Existence of global decaying solutions to the Cauchy problem for nonlinear dissipative Klein-Gordon equations with a derivative nonlinearity

M.Nakao (Kyushu Univ.)

ー福岡工業大における偏微分方程式講義（１）ー

1　まえおき

さまざまな摩擦項をもつ波動方程式の解のエネルギー減衰問題とその応用として非線形方程式の時間大域解の存在を示すというのが私の研究の中心であった。後者についてはアプリオリ評価が大事であるがそのために「借金法」というのを用いるのが便利である。　今日はそのあたりのところを最近の結果をとおして紹介したい。

2　Introduction

考える方程式は

$$u_{tt} - \Delta u + \rho(u_t) + u = f(u, \nabla u, u_t) \text{ in } R^N \times R^+ \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x). \tag{1.2}$$

ここで $\rho(v)$ は $\rho(v) \approx |v|^r v, 0 \le r \le 2/(N-2)^+,$　のような関数.

　$f = f(u) = |u|^\alpha u$ のようなときは　’ポテンシャルの井戸’の方法　または　修正ポテンシャルの方法で時間大域解の存在、非存在を示すことができるが、f が ∇u を含むときはそれは使えない。こ

こでは $\rho(u_t)$ の影響で解のエネルギーが減衰することを期待して、それを用いて時間大域解の存在をしめそう。

$f \equiv 0$ のとき。

$(u_0, u_1) \in H_1 \times L^2$かつ$\mathrm{supp} u_0 \cup \mathrm{supp} u_1 \subset B(L) \equiv \{x \in R^N | |x| < L\}$ とすると

$$E(t) \leq \{E(0)^{-r/2} + m_0 \int_0^{(t-1)^+} (1+t-s)^{-Nr/2} ds\}^{-2/r}$$
$$\leq C(E(0))(1+t)^{-(2-Nr)/r} \text{ if } 0 < r < 2/N.$$
$$(E(t) \leq C(E(0))(\log(2+t))^{-2/r} \text{ if } r = 2/N.)$$

ここで

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2).$$

これはある意味で optimal である。

f,$\rho(v)$ の仮定をのべる。

Hyp.A. $f(u, \mathbf{v})$ is a C^1 class function on $R \times R^{N+1}$ an satisfies:

(1)

$$|f(u, \mathbf{v})| \leq k_0 \left(|u|^{\alpha+1} + |u|^{\beta+1} |\mathbf{v}| \right),$$

with $\alpha > 0, \beta \geq 0$,

(2)

$$|f_u(u, \mathbf{v})| \leq k_0 \left(|u|^{\alpha} + |u|^{\beta} |\mathbf{v}| \right)$$

and

(3)

$$|f_{\mathbf{v}}(u, \mathbf{v})| \leq k_0 |u|^{\beta+1}$$

where $k_0 > 0$.

典型的なのは非線形移流項 $f = \nabla \cdot \mathbf{G}(u)$.

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2).$$

Hyp.B. $\rho(v)$ is differentiable and monotone increasing in $v \in R$ and satisfies: (1)

$$k_1|v|^{r+2} \le \rho(v)v \le k_2(|v|^{r+2} + |v|^2) \text{ if } |v| \le 1$$

with $k_1, k_2 > 0, 0 \le r < \infty$.

(2)

$$k_1|v|^{p+2} \le \rho(v)v \le k_2|v|^{p+2} \text{ if } |v| \ge 1$$

with some $k_1, k_2 > 0$ and $0 \le p \le 2/(N-2)^+$.

$N = 1, 2, 3$ が取り扱えるが $N = 3$ とする。

定理　Hyp.A,B が次の r, α, β で満たされるとする。

$$0 < Nr < 2, \beta + 1 > 4r/(2 - Nr) \text{ and } 2\alpha - (\alpha - 2)^+ > 4r/(2 - Nr).$$

$(u_0, u_1) \in H_2 \times H_1$　かつ

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset B(L), L > 0,$$

とし、

$$\|u_0\|_{H_2} + \|u_1\|_{H_1} < \tilde{K}_2$$

となる $\tilde{K}_2$ をとる。　このとき、$\delta = \delta(\tilde{K}_2, L) > 0$　が存在し、$E(0) < \delta$　なら the problem (1.1)-(1.2) はただひとつの解 $u(\cdot) \in X_2(\infty) \equiv L^\infty([0,\infty); H_2) \cap W^{1,\infty}([0,\infty); H_1) \cap W^{2,\infty)}([0,\infty); L^2)$ をもち、それは次を満たす。

$$E(t) \le C_0(1+t)^{-(2-Nr)/r},$$

$$\|u_{tt}(t)\| + \|\nabla u_t(t)\| + \|\Delta u(t)\| \le C(E(0), \tilde{K}_2) < \infty, 0 \le t < \infty.$$

補題 Let $\phi(t)$ be a nonnegative function on $[0, T], T > 1$, such that $\phi(t+1) \le \phi(t)$ and

$$\sup_{t \le s \le t+1} \phi(s)^{1+\gamma} \le C_0(1+t)^\theta \left(\phi(t) - \phi(t+1)\right), 0 \le t \le T - 1$$

with $C_0 > 0, \gamma > 0$ and $0 \le \theta \le 1$. Then

$$\phi(t) \le \left((\sup_{0\le s\le 1} \phi(s))^{-\gamma} + \frac{\gamma}{C_0} \int_0^{(t-1)^+} (1+t-s)^{-\theta} ds \right)^{-1/\gamma}, 0 \le t \le T.$$

(When $\gamma = \theta = 0$ we have a usual exponential decay of $\phi(t)$.)

3 A loan method.

時間局所解の存在 $u(\cdot) \in X_2(T) \equiv L^\infty([0,T); H_2) \cap W^{1,\infty}([0,T); H_1^0) \cap W^{2,\infty}([0,T); L^2), T > 0$ と有限伝搬性

$$\mathrm{supp} u(t) \subset B(L+t).$$

はスタンダード. よって

$$\mathrm{ess.sup}_{0\le t<T} (\|u_{tt}(t)\| + \|u_t(t)\|_{H_1} + \|u(t)\|_{H_2}) \le C_1 < \infty$$

が示されればよい. ただし、C_1 は T に独立. そのために次のような 'loan' method を用いる。

$$E(t) \le K_0 E(0) \qquad (1)$$

$$E(t) \le \left(K_1^{-r/2} + m_0 \int_0^{(t-1)^+} (1+t-s)^{-Nr/2} ds \right)^{-2/r} \qquad (2)$$

and

$$\|u_{tt}(t)\| + \|\nabla u_t(t)\| \le K_2, \|\Delta u(t)\| \le K_2 \qquad (3)$$

が $0 \le t \le \tilde{T}(< T)$ で成立すると仮定する（借金）。ただし K_0, K_1, K_2 and m_0 はあとで決める.

$K_0 > 1, E(0)_< K_1$ そして $|u_{tt}(0)\| + \|\nabla u_t(0)\| < K_2, \|\Delta u(0)\| < K_2$

なら上のような$\tilde{T}$　がとれる。ここで

$$u_{tt}(0) = \Delta u_0 - \rho(u_1) + f(u_0, \nabla u_0, u_1) \in L^2.$$

(See the next section.)
　上の仮定のもとで次を導こう。

$$E(t) < K_0 E(0) (if E(0) \neq 0) \qquad (1)'$$

$$E(t) < \left(K_1^{-r/2} + m_0 \int_0^{(t-1)^+} (1+t-s)^{-Nr/2} ds \right)^{-2/r} \qquad (2)'$$

and

$$\|u_{tt}(t)\| + \|\nabla u_t(t)\| \leq Q_2(E(0), K_1, K_2), \|\Delta u(t)\| \leq Q_2(E(0), K_1, K_2). \quad (3)'$$

もし適当な $K_1, K_2,$　に対して

$$Q_2(E(0), K_1, K_2) < K_2 \qquad (4)$$

とできれば、借金を返したことになり　$T = \infty$　にとれて　(1),(2),(3)　は　$[0, \infty$ で成立することになる（連続的数学的帰納法！）。(4) は　$E(0)$ を小さくとることによって実現されることになろう.

4　Estimates on $[0, 1]$

$[0, \tilde{T}]$ 上で (1),(2),(3)　が成立するとする。$0 \leq t \leq \min\{\tilde{T}, 1\}$　上で解の評価を導く。その結果 ,K_1, K_2　の取り方で$\tilde{T} > 1$　としてよいことがわかる。
　命題 3.1. $K_0 > 1$とし、

$$q(K_0, K_1, K_2)$$

$$\equiv 1 + CK_0 \left(K_1^{2\alpha - (\alpha-2)^+/4} K_2^{(\alpha-2)^+/2} + K_1^{(\beta+1)/4} K_2^{(\beta+1)/2} \right) < K_0, \qquad (3.1)$$

とする、ただし　C は ある定数. このとき、$E(0) \neq 0$ なら

$$E(t) < K_0 E(0) \text{ for } 0 \leq t \leq \min\{1, \tilde{T}\}. \tag{3.2}$$

Proof. $E(t) \leq K_1$ に注意し、Gagliardo-Nirenberg を用いると、エネルギー等式から

$$E(t) \leq E(0) + \int_0^t \int_{R^N} |f(u, \nabla u, u_t) u_t| dx ds$$

$$\leq E(0) + C \int_0^t \left(\|u\|_{2(\alpha+1)}^{\alpha+1} \|u_t\| + \|u\|_\infty^\beta E(s) \right) ds$$

$$\leq q(K_0, K_1, K_2) E(0), 0 \leq t \leq \hat{T}.$$

(

$\|u\|_{2(\alpha+1)}^{\alpha+1} \leq C \|u\|_\infty^{\alpha-2} \|\nabla u\|^3 \leq C \|\nabla u\|^{3+(\alpha-2)/2} \|\Delta u\|^{(\alpha-2)/2}$ if $\alpha > 2$

２階の偏導関数の評価のために次を準備。

命題 3.2. 仮定 (1),(2),(3) の下で

$$\frac{d}{dt} E_1(t)$$

$$\leq C \left(K_2^{(\beta+3)/2} E(t)^{(\beta+1)/4} + + C K_0 E(t)^{(2\alpha-(\alpha-2)^+)/4} K_2^{(\alpha-2)^+/2} \right) \sqrt{E_1(t)} \tag{3.3}$$

$(0 \leq t \leq \tilde{T}.)$

ここで

$$E_1(t) = \frac{1}{2} (\|u_{tt}(t)\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2).$$

Proof.

方程式を t で微分して

$$u_{ttt} - \Delta u_t + u_t + \rho_v(u_t) u_{tt} = f_u u_t + f_{\mathbf{v}} \cdot (\nabla u_t, u_{tt}). \tag{3.4}$$

これに u_{tt} をかけて積分すると

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \le C\int_{R^N}|u|^\alpha|u_t||u_{tt}|dx + C\int_{R^N}|u|^\beta(|\nabla u|+|u_t|)|u_t||u_{tt}|dx$$
$$+C\int_{R^N}|u|^{\beta+1}(|\nabla u_t|+|u_{tt}|)|u_{tt}|)dx$$
$$\equiv I_1+I_2+I_3.$$

これらを評価すればよい。

(3.4) を積分すると、

命題 3.3. $0\le t\le \min\{1,\tilde{T}\}$ に対して,

$$\sqrt{E_1(t)} \le \sqrt{E_1(0)} + C\left(K_2^{(\beta+3)/2}(K_0E(0))^{(\beta+1)/4} + K_2^{\alpha/2}(K_0E(0))^{(\alpha+2)/4}\right)$$
$$\equiv \bar{Q}_2(K_0E(0),E_1(0),K_2). \tag{3.5}$$

さらに、上と方程式より、

$$\|\Delta u(t)\| \le \sqrt{2E_1(t)} + C\sqrt{E(t)}$$
$$+C\left(K_2^{3p/2}E(t)^{(2-p)/4} + K_2^{(\beta+1)/2}E(t)^{(\beta+3)/4} + K_2^{(\alpha-2)^+/2}E(t)^{(2(\alpha+1)-(\alpha-2)^+)/4}\right) \tag*{(3.5)$'$}$$

$(0\le t\le \min\{\tilde{T},1\}.)$ 特に、$t, 0\le t\le \min\{\tilde{T},1\}$ に対して

$$\|\Delta u(t)\| \le \sqrt{2}\bar{Q}_2 + C\sqrt{K_0E(0)}$$
$$+C\Big(K_2^{3p/2}(K_0E(0))^{(2-p)/4} + K_2^{(\beta+1)/2}(K_0E(0))^{(\beta+3)/4}$$
$$+K_2^{(\alpha-2)^+/2}(K_0E(0))^{(\alpha+1)/2-(\alpha-2)^+/4}\Big) \equiv Q_2(K_0E(0),E_1(0),K_2). \tag{3.6}$$

ここで次の仮定を設ける:

$$K_0E(0) < K_1 \text{ and } Q_2(K_0E(0),E_1(0),K_2) < K_2. \tag{3.7}$$

$K_0 > 1$を固定し、$\sqrt{E_1(0)} < K_2$ となる K_2 をとる. (K_2 は $\tilde{K_2}$ のみに依存) 次に $E(0)$ を小さくとる. 前の仮定　(3.1) も　K_1 を小さくとるつまり $E(0)$ を十分小さくとれば満たされる。結局　$\tilde{K_2}$ に応じて　$E(0)$ を十分小さくとれば解は$[0,1]$を超えて延長でき、$\tilde{T} > 1$ となることがわかった。

5 A difference inequality.

$E(t)$　の有界性と減衰を出すため$E(t)$に関する差分不等式を導く.

方程式に　u_t をかけて積分すると

$$\int_t^{t+1} \int_{R^N} \rho(u_t) u_t dx ds$$

$$= E(t) - E(t+1) + \int_t^{t+1} \int_{R^N} F(x,s) u_t dx ds$$

$$\equiv D(t)^2, 0 < t \leq T-1, \tag{5.1}$$

ただし $F(x,t) = f(u, \nabla u, u_t)$.

命題4.1.

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq C(L)(1+t)^{Nr/(r+2)} D(t)^{4/(r+2)} + C\{D(t)^{4(p+1)/(p+2)} + D(t)^2\}$$

$$+C \int_t^{t+1} \int_\Omega |F(x,s)|^2 dx ds, 0 \leq t < T-1. \tag{4.2}$$

Proof.

ρ の仮定から

$$\int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega_1(t)} |u_t(s)|^{r+2} dx + \int_{\Omega_2(t)} |u_t(s)|^{p+2} dx \right) ds \leq C D(t)^2, \quad ((4.3)$$

ただし、

$$\Omega_1(t) = \{x \in R^N | |u(x,t)| \leq 1\} \text{ and } \Omega_2(t) = \{x \in R^N | |u(x,t)| \geq 1\}.$$

(4.3) から

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds$$

$$\leq \left(\int_t^{t+1}\int_{\Omega_1(t)} |u_t(s)|^{r+2} dxds\right)^{2/(r+2)} \left(\int_{B(L+t)} 1dx\right)^{r/(r+2)}$$

$$+\int_t^{t+1}\int_{\Omega_2(t)} |u_t(s)|^{p+2} dxds$$

$$\leq C\left(C(L)(1+t)^{Nr/(r+2)} D(t)^{4/(r+2)} + D(t)^2\right) \equiv \tilde{A}^2.$$

よって $t_1 \in [t, t+1/4], t_2 \in [t+3/4, t+1]$ がとれて

$$\|u_t(t_i)\|^2 \leq 2\tilde{A}^2, i = 1, 2.$$

次に $u(t)$　をかけ $[t_1, t_2] \times \Omega$ で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|u(s)\|^2 + \|\nabla u(s)\|^2) ds = (u_t(t_1), u(t_1)) - (u_t(t_2), u(t_2))$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} (Fu + \rho(x, u_t)u) dxds$$

$$\leq C\tilde{A} \sup_{t\leq s\leq t+1} \sqrt{E(s)} + \tilde{A}^2$$

$$+\left(\int_t^{t+1}\int_{\Omega_2(t)} |u_t|^{p+2} dxds\right)^{(p+2)/(p+1)} \left(\int_t^{t+1}\int_{\Omega_2(t)} |u|^{p+2} dxds\right)^{1/(p+2)}$$

$$+ (\int_t^{t+1} \|F(s)\|^2 ds)^{1/2}\Big) \sup_{t\leq s\leq t+1} \sqrt{E(s)}$$

$$\equiv A(t)^2. \tag{4.4}$$

(4.3),(4.4) より

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s) ds \leq CA(t)^2.$$

そこで $t^* \in [t_1, t_2]$ があって、

$$E(t^*) \leq CA(t)^2.$$

ゆえに、エネルギー等式に戻って、

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(s) \le E(t^*)+\int_t^{t+1}\int_\Omega \rho(u_t(s))u_t(s)dxds+\int_t^{t+1}\int_\Omega |F(x,s)||u_t|dxds.$$

最後にヤングの不等式で右辺の $\sup_{t\le s\le t+1}\sqrt{E(s)}$ を左辺に吸収させれば(4.1)を得る。

6 $E(t)$ の有界性と減衰

$E(0)$ を小さくすれば $E(t+1) \le E(t)$ となることを示そう。$E(t) \le E(t+1)$ for some $t, 0 \le t \le \tilde{T}-1$ と仮定. すると前の不等式(4.1)より

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(s) \le C(1+t)^{Nr/(r+2)}\left(\int_t^{t+1}\int_{R^N}|Fu_t|dxds\right)^{2/(r+2)}$$

$$+C\left(\int_t^{t+1}\int_{R^N}|Fu_t|dxds\right)^{2(p+1)/(p+2)}+C\int_t^{t+1}\int_{R^N}|F|^2dxds. \quad (5.1)$$

前と同じように右辺を評価する。($N=3$)

$$\int_t^{t+1}\int_{R^N}|Fu_t|dxds$$

$$\le C\left(K_2^{(\alpha-2)^+/2}\sup_{t\le s\le t+1}E(s)^{(2\alpha+4-(\alpha-2)^+)/4}+K_2^{(1+\beta)/2}\sup_{t\le s\le t+1}E(s)^{(\beta+5)/4}\right).$$

$$\int_t^{t+1}\int_{R^N}|F|^2dxds$$

$$\le C\left(K_2^{(\alpha-2)^+}\sup_{t\le s\le t+1}E(s)^{(\alpha+1)-(\alpha-2)^+/2}+K_2^{\beta+1}\sup_{t\le s\le t+1}E(s)^{(\beta+3)/2}\right).$$

よって、

$$\sup_{t\le s\le t+1}E(s)$$

$$\le C(1+t)^{Nr/(r+2)}\left(K_2^{(\alpha-2)^+/2}\sup_{t\le s\le t+1}E(s)^{(2\alpha+4-(\alpha-2)^+)/4}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+K_2^{(\beta+1)/2} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{(\beta+5)/4}\Big)^{2/(r+2)} \\
&+C\left(K_2^{(\alpha-2)^+/2} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{(2\alpha+4-(\alpha-2)^+)/4}\right) \\
&+K_2^{(\beta+1)/2} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{(\beta+5)/4}\Big)^{2(p+1)/(p+2)} \\
&+C\Big(K_2^{(\alpha-2)^+} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{\alpha+1-(\alpha-2)^+/2} \\
&+K_2^{\beta+1} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{(\beta+3)/2}\Big) \\
&\equiv I_1+I_2+I_3. \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

もっとも大事なI_1の第２項目をみる。$E(t)\le C(K_1+m_0^{-2/r})(1+t)^{-(2-Nr)/r}$ と $E(t)\le K_0E(0), 0\le t\le \tilde{T}$,we can treat the first term of the right-hand side as follows.

$$
\begin{aligned}
I_{1,2} &\le CK_2^{(\beta+1)/(r+2)}(1+t)^{Nr/(r+2)} \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{(\beta+5)/2(r+2)-(\mu_2+1)} \\
&\quad \times \sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{\mu_2+1} \\
&C(K_1+m_0^{-2/r})K_2^{(\beta+1)/(r+2)}(1+t)^{Nr/(r+2)-(\beta+5)(2-Nr)/2r(r+2)+(\mu_2+1)(2-Nr)/r} \\
&\quad \times(K_0E(0))^{\mu_2} \sup_{t\le s\le t+1} E(s) \\
&\le C(K_1+m_0^{-2/r})(K_0E(0))^{\mu_2} \sup_{t\le s\le t+1} E(s) \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\mu_2=(\beta+1)/2(r+2)-2r/(r+2)(2-Nr)
$$

と定め、

$$
\beta+1>4r/(2-Nr)
$$

と仮定する.

同じく I_1 の第 1 項を評価するため

$$2\alpha - (\alpha-2)^+ > 4r/(2-Nr)$$

を仮定する. すると

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(s) \le Q_0(K_1, K_2, K_0E(0)) \sup_{t\le s\le t+1} E(s) \tag{5.4}$$

ここで $Q_0(K_1, K_2, 0) = 0$. 詳しくは、

$$\begin{aligned} Q_0(K_1,K_2,K_0E(0)) \equiv C(K_1,m_0)\Big(&K_2^{(\alpha-2)^+/(r+2)}(K_0E(0))^{\mu_1} \\ &+K_2^{(\beta+1)/(r+2)}(K_0E(0))^{\mu_2}\Big) \\ +\Big(&K_2^{(\alpha-2)^+(p+1)/(p+2)}(K_0E(0))^{((2\alpha-(\alpha-2)^+)(p+1)-(p+2))/(p+2)} \\ &+K_2^{(p+1)(\beta+1)/(p+2)}(K_0E(0))^{((\beta+3)p+\beta+1)/2(p+2)}\Big) \\ +\Big(&K_2^{(\alpha-2)^+}(K_0E(0))^{\alpha-(\alpha-2)^+/2} \\ &+K_2^{\beta+1}(K_0E(0))^{(\beta+1)/2}\Big). \end{aligned}$$

そこで　$E(0)$ を小さくとると

$$CQ_0(K_0E(0), K_1, K_2) < 1. \tag{5.5}$$

よって $\sup_{t\le s\le t+1} E(s) = 0$. つまり、$E(t) \le E(t+1)$ とすると $E(s) = 0, t \le s \le t+1$. これは

$$E(t+1) \le E(t) \text{ for all } t, 0 \le t \le \tilde{T}-1,$$

を意味する。よって

$$E(t) \le \sup_{0\le s\le 1} E(s) < K_0E(0), 0 \le t \le \tilde{T}, \text{ if } E(0) \ne 0. \tag{5.6}$$

次に $E(t)$ 　の減衰評価を導く。　差分方程式に戻って、上の事実を用いると

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(s) \le CQ_0(K_0E(0), K_1, K_2) \sup_{t\le s\le t+1} E(s)$$

$$+C\{(1+t)^{Nr/(r+2)}D_0(t)^{4/(r+2)} + D_0(t)^{4(p+1)/(p+2)} + D_0(t)^2\} \quad (5.7)$$

ただし

$$D_0(t)^2 \equiv E(t) - E(t+1) \ge 0.$$

そこで (5.5) より少し強い仮定（実質的に同じ）

$$CQ_0(K_0E(0), K_1, K_2) \le \frac{1}{2} \quad (5.5)'$$

を設けると (5.7) から

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(s)^{1+r/2} \le \hat{C}_0(1+t)^{Nr/2}(E(t) - E(t+1)). \quad (5.8)$$

ただし $\hat{C}_0 = C\{(K_0E(0))^r + (K_0E(0))^{(pr+p+r)/(p+2)} + 1\}$. $K_0E(0) < 1$ としてよいので $\hat{C}_0$ は $K_0E(0)$ と独立な $\hat{C}$ に置き換えてよい. 上の不等式より

$$E(t) \le \left((\sup_{0\le s\le 1} E(s))^{-r/2} + r(2\hat{C})^{-1} \int_0^{(t-1)^+} (t+1-s)^{-Nr/2} ds \right)^{-2/r}, 0 \le t \le \quad (5.9)$$

を得る。

　さて K_1 を

$$(\sup_{0\le s\le 1} E(s) \le) K_0E(0) < K_1$$

にとり, $m_0 = r(2\hat{C})^{-1}$ 　とおけば

$$E(t) < \left(K_1^{-r/2} + m_0 \int_0^{(t-1)^+} (t+1-s)^{-Nr/2} ds \right)^{-2/r}, 0 \le t \le \tilde{T}. \quad (5.9)'$$

を得たことになる。(借金 (2) を返したことになる.)

7 Completion of the proof of Theorem.

最後に $u(t)$ の2階の偏導関数を $[0,\tilde{T}]$ で評価する。局所解の評価と同じく

$$u_{ttt} - \Delta u_t + \rho'(u_t)u_{tt} = f_u u_t + f_{\mathbf{v}} \cdot (\nabla u_t, u_{tt})$$

に戻る。すでに $E_1(t)$ に対する 命題3.2を知っている。

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \le C\Big(K_2^{(\beta+3)/2}E(t)^{(\beta+1)/4}$$

$$+CK_0E(t)^{(2\alpha-(\alpha-2)^+)/4}K_2^{(\alpha-2)^+/2}\Big)\sqrt{E_1(t)}, 0 \le t \le \tilde{T},$$

$E(t)$ の減衰評価を利用して右辺を積分する. $\nu > r/(2-Nr)$ に対して

$$\int_0^{\tilde{T}} E(t)^\nu dt$$

$$\le 2(K_0E(0))^\nu + \int_1^\infty \{\left(\frac{2m_1}{2-Nr}\right)^{-2\nu/r}\Big(\frac{2-Nr}{2m_1}(K_0E(0))^{-r/2}$$

$$+ (t-1)^{(2-Nr)/2}\Big)^{-2\nu/r}\}dt$$

$$= 2K_0E(0)^\nu + m_2(K_0E(0))^{\nu-r/(2-Nr)}, \tag{6.1}$$

ただし、$m_1 = 3^{(2-Nr)/2} - 2^{(2-Nr)/2}$,$m_2 > 0$. よって、

$$\sqrt{E_1(t)} \le \sqrt{E_1(0)}$$

$$+C\Big\{K_2^{\alpha/2}\Big((K_0E(0))^{(\alpha+2)/4} + (K_0E(0))^{(\alpha+2)/4-r/(2-Nr)}\Big)$$

$$+K_2^{(\beta+3)/2}\Big((K_0E(0))^{(\beta+1)/4} + (K_0E(0))^{(\beta+1)/4-r/(2-Nr)}\Big)\Big\}$$

$$\le \sqrt{E_1(0)} + \hat{Q}_2(K_0E(0), K_2) \equiv \tilde{Q}_2(K_0E(0), K_2, E_1(0)) \tag{6.2}$$

ただし、$\beta+1 > 4r/(2-Nr), \alpha+2 > 4r/(2-Nr)$ を用いた。よって、

$$\|u_{tt}(t)\| + \|\nabla u_t(t)\| \le 2\tilde{Q}_2(K_0E(0), K_2, E_1(0)).$$

さらに、方程式に戻って

$$\begin{aligned}\|\Delta u(t)\| &\le \sqrt{2}\tilde{Q}_2 + C\sqrt{K_0E(0)} \\ +C\Big(K_2^{3p/2}(K_0E(0))^{(2-p)/4} &+ K_2^{(\beta+1)/2}(K_0E(0))^{(\beta+3)/4} \\ &+ K_2^{(\alpha-2)^+/2}(K_0E(0))^{(\alpha+1)/2-(\alpha-2)^+/4}\Big) \\ &\equiv Q_2(K_0E(0), K_2, E_1(0)), 0 \le t \le \tilde{T}. \qquad (6.3)\end{aligned}$$

上で

$$Q_2(0, K_2, E_1(0)) = 2\sqrt{E_1(0)}$$

そこで　$K_2 > 2\sqrt{E_1(0)}$ にとり、これに応じて　$E(0)$ を十分小さくとれ

$K_0 > 1, K_0E(0) < K_1$ そして $\|u_{tt}(0)\| + \|\nabla u_1\| < K_2, \|\Delta u_0\| < K_2$ となる。途中の仮定 (5.5) も保証される。

References

[1] F.John, *Blow-up solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions,* Manuscripta Math. 28(1979), 235-268.

[2] K.Mochizuki and T.Motai, *On energy decay-nondecay problems for the wave equations with nonlinear dissipative term in R^N,* J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 405-421.

[3] M.Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equatons,* J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 747-762

[4] M.Nakao, *Energy decay for the wave equation with nonlinear dissipative term,* Funk. Ekvac., 26 (1983), 237-250.

[5] D.H.Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations,* Arch. Rational Mech. Anal. 30 (1968), 148-172.