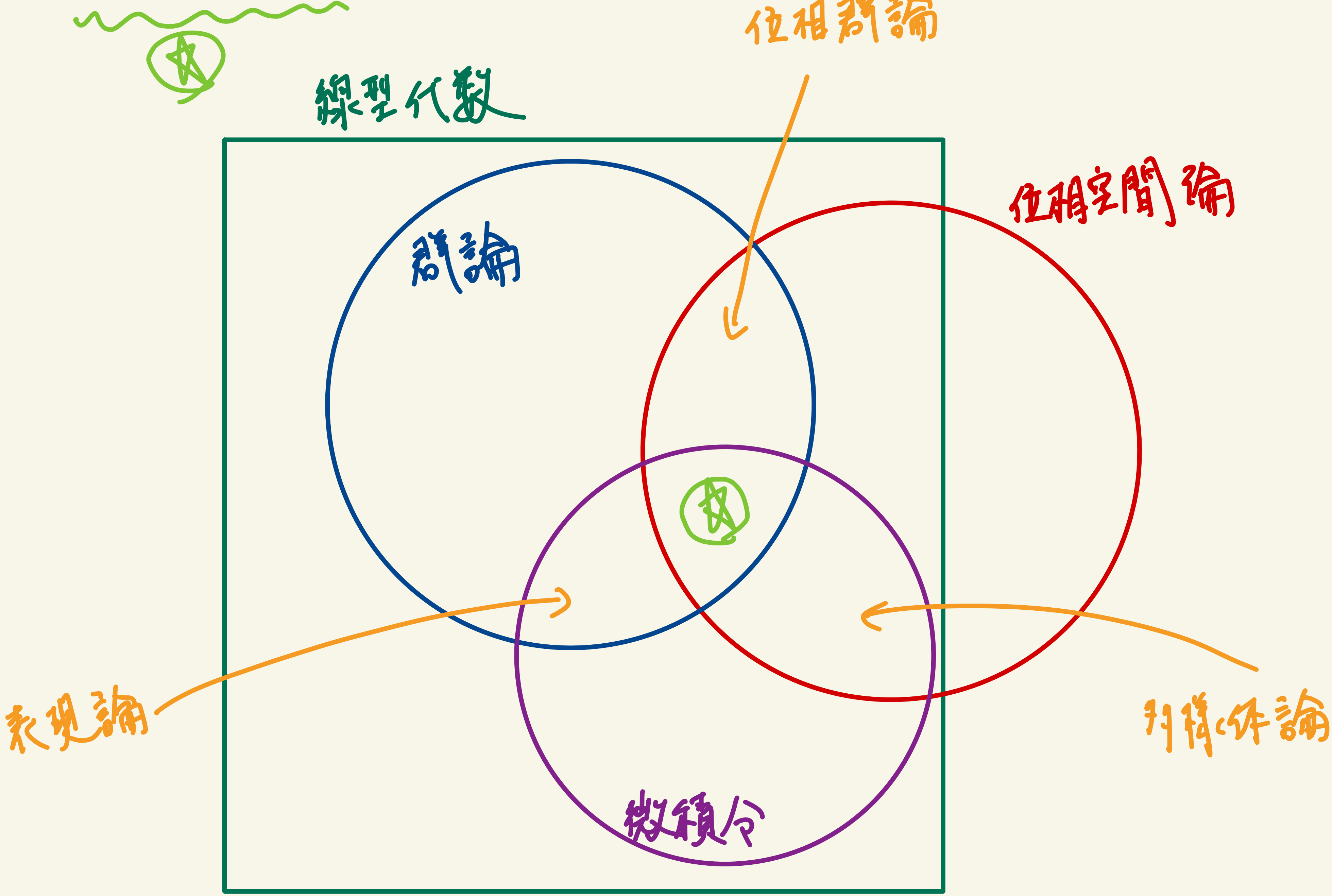
- 微分構造 (cf. 幾何学B)
- 点対称構造

を持つもの

具体例 : ユークリッド空間, 球面, 射影空間,

双曲空間, グラスマン など…

対称空間論の立ち位置



奥田の研究テーマ

対称空間の…

キーワード

① 構造論 (Lie群, Lie代数, ルート系)

② 一般化 (アソシエーションスキーム, ヤンドル)

③ 幾何 (商対称体, 部分対称体, 幾何構造)

④ 解析 (表現論, 調和解析, フーリエ解析)

⑤ 組合せ論 (符号理論, デザイン理論)

などなど

講義内容：グラスマン

対称空間の重要例

対称空間論の魅力（かつ難所）の一つ：

群の言葉で空間を理解する！

雰囲気を感じて欲しい

§2 グラスマンへの直交群の作用

内容

◎ "グラスマン" $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の定義

◎ 直交群 $O(n)$ の定義

◎ $O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ への作用

$n > k \geq 1$: 自然数とする.

Def

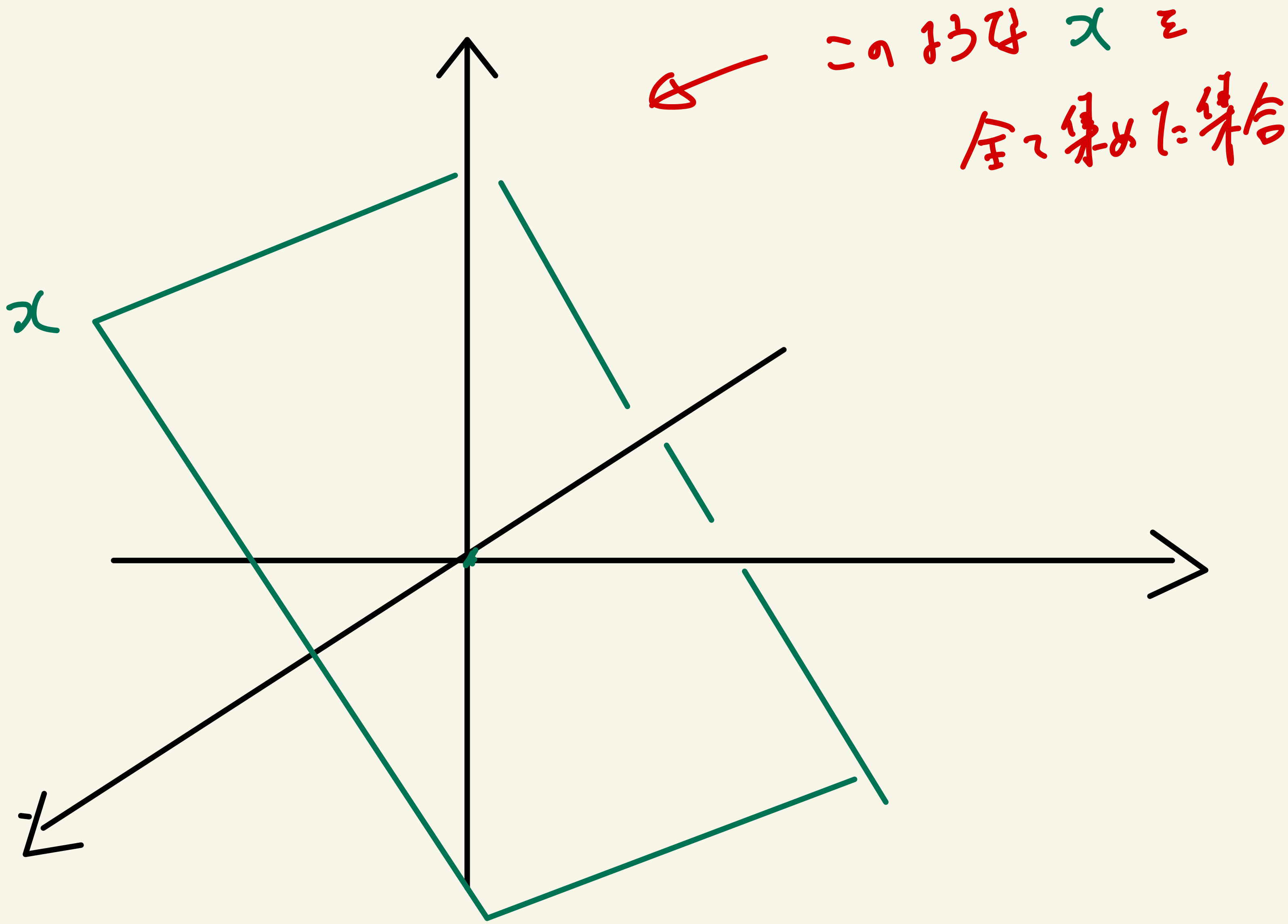
$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \{\, x \subset \mathbb{R}^n \mid x \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の } k \text{ 次元線型部分空間} \,\}$$

(k-グラスマン of $\mathbb{R}^n$)

とおく.

「$x \in \mathbb{R}^n$」ではないことに注意.

$n=3 \quad k=2$ のイメージ



ゴール： $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を"群の言葉"で理解したい

Def： $O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n \}$

(n次直交群)

(つまり直交行列全体の集合)

Fact：

$O(n)$ は行列の積について群をなす.

Def 各 $g \in O(n)$, $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

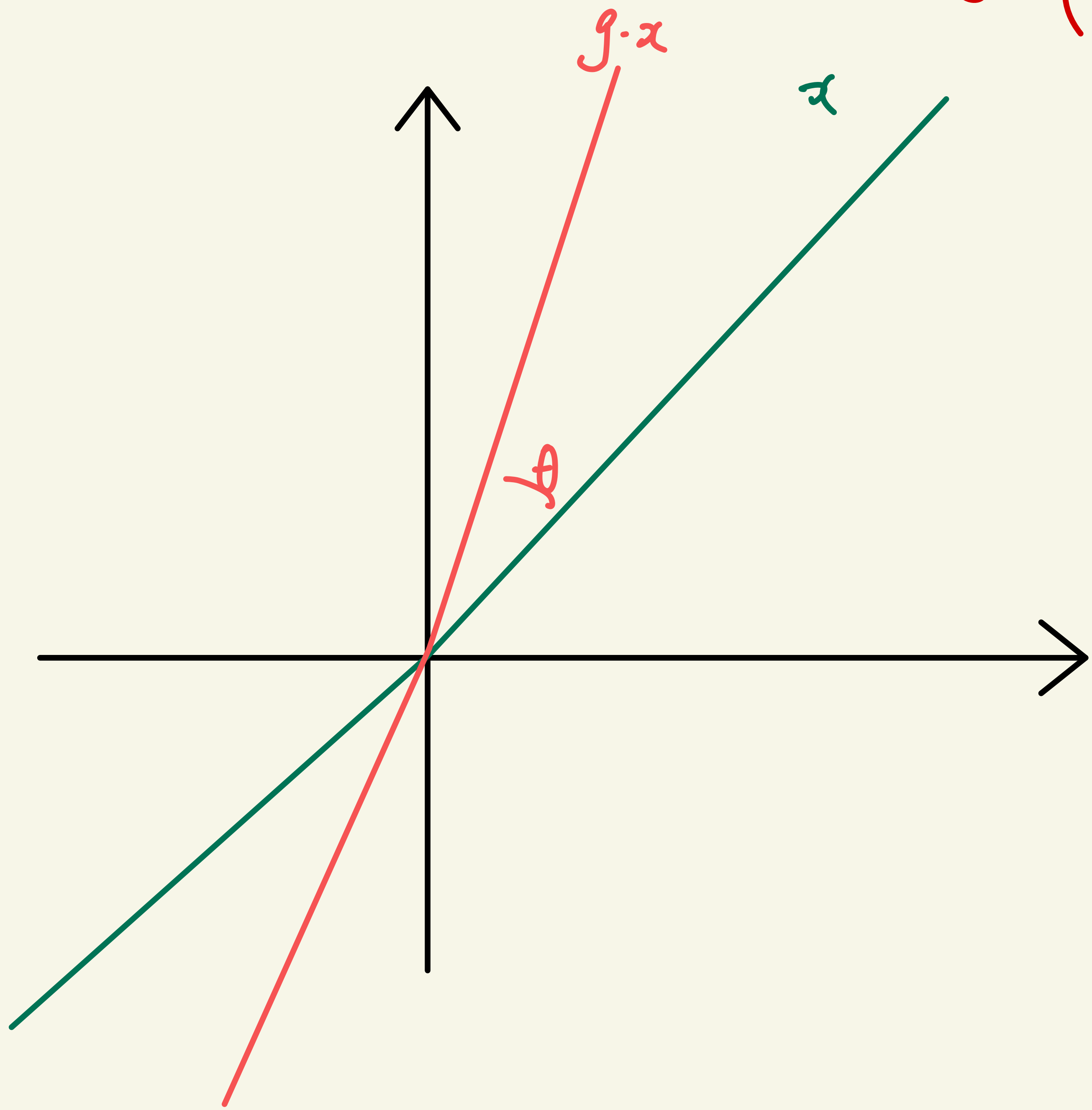
$$g \cdot x := \{ gv \mid v \in x \subset \mathbb{R}^n \} \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$$

k次元部分空間 in $\mathbb{R}^n$

とおく.

$n=2,\ k=1$ の場合

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2)$$



Theorem A : " $(g, x) \mapsto g \cdot x$ " は

$O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ への

推移的な作用を定める.

すなわち

作用
① $\forall g, h \in O(n)$, $\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

② $\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $I_n \cdot x = x$

推移的
③ $\forall x, y \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $\exists g \in O(n)$ s.t. $g \cdot x = y$

が成り立つ

§3 グラスマンの位相

Recall:

$$Gr_k(\mathbb{R}^n) := \{ x \subset \mathbb{R}^n \mid x \text{ は } k \text{ 次元線型部分空間 in } \mathbb{R}^n \}$$

内容: $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相

ゴール： $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に"自然な"

位相を定めたい

Recall： $O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n \}$

n次直交群

$O(n)$ は $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に

"$g \cdot x := \{ gv \mid v \in x \} \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$"

により推移的に作用するよ.

各 $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

写像
$$\begin{array}{rccc} \pi_x : & O(n) & \longrightarrow & Gr_k(\mathbb{R}^n) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

を考える.

Fact : 作用の推移性から $\pi_x : O(n) \to Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は全射

Theorem B $O(n) \subset M(n;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ← 標準位相

は相対位相について 位相群 となる.

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相 $\mathcal{O}$ で

次を満たすものが唯一つ存在する.

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \\ \pi_x : O(n) \to (Gr_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{O}) \text{ は 連続かつ開} \end{array}}$$

Thm B の位相

強すぎない

弱すぎない

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相 $\mathcal{O}$ で

次を満たすものが唯一つ存在する.

$$\boxed{\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n),\quad \pi_x : O(n) \to (Gr_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{O}) \text{ は連続かつ開}}$$

Thm B の位相

強すぎない

弱すぎない

Thm C の Hint : レポート課題 14, "商位相"

Fact　Thm C の位相について

$Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は $\underbrace{\text{コンパクト}}_{\text{強すぎない}}$ $\underbrace{\text{ハウスドルフ}}_{\text{弱すぎない}}$ 空間となる.

§4 グラスマンのイソトロピー

Recall:

$O(n)$ は $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用している.

内容: ◦ イソトロピーの定義

◦ イソトロピーから $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を復元

Def : 各 $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

$$O(n)^x := \{ g \in O(n) \mid g \cdot x = x \}$$

とおく.

$O(n)$ の x における

イソトロピー部分群

Fact : $O(n)^x$ は $O(n)$ の部分群

$x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を固定する。

$G := O(n)$, $H := O(n)^x$ とおく。

更に

$G/H := \{ [g]_H \mid g \in G \}$: 右 H 剰余類全体空間

(位相は商位相)

g の右 H 剰余類

$[g]_H = \{ gh \mid h \in H \} \subset G$

Theorem D

写像 $\pi_x : G = O(n) \to Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相写像 $G/H \xrightarrow{\sim} Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を誘導する。

Theorem D 写像 $\pi_x : G = O(n) \twoheadrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相 $G/H \simeq Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を誘導する.

これより 「位相空間 $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の研究」

を原理的には

① $G = O(n)$ の研究

② $H = O(n)^x$ の研究

③ $H \hookrightarrow G$ の研究

に分解できる!!