$L^p - L^q$ estimates for the quasilinear parabolic equation of m Laplacian type with an absorbing term

M.Nakao (Kyushu Univ.)

ー福岡工業大学における偏微分方程式講義 (2)ー

1 まえおき

退化型非線形放物型方程式の時間大域解の存在とか Gradient estiamtes がもう一つの研究テーマ。とくに、Moser の方法を用いて解の評価を導いてきた。今回はいわゆる非線形吸収項の影響を取り入れた $L^p - L^q$ についてお話ししたい。

2 Introduction.

$$u_t - div(|\nabla u|^m \nabla u) + |u|^\alpha u = 0 \text{ in } (0,\infty) \times R^N \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

を考える。ただし、 $\alpha \geq 0$.

$u_0 \in L^q, 1 \leq q < \infty$, とすると上は $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^q)$ なる一般解をただ一つもつ。この解に対して $\|u(t)\|_p, \|\nabla u(t)\|_p, q \leq p \leq \infty$ を $|u|^\alpha u$ の影響を考慮にいれて導きたい。($L^q - L^p$ 評価という方が正しいかも ･･･)。 Critical exponent として Fujita 指数が出てくるところが面白いところ。

基本的な考えは同じなので、しばらく $m = 0$ の場合を取り扱う。

$|u|^\alpha u$ は吸収項なので解の存在とか解の評価には悪い影響は与えない。したがって、$u_0 \in L^q$ に対して (1.1)-(1.2) は unique sol. $u \in C([0,\infty);L^q)$ をもち次の評価が成立する。

$$\|u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}, q \le p \le \infty, \tag{1.3}$$

$$\|\nabla u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}-\frac{(2-q)N}{4q}}, 1 \le q \le p \le \infty.$$

ただし、後者では $1 \le q \le 2$ とする.

われわれは次の評価を導く。

定理1.1

$$\|u(t)\|_p \le C(p_0)\|u_0\|_q^{\frac{q}{p_0}} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})-\frac{p_0-q}{\alpha p_0}} \tag{1.4}$$

ただし $q+\alpha < p_0 < p \le \infty$ で p_0 は任意.

定理1.2 $u_0 \in L^q, 1 \le q \le 2$ とすると

$$\|\nabla u(t\|_p \le C\|u_0\|_q^{q/2} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{2-q}{2\alpha}}, 2 \le p^l eq\infty. \tag{1.5}$$

(1.3) と (1.4) を比較する. もっとも減衰が速い場合の $q=1$ で考えると $0 \le \alpha < 2/N$ のとき (1.4) の方が (1.3) より良いことがわかる. つまり、この時 $|u|^\alpha u$ 　は線形方程式の摂動項とはみなせないことになる。$\alpha+1 = 2/N+1$ 　はいわゆる藤田指数と一致する.

実はすでに次のことが知られている。$0<\alpha<2/N$ のとき (1.1) は自己相似解 　$w_a(x,t) = t^{-1/\alpha} f(x/\sqrt{t})$ をもつ。ここで $\lim_{|x|\to\infty} |x|^{2/\alpha} f(x) = a > 0$.

さらに 　$u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ でかつ 　$|x| \to \infty$ のとき適当な速さで減衰すれば解は $w_a(x,t)$ 　に漸近する。たとえば (Escobedo,Kavian,Matano (1995) は

$$u_0 \in L^1 \cap L^\infty, \lim_{|x|\to\infty} |x|^{2/\alpha} u_0(x) = a > 0$$

ならば

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{\alpha}} \|u(t) - w_a(t)\| = 0$$

を示している。

われわれは$L^p - L^q$　評価をとおして Fujita 指数の意味を再認識したことになる。また gradient　estimate (1.3) と (1.5) を見ると smoothing effect に関しては$q=1$ として、$\alpha > 2/N$ のとき線形の場合より良くなることがわかる。

3　解の存在について注意

R 上の十分なめらかな, C^∞, 関数 $\beta_\epsilon(u)$ をとり

$$\beta'_\epsilon(u) \geq 0 \text{ かつ } \beta_\epsilon(u) \to \beta(u) = |u|^\alpha u \text{ in } C^1_{loc}(R)$$

とする. $u_0 \in L^q, 1 \leq q < \infty$, に対して $\{u_{0,n}\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R^N)$ で $u_{0,n} \to u_0$ in L^q　なる列をとる。次の近似問題を考える。

$$u_t - \Delta u + \beta_\epsilon(u) = 0 \text{ in } (0,\infty) \times R^N \qquad (0.1)'$$

with the initial condition

$$u(x,0) = u_{0,n}(x). \qquad (0.2)'$$

(0.1)'-(0.2)' はただ一つの十分なめらかな解 $u_{\epsilon,n}(t)$ をもつ。それは例えば $C([0,\infty); H_4 \cap L^\infty \cap L^1) \cap C^1([0,\infty); H_2 \cap L^\infty \cap L^1)$ に属す.

$$u_{\epsilon,n}(t) \longrightarrow u_n(t) \text{ as } \epsilon \to 0 \text{ in } C([0,\infty); L^\infty \cap L^1)$$

で

$$u_n(\cdot) \in W^{1,\infty}([0,\infty); H_1 \cap L^\infty \cap L^1) \cap L^\infty([0,\infty); H_2 \cap L^\infty \cap L^1)$$

を満たすことが容易にわかる。 $u_n(t)$ はこの解のクラスで、初期値$u_{0,n}$ をもつ (0.1)-(0.2) の一意的な解である。 さらに

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_q \leq \|u_{0,m} - u_{0,n}\|_q$$

より $u_n(t)$ は $C([0,\infty);L^q)$ で一様収束する. $u(t)=\lim_{n\to\infty}u_n(t)$ を problem (0.1)-(0.2) の一般解と呼ぶことにする。もちろん一意的に存在する。（非線形半群論の意味での解に一致する:

$$Au=-\Delta u+|u|^\alpha u \text{ in } L^q.$$

4　予備的 L^p 評価

次の出発点が大事。

命題2.1 $u_0\in L^q, 1\le q<\infty$ のとき $u(t)\in L^\infty_{loc}((0,\infty);L^p), q\le p<\infty$ で

$$\|u(t)\|_p\le C_p\|u_0\|_q^q t^{-(p-q)/\alpha}, t>0, \tag{2.1}$$

for $p>q+\alpha$,.

Proof.

方程式に　$|u|^{q-2}u$ をかけて

$$\|u(t)\|_q+\int_0^t\|u(s)\|_{q+\alpha}^{q+\alpha}ds\le\|u_0\|_q. \tag{2.2}$$

また $|u|^{p-2}u, p>q+\alpha,$ をかけて

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_p^p+\frac{4(p-1)}{p^2}\|\nabla(|u|^{p/2-1}u)\|^2+\|u\|_{p+\alpha}^{p+\alpha}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_p^p+p\|u\|_{p+\alpha}^{p+\alpha}\le 0. \tag{2.3$'$}$$

ここでヘルダーの不等式より

$$\|u\|_p\le\|u\|_{q+\alpha}^{1-\theta}\|u\|_{p+\alpha}^\theta$$

with $\theta=(p+\alpha)(p-q-\alpha)/p(p-q)$. よって (2.3)' より

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_p^p+p\|u\|_p^{(p+\alpha)/\theta}\|u(t)\|_{q+\alpha}^{-(1-\theta)(p+\alpha)/\theta}\le 0. \tag{2.4}$$

これを解いて

$$\|u(t)\|_p^p \le C\left(\int_0^t \|u(s)\|_{q+\alpha}^{-(1-\theta)(p+\alpha)/\theta} ds\right)^{-(p-q-\alpha)/\alpha} \tag{2.5}$$

ここで

$$\int_0^t 1dt = \int_0^t \|u(s)\|_{q+\alpha}^{\eta}\|u(s)\|_{q+\alpha}^{-\eta} ds$$

$$\le \left(\int_0^t \|u(s)\|_{q+\alpha}^{q+\alpha} ds\right)^{\eta/(q+\alpha)}\left(\int_0^t \|u(s)\|_{q+\alpha}^{-(1-\theta)(p+\alpha)/\theta} ds\right)^{\theta\eta/(1-\theta)(p+\alpha)} \tag{2.6}$$

ただし、η をつぎのようにとる.

$$\frac{\eta}{q+\alpha} + \frac{\theta\eta}{(1-\theta)(p+\alpha)} = 1,$$

つまり

$$\eta = \alpha(q+\alpha)/(p-q)$$

. すると

$$\theta\eta/(1-\theta)(p+\alpha) = (p-q-\alpha)/(p-q)$$

. よって、(2.5),(2.6) より

$$\|u(t)\|_p^p \le C\|u_0\|_q^q t^{-(p-q)/\alpha}.$$

5 L^p-estimate, $q+\alpha < p \le \infty$

Moser の方法を用いて L^∞ 評価を導く。$p_n = 2^n p_0, n = 1, 2, \cdots$ と置き、 induction によって次を導く。

$$\|u(t)\|_{p_n} \le A_n t^{-\lambda_n} \tag{3.1}$$

ただし

$$A_0 = C_0\|u_0\|_q^{q/p_0}, \lambda_0 = (p_0-q)/p_0\alpha,$$

$$A_n = C^{N/2p_n} \left(\frac{N + 2p_n \lambda_{n-1}}{N} \right)^{N/2p_n} A_{n-1} \text{ and } \lambda_n = \lambda_{n-1} + N/2p_n.$$

(C_0 は前節の L^{p_0} 評価であらわれた定数。) $n = 0$ では正しい(前節。) (3.1) が p_{n-1} で正しいと仮定. (2.3) 式に戻って

$$\frac{1}{p_n} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + \frac{4(p_n - 1)}{p_n^2} \|\nabla(|u|^{p_n/2-1} u)\|^2 + \|u\|_{p_n+\alpha}^{p_n+\alpha} \leq 0.$$

とくに

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + C \|\nabla(|u|^{p_n/2-1} u)\|^2 \leq 0 \tag{3.2}$$

(C 　は p_n と独立.) Gagliardo-Nirenberg inequality より

$$\|u(t)\|_{p_n} \leq C^{1/p_n} \|u(t)\|_{p_{n-1}}^{1-\theta_n} \|\nabla(|u|^{p_n/2-1} u)\|^{2\theta_n/p_n} \tag{3.3}$$

with $\theta_n = N/(N + 2)$. よって、

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + \left(C^{-1/p_n} \|u(t)\|_{p_{n-1}}^{\theta_n - 1} \|u(t)\|_{p_n} \right)^{p_n/\theta_n} \leq 0$$

that is,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + C \|u(t)\|_{p_{n-1}}^{-2p_n/N} \|u(t)\|_{p_n}^{(N+2)p_n/N} \leq 0. \tag{3.4}$$

帰納法の仮定より、

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + C \left(A_{n-1} t^{-\lambda_{n-1}} \right)^{-2p_n/N} \|u(t)\|_{p_n}^{(N+2)p_n/N} \leq 0$$

これを解いて,

$$\|u(t)\|_{p_n}^{-2p_n/N} \geq C A_{n-1}^{-2p_n/N} \int_0^t s^{2p_n \lambda_{n-1}/N} ds$$

$$= C A_{n-1}^{-2p_n/N} \left(\frac{N}{N + 2p_n \lambda_{n-1}} \right) t^{1+2p_n \lambda_{n-1}/N}$$

つまり、

$$\|u(t)\|_{p_n} \le C^{-N/2p_n} \left(\frac{N + 2p_n \lambda_{n-1}}{N} \right)^{N/2p_n} t^{-\lambda_{n-1} - N/2p_n} = A_n t^{-\lambda_n}.$$

これで (3.1) が示された.

$\{\lambda_n\}, \{A_n\}$ の収束をみる。定義より

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + N/2p_n = \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} + \lambda_0$$

$$= \frac{N}{2p_0}(1 - 2^{-n}) + (p_0 - q)/p_0\alpha_0 \to \frac{N}{2p_0} + (p_0 - q)/p_0\alpha \equiv C_1.$$

さらに

$$A_n \le C^{N/2p_n} \left(\frac{N + 2C_1 p_n}{N} \right)^{N/2p_n} A_{n-1}$$

より

$$\log A_n \le \frac{N}{2p_n} \log C + \frac{N}{2p_n} \log \left(\frac{N + 2C_1 p_n}{N} \right) + \log A_{n-1},$$

となり、

$$\log A_n \le \frac{N}{2} \log C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \left(\frac{N + 2C_1 p_k}{N} \right) + \log A_0$$

$$\le \log \tilde{C} + \log A_0$$

with a constant $\tilde{C} > 1$ independent of n. これより

$$A_n \le \tilde{C} A_0 = \tilde{C} C_0 \|u_0\|_q^{q/p_0}. \tag{3.5}$$

を得る。(3.1) で極限をとって

$$\|u(t)\|_\infty \le C \|u_0\|_q^{q/p_0} t^{-N/2p_0 - (p_0 - q)/\alpha p_0}. \tag{3.6}$$

(1.1), $p = p_0$, と (3.6) から

$$\|u(t)\|_p \le \|u(t)\|_\infty^{(p-p_0)/p}\|u(t)\|_{p_0}^{p_0/p}$$
$$\le C\|u_0\|_q^{q/p_0} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})-\frac{p_0-q}{\alpha p_0}}$$

$(p, p_0 \le p \le \infty.)$

6 Gradient estimates.

Theorem 2.2 (gradient estimates) の証明を与える。

命題 4.1. $u_0 \in L^q, 1 \le q \le 2$, とし $u(t) \in C([0,\infty); L^q)$ を一般解とする. このとき $u(t) \in L^\infty_{loc}((0,\infty); H_1)$ で

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \le C\|u_0\|_q t^{-(\alpha+2-q)/\alpha} \tag{4.1}$$

が成立する.

Proof. (前に差分不等式を導いた方法を「微分」のままで行う.) 方程式に u_t をかけて

$$\frac{d}{dt}F(t) + \|u_t(t)\|^2 = 0 \tag{4.2}$$

ただし

$$F(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{\alpha+2}.$$

次に u をかけて

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} = -(u_t, u) \le \|u_t\|\|u\|. \tag{4.3}$$

ここでヘルダーの不等式を用いて

$$\|u(t)\| \le \|u(t)\|_q^{1-\theta}\|u(t)\|_{\alpha+2}^{\theta} \tag{4.4}$$

with $\theta = (\alpha+2)(2-q)/2(\alpha+2-q)$. $\|u(t)\|_q \leq \|u_0\|_q$ に注意し、ヤングの不等式を使うと

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq C\|u_t(t)\|^{2(\alpha+2-q)/(2\alpha+2-q)}\|u_0\|_q^{q\alpha/(2\alpha+2-q)}. \tag{4.5}$$

(4.2) と (4.5) を組み合わせて

$$F(t) \leq C\left(-\frac{d}{dt}F(t)\right)^{(\alpha+2-q)/(2\alpha+2-q)} \|u_0\|_q^{q\alpha/(2\alpha+2-q)}$$

つまり

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -CF(t)^{1+\alpha/(\alpha+2-q)}\|u_0\|_q^{-q\alpha/(2\alpha+2-q)}. \tag{4.6}$$

これを解いて

$$F(t) \leq C\|u_0\|_q t^{-(\alpha+2-q)/\alpha}. \tag{4.7}$$

Remark 4.1. (4.3) の代わりに

$$\|u(t)\| \leq \|u(t)\|_q^{1-\theta}\|\nabla u(t)\|^\theta$$

with $\theta = N(2-q)/(2q+N(2-q)$, を使うと (4.7) の代わりに

$$F(t) \leq C\|u_0\|_q^2 t^{-1-(2-q)N/2q} \tag{4.7$'$}$$

を得る。これは α によらないので線形方程式にも適用可能。

$\|\nabla u(t)\|_\infty$ の評価に進む

方程式を x_i で微分して $|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}, i = 1, \cdots, N,$ をかけると

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_{x_i}(t)\|_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2}\|(|\nabla u_{x_i}(t)|^{p/2-1}\nabla u_{x_i}(t)\|^2 + \int_{R^N}|u|^\alpha|u_{x_i}(t)|^p dx = 0.$$

よって

$$\frac{d}{dt}\|u_{x_i}(t)\|_p^p + 3\|\nabla(|u_{x_i}(t)|^{p/2-1}u_{x_i}(t)\|^2 \leq 0 \tag{4.8}$$

p を p_n に変え、$u(t)$ を $u_{x_i}(t)$　に変えるとこれは (3.4) と本質的に同じなので

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \le C\|\nabla u(t_0)\|(t-t_0)^{-\frac{N}{4}}, t > t_0 > 0,$$

が結論される。ここで $t_0 = t/2$　にとって,

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \le C\|\nabla u(t/2)\| t^{-\frac{N}{4}}.$$

さらに

$$\|\nabla u(t)\|_p^p \le \|\nabla u(t)\|_\infty^{p-2}\|\nabla u(t)\|^2, 2 \le p \le \infty$$

より

$$\|\nabla u(t)\|_p \le C\|\nabla u(t/2)\|^{(p-2)/p}\|\nabla u(t)\|^{2/p} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

$(2 \le p \le \infty)$. これと (4.7) より

$$\|\nabla u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q^{q/2} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-1/2-(2-q)/2\alpha}, 2 \le p \le \infty, \quad (4.9)$$

を得る.

7　$m > 0$ のとき.

$u_0 \in L^q, 1 \le q < \infty$, に対して $\{u_{0,n}\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R^N)$ で $u_{0,n} \to u_0$ in L^q となる列をとる。近似問題

$$u_t - div\{(|\nabla u|^2 + \epsilon))^{m/2}\nabla u\} + (|u|^2 + \epsilon)^{\alpha/2} u = 0 \text{ in } (0,\infty) \times R^N, \quad (0.1)'$$

$$u(x,0) = u_{0,n}(x). \quad (0.2)'$$

を考える.

(0.1)'-(0.2)' は非常になめらかな一意解 $u_{\epsilon,n}(t)$ をもつ. (cf.Ladyzenskaya,

and N.N.Uraltseva) 次を示すことができる：

$$u_{\epsilon,n}(t) \longrightarrow u_n(t) \text{ as } \epsilon \to 0 \text{ in } C([0,\infty); L^\infty \cap L^1)$$

かつ

$u_n(\cdot) \in W^{1,2}([0,\infty); L^2) \cap L^\infty((0,\infty); W^{1,m+2} \cap H_1 \cap L^\infty \cap L^1)$.

$u_n(t)$ はこのクラスで初期値 $u_{0,n}$ をとる一意解である.

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_q \leq \|u_{0,m} - u_{0,n}\|_q,$$

なので $u_n(t)$ は $C([0,\infty); L^q)$ で収束する. 極限 $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$ を問題 (0.1)-(0.2)　の一般解と呼ぶことにする. 各 $u_0 \in L^q$ に対して一般解は一意的に存在する.

$$\|u(t)\|_p \leq C\|u_0\|_q^\mu t^{-\lambda}, q \leq p \leq \infty \tag{5.1}$$

ただし

$$\mu = \frac{m+2+mN/p}{m+2+mN/q}, \lambda = \frac{qN}{q(m+2)+mN}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}).$$

(Herrero-Vazquez $q = 1$.)

　右辺に特異性をもつ外力 $f(t)$ のついた場合に拡張し、それを用いると Fujita 指数は $m + 1 + \frac{m+2}{N}$ であることが証明できる. さらに、$1 \leq q \leq 2$ ならば $u(\cdot) \in L^\infty_{loc}((0,\infty); W^{1,m+2} \cap W^{1,\infty})$ で

$$\|\nabla u(t)\|_p \leq C\|u_0\|_q^{\bar{\mu}} t^{-lam\bar{b}da}, p \geq m+2.$$

が証明できる (Alikakos-Rostamian $q = 1$). ここで

$$\bar{\mu} = \frac{q}{p} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(N+2)p-2N}{2(m+2)+mN} + \frac{(2-q)N}{p(q(m+2)+mN)} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN}.$$

上の結果は $|u|^\alpha u$ があるときも成立する. われわれは $|u|^\alpha u$ の影響を考慮にいれて次を導いた.

定理 5.1. $u_0 \in L^q, 1 \le q < \infty$, とし $p_0 > q + \alpha$ を固定する. このとき一般解　$u(t)$ は $L^\infty_{loc}((0,\infty); L^p), q \le p \le \infty$, となり

$$\|u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q^{\mu(p,q,p_0)} t^{-\lambda(p,q,p_0,\alpha)}, 0 < t < \infty. \tag{5.2}$$

ただし $p, p_0 \le p \le \infty$ で

$$\mu(p,q,p_0) = \frac{q}{p} \cdot \frac{p(m+2)+mN}{p_0(m+2)+mN},$$

$$\lambda(p,q,p_0,\alpha) = \frac{p_0 N}{p_0(m+2)+mN}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}\right) + \frac{p_0 - q}{p\alpha} \cdot \frac{p(m+2)+mN}{p_0(m+2)+mN}.$$

定理　5.2. $u_0 \in L^q, 1 \le q \le 2$ とする.　このとき $u(t)$　は $L^\infty_{loc}((0,\infty); W^{1,p}), 2 \le p \le \infty$, に属し

$$\|\nabla u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q^{\tilde{\mu}(p,q)} t^{-\tilde{\lambda}(p,q,\alpha)}. \tag{5.3}$$

ただし $p, m+2 \le p \le \infty$　で

$$\tilde{\mu}(p,q) = \frac{q}{p} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN},$$

$$\tilde{\lambda}(p,q,\alpha) = \frac{1}{p} \cdot \frac{(N+2)p-2N}{2(m+2)+mN} + \frac{2-q}{p\alpha} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN}.$$

$q = 1$ として, 知られている結果と比較すると $|u|^\alpha u$ の影響として $\alpha < m + (m+2)/N$ のとき decay rate はよくなり、逆に $\alpha > m + (m+2)/N$ のとき平滑化効果がよくなることが分かる.

8　Proof of Theorem 5.1.

次は $m = 0$ の場合と同じ。

命題6.1 $u_0 \in L^q, 1 \le q < \infty$のとき$u(t) \in L^\infty_{loc}((0,\infty); L^p), q \le p < \infty$ で

$$\|u(t)\|_p \le C_p \|u_0\|_q^q t^{-(p-q)/\alpha}, t > 0, \tag{6.1}$$

for $p > q + \alpha$,.

定理 5.1 の証明

方程式に $|u|^{p-2}u$ をかけて積分すると

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}u(t)\|_p^p + \frac{(m+2)^{(m+2)}(p-1)}{(p+m)^{(m+2)}}\|\nabla(|u|^{(p-2)/(m+2)}u)\|_{m+2}^{m+2} + \|u\|_{p+\alpha}^{p+\alpha} = 0 \tag{6.2}$$

$p_0 > q + \alpha$を固定し $p_n = (m+2)p_{n-1} - m, n = 1, 2, \cdots$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + \frac{C}{(p_n+m)^m}\|\nabla(|u|^{(p_n-2)/(m+2)}u)\|_{m+2}^{m+2} \le 0. \tag{6.3}$$

Induction　によって次が示される.

$$\|u(t)\|_{p_n} \le A_n t^{-\lambda_n}, n = 0, 1, \cdots, \tag{6.4}$$

ただし A_n , λ_n は次で定まる:

$$A_0 = C_0\|u_0\|_q^{q/p_0}, \lambda_0 = (p_0 - q)/p_0\alpha,$$

$$A_n = (Cp_n)^{C/p_n} A_{n-1}^{1-m/\beta_n} \text{ and } \lambda_n = (1 + \lambda_{n-1}(\beta_n - m))\,\beta_n^{-1}.$$

ここで

$$\beta_n = (p_n+m)\theta_n^{-1} - p_n \text{ and } \theta_n = N(m+2)(1-p_{n-1}p_n^{-1})(m+2+mN+N)^{-1}.$$

(C_0は(6.1) で $p = p_0$としたときの定数。)

実際、

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{p_n}^{p_n} + \frac{C}{(p_n+m)^m}\|\nabla(|u|^{p_{n-1}-1}u)\|_{m+2}|^{m+2} \le 0.$$

となり、G-N 不等式

$$\|u\|_{p_n} \le C^{1/p_n} \|u\|_{p_{n-1}}^{1-\theta_n} \|\nabla(|u|^{(p_n-2)/(m+2)}u)\|_{m+2}^{(m+2)\theta_n/(p_n+m)}$$

より

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{p_n} + CC^{-(p_n+m)/\theta_n} p_n^{-m-1} \|u(t)\|_{p_{n-1}}^{-(1-\theta_n)(p_n+m)/\theta_n} \|u(t)\|_{p_n}^{(p_n+m)/\theta_n - p_n + 1}$$

これを用いて証明される. 収束については

$$\lambda_n - \frac{1}{m} = \tau_n(\lambda_0 - \frac{1}{m}) \text{ and } A_n \le C A_0^{\tau_n}$$

ただし

$$\tau_n = \frac{p_n(m+2) + mN}{p_n} \cdot \frac{p_0}{p_0(m+2) + mN}.$$

に注意すると

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{1}{m} + \frac{p_0(m+2)}{p_0(m+2)+mN}(\lambda_0 - \frac{1}{m})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(m+2)(p_0 - q)}{p_0(m+2) + mN} + \frac{N}{p_0(m+2)+mN} \equiv \lambda_\infty(p_0, q, \alpha)$$

そして

$$\lim_{n\to\infty} A_n \le C A_0^{p_0(m+2)/(p_0(m+2)+mN)} = C\|u_0\|_q^{q(m+2)/(p_0(m+2)+mN)}.$$

よって

$$\|u(t)\|_\infty \le C\|u_0\|_q^{q(m+2)/(p_0(m+2)+mN)} t^{-\lambda_\infty(p_0,q,\alpha)}.$$

これから結果を得る.

9 Gradient estimates, $m > 0$.

方程式に u_t　をかけて

$$\frac{d}{dt}F(t) + \|u_t\|^2 = 0.$$

ただし

$$F(t) = \frac{1}{m+2}\|\nabla u(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}.$$

方程式に u をかけて

$$\|\nabla u(t)\|_{m+2}^{m+2} + \|u(t)\|\alpha + 2^{\alpha+2} = -(u_t, u) \leq \|u_t(t)\|\|u(t)\|.$$

さらに

$$\|u(t)\| \leq \|u(t)\|_q^{1-\theta} F(t)^{\theta/(\alpha+2)}$$

with $\theta = (\alpha+2)(2-q)/2(\alpha+2-q)$（前出:$\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}$ を利用). これらを組み合わせて次を得る.

命題 7.1.

$$\|\nabla u(t)\|_{m+2}^{m+2} + \|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq C\|u_0\|_q^q t^{-(\alpha+2-q)/\alpha}. \tag{7.1}$$

Remark 4.1.

$$\|u(t)\| \leq \|u(t)\|_q^{1-\theta}\|\nabla u(t)\|_{m+2}^{\theta}$$

with $\theta = N(m+2)(2-q)/(2q(m+2)+2N(m+2-q))$　を用いると

$$\|\nabla u(t)\|_{m+2}^{m+2} \leq C\|u_0\|_q^{\mu_0(q)} t^{-\lambda_0(q)}$$

with

$$\mu_0(q) = \frac{q(2(m+2)+mN)}{q(m+2)+mN}$$

and

$$\lambda_0(q) = 1 + \frac{N(2-q)}{q(m+2)+mN}.$$

これは α と独立.

$\|\nabla u(t)\|_\infty$ の評価に進む。そのために方程式に $-div\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\}, p \geq 2$, をかける (Alikakos-Rostamian)：

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_p^p + \int_{R^N} div\{|\nabla u|^m|\nabla u|\}div\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\}dx \leq 0. \tag{7.2}$$

部分積分をすると

$$\int_{R^N} div\{|\nabla u|^m|\nabla u|\}div\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\}dx$$

$$\geq \int_{R^N} |\nabla u|^{m+p-2}|D^2u|^2dx + \frac{p-2}{4}\int_{R^N} |\nabla u|^{m+p-4}|\nabla(|\nabla u|^2)|^2dx$$

$$\geq \frac{p-2}{4}\int_{R^N} |\nabla u|^{m+p-4}|\nabla(|\nabla u|^2)|^2dx.$$

よって

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_p^p + \frac{C(p-2)}{(p+m)^2}\|\nabla\left(|\nabla u(t)|^{(p+m-2)/2\nabla u}\right)\|^2 \leq 0. \tag{7.3}$$

We set

$$p_0 = m+2 \text{ and } p_n = 2p_{n-1} - m, n = 1, 2, \cdots,$$

$$\theta_n = N(N+2)^{-1}(1 - mp_n^{-1}) \text{ and } \beta_n = (p_n+m)\theta_n^{-1} - p_n.$$

とおけば (7.3) より次が示される：

$$\|\nabla u(t)\|_{p_n} \leq A_n t^{-\lambda_n}$$

ただし：

$$A_n = C^{1/p_n}A_{n-1}^{(\beta_n-m)/\beta_n},$$

$$\lambda_n = (\beta_n - m)/\beta_n)\lambda_{n-1} + \beta_n^{-1}$$

with

$$A_0 = C\|u_0\|_q^{q/(m+2)} \text{ and } \lambda_0 = (\alpha + 2 - q)/(m+2)\alpha.$$

極限をとって

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{2(m+2)\lambda_0}{2(m+2)+mN} + \frac{N}{2(m+2)+mN}$$

$$= \frac{2(\alpha+2-q)}{(2(m+2)+mN)\alpha} + \frac{N}{2(m+2)+mN}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n \le CA_0^{2(m+2)/(2(m+2)+mN} = C\|u_0\|_q^{2q/(2(m+2)+mN)}.$$

かくして

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \le C\|u_0\|_q^{\hat{\mu}(q)} t^{-\hat{\lambda}(q,\alpha)}$$

を得る. ただし、

$$\hat{\mu}(q) = \frac{2q}{q(m+2)+mN} \text{ and } \hat{\lambda}(q,\alpha) = \frac{N+2}{2(m+2)+mN} + \frac{2(2-q)}{(2(m+2)+mN}$$

これから

$$\|\nabla u(t)\|_p \le C\|u_0\|_q^{\tilde{\mu}(p,q)} t^{-\tilde{\lambda}(p,q,\alpha)}$$

with

$$\tilde{\mu}(p,q) = \frac{q}{p} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN)}$$

and

$$\tilde{\lambda}(p,q,\alpha) = \frac{1}{p} \cdot \frac{(N+2)p-2N}{2(m+2)+mN} + \frac{2-q}{p\alpha} \cdot \frac{2p+mN}{2(m+2)+mN}.$$

References

[1] N.D.Alikakos and R.Rostamian, *Gradient estimates for degenerate diffusion equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh,Sect.A(1982), 335-346.

[2] H.Brezis, A.Peletier and D.Terman,*A very singular solution of the heat equation with absorption,* arch. ration. Mech. Anal. 95(1986), 185-209.

[3] D.Andreucci and A.F.Tedeev, *A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with nonconpact boundary,* J. Math. Anal. Appl., 231(1999), 543-567.

[4] H.Brezis, A.Peletier and D.Terman,*A very singular solution of the heat equation with absorption,* arch. ration. Mech. Anal. 95(1986), 185-209.

[5] M.Escobedo, O.Kavian and H.Matano,*Large time behaviorof solutions of a dissipative semilinear heat equation,* Comm. Part. Diff. Equ.(1995), 83-120.

[6] H.Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.1(1966), 109-124.

[7] O.A.Ladyzenskaya,V.A.Solonnikov and N.N.Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type,* Amer. Math. Soc., Providence,RI, 1968.

[8] H.Levine, *The role of critical exponents in blow-up theorems,*SIAM Rev., 37(1990), 262-288.

[9] M.Nakao, *Global solutions for some nonlinear parabolic equations with nonmonotonic perturbations,* Nonlinear Analysis TMA,10(1986), 299-314.

[10] M.Nakao, *Remarks on* $L^p - L^q$ *estimates and Fujita exponent for the quasilinear parabolic equation of* m*-Laplacian type,* Adv. Math. Sci. Appl., 19(2009), 245-267..

[11] M.Nakao, $L^p - L^q$ *estimates for the heat equation with absorbing type nonlinearity,* submitted to Funkcialaj EkvacioJ.

[12] M.Nakao and C.Chen, *Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of* m*-Laplacian type with a nonlinear convection term,* J. Differential Equations, 162(2000), 224-250.