非線形楕円型方程式における
一般化スケール則と解構造

内藤 雄基　（広島大学）

1. 序

本講演では，非線形楕円型方程式

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^N, \quad N \geq 3, \tag{1.1}$$

および対応する非線形固有値問題の球対称解について，[21], [22] で得られた結果を紹介する．この講演の内容は，宮本安人氏（東京大）との共同研究に基づく．

ここでは，次の (f1), (f2) を仮定する．

(f1) ある $u_0 \geq 0$ が存在し，$u \geq u_0$ において $f(u) > 0$ かつ

$$F(u) := \int_u^\infty \frac{1}{f(t)} dt < \infty.$$

(f2) 極限値 $q = \lim_{u\to\infty} \dfrac{f'(u)^2}{f(u)f''(u)}$ が存在する．

(f1), (f2) を仮定する場合，極限値 q は $q \geq 1$ を満たす．さらに次も成り立つ:

$$q = \lim_{u\to\infty} F(u)f'(u). \tag{1.2}$$

$f(u)$ が $\lim_{u\to\infty} \dfrac{uf'(u)}{f(u)} = p > 1$ を満たす場合，ロピタルの定理より

$$\frac{1}{p} = \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)/f'(u)}{u} = \lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{f(u)f''(u)}{f'(u)^2}\right) = 1 - \frac{1}{q}$$

が得られ，$1/p + 1/q = 1$ を満たすことがわかる．この (f2) で与えられる指数 q は，Dupaigne-Farina [4] により安定解の研究において導入され，その後，藤嶋-猪奥 [6, 7] は (f1), (1.2) を満たす非線形項をもつ半線形熱方程式の初期値問題の可解性を議論している．

様々な非線形項 $f(u)$ が (f1), (f2) を満たすことを確認することができる．典型的な例として，$f(u) = u^p$, $p > 1$, の場合は $q = p/(p-1)$ として，$f(u) = e^u$ の場合は

「第 10 回偏微分方程式レクチャーシリーズ in 福岡大学」2025 年 5 月 17 日–18 日
E-mail address: yunaito@hiroshima-u.ac.jp

$q=1$ として (f1), (f2) を満たすことがわかる．さらに $f(u)=u^p\log u$, $p>1$, の場合は $q=p/(p-1)$ として (f2) を満たし，$f(u)=e^{u^p}$ や e^{e^u} の場合，さらには

$$f(u)=\underbrace{\exp(\cdots\exp(u)\cdots)}_{n+1\ \text{times}} \tag{1.3}$$

の場合は，$q=1$ として (f2) を満たす.（その他の例については，宮本 [18] を参照.）

2. 一般化スケール則

方程式 (1.1) において $f(u)=u^p$ とするとき, スケール変換

$$u_\lambda(x)=\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x)\quad \text{for } \lambda>0 \tag{2.1}$$

に対して (1.1) はスケール不変となる．すなわち，u を (1.1) の解とするとき，u_λ も (1.1) の解となる．また，$f(u)=e^u$ とするときは, スケール変換

$$u_\lambda(x)=u(\lambda x)+2\log\lambda\quad \text{for } \lambda>0 \tag{2.2}$$

に対して (1.1) はスケール不変となる．これらのスケール変換は

$$u_\lambda(x)=F^{-1}(\lambda^{-2}F(u(\lambda x))). \tag{2.3}$$

により表されることが藤嶋 [5] により指摘されている．実際，$f(u)=u^p$ の場合は

$$F(u)=\frac{1}{p-1}u^{-(p-1)}\quad \text{and}\quad F^{-1}(u)=((p-1)u)^{-1/(p-1)},$$

であり，$f(u)=e^u$ の場合は，$F(u)=e^{-u}$，$F^{-1}(u)=-\log u$ であるので，(2.3) から (2.1), (2.2) が得られる．ここでは，これらのスケール変換の一般化を考える．$w(x)=u(\lambda x)$ と定めると，w は

$$\Delta w+g(w)=0,\quad \text{where } g(w)=\lambda^2 f(w)$$

を満たし，$G(u)=\displaystyle\int_u^\infty \frac{dt}{g(t)}$ と定めると $G(w)=\lambda^{-2}F(u)$ が得られる．これより

$$u_\lambda(x)=F^{-1}(\lambda^{-2}F(u(\lambda x)))=F^{-1}(G(w(x)))$$

が成り立つことがわかる．藤嶋-猪奥 [6] の議論から，一般の関数 $g(u)$ に対して次を示すことができる．

定理 2.1. $f(u), g(u)$ は (f1), (f2) を満たし，$u,w\in C^2(\mathbf{R}^N)$ は $\mathbf{R}^N$ において $u,w>0$,

$$F(u(x))=G(w(x)),\quad x\in\mathbf{R}^N,\quad \text{where } G(u)=\int_u^\infty\frac{dt}{g(t)} \tag{2.4}$$

を満たすとする．このとき，u が

$$\Delta u + f(u) + \frac{|\nabla u|^2}{f(u)F(u)}(q - f'(u)F(u)) = 0 \tag{2.5}$$

を満たすならば w は

$$\Delta w + g(w) + \frac{|\nabla w|^2}{g(w)G(w)}(q - g'(w)G(w)) = 0.$$

を満たす．

定理 2.1 より，方程式 (2.5) は，変換 (2.4) により f を g に入れ替えた方程式に変換されることがわかる．(2.4) において $G = G_q$，ただし

$$G_q(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{g_q(t)}, \quad g_q(u) = \begin{cases} u^p & \text{if } q > 1, \text{where } p = q/(q-1), \\ e^u & \text{if } q = 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

と定めると，$g_q'(w)G_q(w) \equiv q$ より (2.5) は

$$\Delta w + w^p = 0 \quad \text{if } q > 1, \qquad \Delta w + e^w = 0 \quad \text{if } q = 1$$

に変換されることがわかる．

さらに，(2.4) のスケール変換を考える．

定理 2.2. $f(u)$, $g(u)$ は (f1), (f2) を満たし，$\lambda > 0$ とする．$u, w \in C^2(\mathbf{R}^N)$ は $\mathbf{R}^N$ において $u, w > 0$,

$$F(\lambda^{-2}u(y)) = G(w(x)), \quad y = \lambda x \tag{2.7}$$

を満たすとする．このとき，u が $\Delta u + f(u) = 0$ を満たすならば w は

$$\Delta w + g(w) + \frac{|\nabla w|^2}{g(w)G(w)}(f'(u(y))F(u(y)) - g'(w(x))G(w(x))) = 0$$

を満たす．とくに $G = G_q$ ならば w は

$$\Delta w + g(w) + \frac{|\nabla w|^2}{g_q(w)G_q(w)}(f'(u(y))F(u(y)) - q) = 0$$

を満たす．

3. 特異解の一意存在

次の常微分方程式を考える：

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) = 0 \quad \text{for } r > 0. \tag{3.1}$$

方程式 (3.1) の解 $u^*(r)$ が $r \to 0$ において $u^*(r) \to \infty$ を満たすとき $u^*(r)$ を特異解と呼ぶ．$\alpha > 0$ に対して $u(0) = \alpha$, $u'(0) = 0$ を満たす (3.1) の解を $u(r, \alpha)$ と記す．ここでは，方程式 (3.1) の特異解に対する基本的な問題として次を考える：

(i) 特異解 u^* は存在するか? 存在した場合，特異解 u^* は一意か?

(ii) 特異解 $u^*(r)$ の $r \to 0$ における挙動は?

(iii) $\alpha \to \infty$ とした場合，$u(r,\alpha) \to u^*(r)$ は成立するか?

最初に，(2.6) で与えられる g_q に対して $f = g_q$ とした方程式，すなわち

$$w'' + \frac{N-1}{r}w' + g_q(w) = 0 \quad \text{for } r > 0 \tag{3.2}$$

の特異解を考える．$q = p/(p-1) > 1$, $g_q(w) = w^p$ の場合，(3.2) は特異解

$$w^*(r) = Ar^{-2/(p-1)} \quad \text{with } A = \left\{ \frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right\}^{1/(p-1)}.$$

をもつ．一方，$q = 1$, $g_q(w) = e^w$ の場合，(3.2) は特異解

$$w^*(r) = -2\log r + \log 2(N-2)$$

をもつ．これらの解は，いずれの場合も

$$w^*(r) = G_q^{-1}\left(\frac{r^2}{2N-4q} \right)$$

と表される．実際，$g_q(w) = w^p$ ならば，$q = p/(p-1)$, $G_q^{-1}(w) = ((p-1)w)^{-1/(p-1)}$, $g_q(w) = e^w$ ならば $q = 1$, $G_q^{-1}(w) = -\log w$ より容易に確認できる．

定理 2.1 に従って，$F(u^*(r)) = G_q(w^*(r))$ により u^* を定めると

$$G_q(w^*(r)) = G_q(G_q^{-1}(r^2/(2N-4q))) = r^2/(2N-4q)$$

より，u^* は

$$u^*(r) = F^{-1}\left(\frac{r^2}{2N-4q} \right)$$

で与えられ，$u^*(|x|)$ は $\lim_{|x|\to 0} u^*(|x|) = \infty$,

$$\Delta u^* + f(u^*) + \frac{|\nabla u^*|^2}{F(u^*)f(u^*)}(q - f'(u^*)F(u^*)) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \tag{3.3}$$

を満たす．(1.2) より $|x| \to 0$ において $q - f'(u^*)F(u^*) \to 0$. よって形式的ではあるが，(3.1) の特異解の $r = 0$ における漸近形は u^* で与えられることが期待できる．

臨界 Sobolev 指数 $p_S = (N+2)/(N-2)$ の Hölder 共役指数を q_S と記す．すなわち，$q_S = (N+2)/4$. Sobolev 優臨界 $p > p_S$ には $q < q_S$ が対応する．次が得られる．

定理 3.1. ([21]) (f1), (f2) を仮定し $q < q_S$ とする．このとき，(3.1) は特異解 $u^*(r)$ を一意にもち，u^* は次を満たす：

$$u^*(r) = F^{-1}\left[\frac{r^2}{2N-4q}(1 + o(1)) \right] \qquad \text{as } r \to 0. \tag{3.4}$$

さらに，ある $r_0 > 0$ に対して次が成り立つ.

$$u(r,\alpha) \to u^*(r) \quad \text{in } C^2_{\mathrm{loc}}(0,r_0] \quad \text{as } \alpha \to \infty.$$

定理 3.1 の証明の概略. 仮定 (f1), (f2) のもとで，次の形をもつ (3.1) の特異解を考える:

$$u^*(r) = F^{-1}\left[\frac{r^2 e^{-x(t)}}{2N-4q}\right] \quad \text{with } t = -\log r. \tag{3.5}$$

このとき u^* が (3.1) の解であるための必要十分条件は $x(t)$ が次を満たすことである:

$$x'' - ax' + b(e^x - 1) + (q-1)(x')^2 + (f'(u)F(u) - q)(x'+2)^2 = 0, \tag{3.6}$$

ここで，$a = N+2-4q$, $b = 2N-4q$．証明では，u^* が (3.1) の特異解であれば (3.5) で与えられる x は $t \to \infty$ において $x(t) \to 0$ を満たすこと，$t \to \infty$ において $x(t) \to 0$ となる (3.6) の解は一意であることを示す．これにより，(3.1) の特異解の一意性が得られる．特異解の存在の証明では，次の補題（no-needle property）を Pohozaev の恒等式を用いて示す：

補題 3.1. ある $\eta \in (0,1)$ が存在し，十分に大きい $\beta > 0$ に対して，次を満たす $r_\beta > 0$ が存在する：

$$\alpha > \frac{\beta}{\eta} \quad \text{ならば} \quad u(r,\alpha) > \beta \quad \text{for } 0 < r \le r_\beta.$$

$\alpha_k \to \infty$ を満たす $\{\alpha_k\}$ に対して $\{u(r,\alpha_k)\}$ が収束部分列をもつことを示し，この補題により，その極限関数が特異解となることを示す. □

特異解の原点における挙動は (3.5) で与えられるが，$f(u) = \exp(g(u))$ の形で与えられる場合，次の結果が得られる.

定理 3.2. $f(u) = \exp(g(u))$ とする.

(i) $g(u) = u^p$, $p > 0$, の場合

$$u^*(r) = \left(-2\log r - \frac{p-1}{p}\log(-2\log r) + \log\frac{2N-4}{p} + o(1)\right)^{1/p} \quad \text{as } r \to 0.$$

(ii) $g(u) = \exp(u)$ の場合

$$u^*(r) = \log\Big(-2\log r + \log(2N-4) - \log(-2\log r)\Big) + o(1) \quad \text{as } r \to 0.$$

(iii) $g(u)=\exp(e^u)$ の場合

$$u^*(r)=\log^2\Bigl(-2\log r+\log(2N-4)-\sum_{k=1}^{2}\log^k(-2\log r)\Bigr)+o(1)\quad \text{as } r\to 0,$$

ここで，$\log^1 u=\log u$ and $\log^2 u=\log(\log u)$ とする．

注意. これらの展開式は Kikuchi-Wei [14], Ghergu-Goubet [10] で得られているものと一致する．

4. 分岐問題

4.1. 非線形固有値問題

方程式 (1.1) に対応する非線形固有値問題を考える:

$$\begin{cases} \Delta w+\lambda f(w)=0 & \text{in } B,\\ w>0 & \text{in } B,\\ w=0 & \text{on } \partial B, \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，$\lambda>0$ をパラメータとし，$B\subset \mathbf{R}^N$ を単位球領域，$N\ge 3$ とする．非線形項 $f(u)$ は滑らかな非負の増大する関数とする．このとき，Gidas-Ni-Nirenberg [11] の定理から，古典解は球対称解となるので，(4.1) は次の ODE の正値解の問題に帰着される．

$$\begin{cases} w''+\dfrac{N-1}{s}w+\lambda f(w)=0 \quad \text{for } 0<s<1,\\ \qquad w'(0)=0,\quad w(1)=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

この分岐図式は解の L^∞ ノルム（すなわち $w(0)=\alpha$) でグラフ表示できる．実際，変数変換 $r=\sqrt{\lambda}s$, $u(r)=w(s)$ により，u は次の問題の解として得られる：

$$\begin{cases} u''+\dfrac{N-1}{r}u+f(u)=0 \quad \text{for } 0<r<\sqrt{\lambda},\\ \qquad u'(0)=0,\quad u(\sqrt{\lambda})=0. \end{cases}$$

したがって，$\alpha>0$ に対して初期値問題

$$\begin{cases} u''+\dfrac{N-1}{r}u+f(u)=0 \quad \text{for } r>0,\\ \qquad u'(0)=0,\quad u(0)=\alpha, \end{cases} \tag{4.3}$$

の解を $u(r,\alpha)$，その最初の零点を $r_0(\alpha)$ と記し，

$$\lambda(\alpha)=r_0(\alpha)^2,\quad w(s,\alpha)=u(r,\alpha),\quad r=\sqrt{\lambda(\alpha)},$$

とおくと，$(\lambda(\alpha),w(s,\alpha))$ は (4.2) の解となる．ここで，$\|w(\cdot,\alpha)\|_{L^\infty}=w(0,\alpha)=\alpha$ より，$(\lambda(\alpha),\alpha)\subset\mathbf{R}^2$ が (4.2) の分岐図式となる.（詳しくは，[15], [17] を参照）．以下，$\lambda(\alpha)$ のグラフの形状を調べる．

4.2. Joseph-Lundgren の研究

$f(u)=e^u$ の場合，(4.1) は Gel'fand 問題と呼ばれ，Gel'fand [9], Joseph-Lundgren [13] によって次が示された．

定理 A. ([9, 13]) $f(u)=e^u$ の場合，(4.1) は特異解 $(\lambda^*,u^*)=(2(N-2),-2\log r)$ をもち，$\lambda(\alpha)$ は $\lambda(0)=0$, $\lim_{\alpha\to\infty}\lambda(\alpha)=\lambda^*$ を満たす．さらに次が成り立つ．

(i) $3\le N\le 9$ ならば $\alpha\to\infty$ において $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りで振動する．したがって $\lambda=\lambda^*$ で正値球対称解を無限個もつ．

(ii) $N\ge 10$ ならば $\lambda(\alpha)$ は狭義単調増加である．したがって $0<\lambda<\lambda^*$ ならばただ 1 つの正値球対称解をもつ．

[13] では，$f(u)=(u+1)^p$ の場合も研究されている．指数 p_S と p_{JL} を次で定める．

$$p_S=\frac{N+2}{N-2},\quad p_{JL}=\begin{cases}1+\dfrac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N\ge 11,\\ \infty, & 3\le N\le 10.\end{cases}$$

指数 p_{JL} は Joseph-Lundgren の指数と呼ばれ，空間次元 $N\ge 11$ で現れる．以下，$p_S<p<p_{JL}$ は，$3\le N\le 10$ ならば $p>p_S$ を意味するものとする．

定理 B. ([13]) $f(u)=(u+1)^p$ とすると，(4.1) は正値特異解

$$(\lambda^*,u^*)=\left(\frac{2}{p-1}\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right),r^{-\frac{2}{p-1}}-1\right).$$

をもち，$\lambda(\alpha)$ は $\lambda(0)=0$, $\lim_{\alpha\to\infty}\lambda(\alpha)=\lambda^*$ を満たす．さらに次が成り立つ．

(i) $p_S<p<p_{JL}$ ならば $\alpha\to\infty$ において $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りで振動する．

(ii) $N\ge 11$ かつ $p\ge p_{JL}$ ならば $\lambda(\alpha)$ は狭義単調増加である．

(4.1) において $f(u)=e^u$ と $f(u)=(u+1)^p$ の場合は，完全な分岐図式が得られる数少ない例であり，この分野を牽引する重要な先行研究となった．これらの結果は，ある変数変換により (4.1) を自励系に帰着し，相平面解析の手法を用いて示されるため，$f(u)=e^u$, $(u+1)^p$ 以外の非線形項をもつ問題への拡張は難しい．一方，$f(u)=u+u^p$ および $f(u)=u^p+g(u)$（$g(u)$ は低階項）の場合が，[2, 3, 12, 16] および [17, 19, 20] 等により研究されている．ここでは，(f1), (f2) を満たす場合を考える．

4.3. 分岐曲線の収束性

定理 3.1 により，非線形固有値問題 (4.1) の特異解の一意存在および古典解の特異解への収束を示すことができる．

定理 4.1. (f1), (f2) を仮定し $q < q_S$ とする．このとき，(4.1) は一意に球対称特異解 (λ^*, w^*) をもつ．さらに，(4.1) の解 $(\lambda(\alpha), w(r,\alpha))$ は次を満たす：

$$\lambda(\alpha) \to \lambda^* \quad \text{and} \quad w(r,\alpha) \to w^*(r) \quad \text{in } C^2_{\mathrm{loc}}(0,1] \quad \text{as } \alpha \to \infty.$$

4.4. 分岐曲線の性質：振動するための条件

Joseph-Lundgren 指数 p_{JL} の Hölder 共役指数を q_{JL} と記す．すなわち

$$q_{JL} = \frac{N - 2\sqrt{N-1}}{4}, \quad N \geq 10.$$

（$N = 10$ では $p_{JL} = \infty$ より，便宜上 $q_{JL} = 1$ と定めている.）$\lambda(\alpha)$ の挙動に関して，次の結果が得られる.

定理 4.2.([18]) (f1) と (f2) を仮定する．ただし，q は

$$1 \leq q < q_S \quad \text{if } 3 \leq N \leq 9, \qquad q_{JL} < q < q_S \quad \text{if } N \geq 10 \tag{4.4}$$

を満たすとする．このとき $\lambda(\alpha)$ は $\alpha \to \infty$ において λ^* の周りを無限回振動する.

定理 4.2 を示すため，(2.6) で与えられる g_q に対して初期値問題

$$\begin{cases} z'' + \dfrac{N-1}{s} z' + g_q(z) = 0 \quad \text{for } s > 0, \\ \qquad z(0) = \sigma, \quad z'(0) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

を考える．ここで，$\sigma \in \mathbf{R}$, ただし $q > 1$ の場合は $\sigma > 0$ とする．(4.5) の解を $z(s,\sigma)$ と記し，(4.5) の方程式の特異解を $z^*(s)$ と記す．q が (4.4) を満たすことは，$g_q(z) = e^z$ $(q = 1)$ の場合は $3 \leq N \leq 9$ であり，$g_q(z) = z^p$ $(q = p/(p-1) > 1)$ の場合は $N \geq 3$, $q_S < p < p_{JL}$ であることが対応している．したがって [25], [24] により次が得られる.

補題 4.1. q は (4.4) を満たすとする．このとき，$z(s,\sigma)$ と $z^*(s)$ は $s > 0$ において無限個の交点をもつ.

定理 4.2 の証明の概略. 初期値問題 (4.3) の解を $u(r,\alpha)$ と表し，その最初の零点を $r_0(\alpha)$ と記す．先に述べたように $\lambda(\alpha) = r_0(\alpha)^2$ より，$\alpha \to \infty$ とするとき $r_0(\alpha)$ が振動することを示せばよい．G_q を (2.6) により与え，$w(s,\alpha)$ を次で定める：

$$w(s,\alpha) = G_q^{-1}(\lambda^{-2} F(u(r,\alpha))) \quad \text{with } s = \frac{r}{\lambda} \quad \text{and} \quad \lambda = \sqrt{\frac{F(\alpha)}{G_q(1)}}. \tag{4.6}$$

このとき，$u(r,\alpha)$ と $w(s,\alpha)$ は次を満たす：

$$\frac{G_q(w(s,\alpha))}{G_q(1)} = \frac{F(u(r,\alpha))}{F(\alpha)}.$$

この関係式と定理 2.2 より $w(s) = w(s, \alpha)$ は次を満たすことがわかる：

$$(4.7)\qquad \begin{cases} w'' + \dfrac{N-1}{s} w' + g_q(w) + \dfrac{f'(u(r,\alpha))F(u(r,\alpha)) - q}{g_q(w(s))G_q(w(s))} w'(s)^2 = 0 \quad \text{for } s > 0, \\ w(0) = 1 \quad \text{and} \quad w'(0) = 0. \end{cases}$$

ここで，$|w'(s)|$, $g_q(w)G_q(w)$ の α に依存しない評価を得ることにより，(4.7) の方程式の $\alpha \to \infty$ における極限方程式が

$$w'' + \frac{N-1}{s} w' + g_q(w) = 0$$

であり．したがって $w(s, \alpha)$ が (4.5) の解 $z(s, 1)$ に収束することが得られる．すなわち適当な $S > 0$ に対して

$$(4.8)\qquad w(s, \alpha) \to z(s, 1) \quad \text{in } C[0, S] \quad \text{as } \alpha \to 0$$

が成立する．一方，定理 3.1 より (4.3) の方程式は特異解 $u^*(r)$ をもち

$$F(u^*(r)) = \frac{r^2}{2N - 4q}(1 + \theta(r)), \quad \theta(r) = o(1)$$

を満たす．$w^*(s, \alpha)$ を次で定める：

$$(4.9)\qquad w^*(s, \alpha) = G_q^{-1}(\lambda^{-2} F(u^*(r))) \quad \text{with } s = \frac{r}{\lambda} \quad \text{and} \quad \lambda = \sqrt{\frac{F(\alpha)}{G_q(1)}}.$$

このとき

$$\begin{aligned} w^*(s, \alpha) &= G_q^{-1}\left(\frac{s^2}{2N - 4q}(1 + \theta(\lambda s))\right) \\ &= \begin{cases} -2\log s + \log(2N - 4) - \log(1 + \theta(\lambda s)) & \text{if } q = 1, \\ A s^{-2/(p-1)}(1 + \theta(\lambda s))^{-1/(p-1)} & \text{if } q = \frac{p}{p-1} > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる．ここで，$\alpha \to \infty$ とするとき $\lambda \to 0$ より，$S > 0$ に対して

$$(4.10)\qquad w^*(s, \alpha) \to z^*(s) \quad \text{in } C[0, S] \quad \text{as } \alpha \to \infty.$$

が得られる．$S > 0$ を適当に選ぶと，(4.8), (4.10) と補題 4.1 より，$\alpha \to \infty$ において $w(s, \alpha)$ と $w^*(s, \alpha)$ が与えられた個数の交点をもつことを示すことができる．このとき，(4.6) と (4.9) により，$u(r, \alpha)$ と $u^*(r)$ も同じ個数の交点をもつ．したがって，$u(r, \alpha)$ と $u^*(r)$ の交点数は，$\alpha \to \infty$ のとき無限大になり，これにより $u(r, \alpha)$ の最初の零点 $r_0(\alpha)$ は $u^*(r)$ の零点の周りを振動することが示される． □

4.5. 分岐曲線の性質：単調であるための条件

次に，$\lambda(\alpha)$ が単調増加であるための条件を考える．(4.1) を 一般領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ で非線形項 f が次を満たす場合を考える：

$$f(u) \text{ は，} u \geq 0 \text{ で連続，正値，狭義単調増加，下に凸，} \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty.$$

このとき，(4.1) は $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において最小解 (λ, u_λ) からなる分岐の枝をもち，$\lambda > \overline{\lambda}$ において古典解をもたないような $\overline{\lambda} > 0$ が存在する．さらに，$\lambda \mapsto u_\lambda(x)$ は各点 $x \in \Omega$ で単調非減少かつ連続であり，$\overline{u}(x) = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} u_\lambda(x)$ で定められる $\overline{u}$ は (4.1) の弱解となる．この $\overline{u}$ は，極解（extremal solution）と呼ばれる．$\Omega = B$ の場合は，分岐の枝が $\lambda = \lambda(\alpha)$ と $\alpha = \|u_\lambda\|_{L^\infty}$ でグラフ表示されるため，極解が非有界（特異解）であることと，$\lambda(\alpha)$ が単調増加であること（折り返し点をもたないこと）は同値となる．Brezis-Vázquez [1] により，$\lambda(\alpha)$ が単調増加であるための必要十分条件は，特異解 (λ^*, u^*) が

$$\lambda^* \int_\Omega f'(u^*(x))\phi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx \quad \text{for all } \phi \in C_0^1(\Omega) \tag{4.11}$$

を満たすことが得られている．しかしながら，(4.11) を確認するためには特異解 (λ^*, u^*) の具体的な表示が必要となる．[22] では，f のみから判定できる十分条件を得た．

定理 4.3. ([22]) $N \geq 10$ とし，$u \geq 0$ に対して

$$f(u) > 0,\ \ f'(u) > 0,\ \ f''(u) > 0 \quad \text{かつ} \quad F(u) < \infty, \tag{4.12}$$

および (f2) を仮定し $q \leq q_{JL}$ とする．さらに，次を満たす定数 q_1, q_2 が存在するとする:

$$0 \leq q_1 \leq F(u)f'(u) \leq q_2 \quad \text{for } u \geq 0, \tag{4.13}$$

$$q_2(2N - 4q_1) \leq \frac{(N-2)^2}{4}. \tag{4.14}$$

このとき $\lambda(\alpha)$ は $\alpha > 0$ で狭義単調増加である．

注意. (i) $f(u) = e^u$ の場合，$F(u)f'(u) \equiv 1$ より $q_1 = q_2 = 1$ は (4.13) を満たす．このとき (4.14) は

$$q_2(2N - 4q_1) = 2(N-2) \leq \frac{(N-2)^2}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad N \geq 10.$$

$f(u) = (u+1)^p$ の場合は，$F(u)f'(u) \equiv \frac{p}{p-1} =: q$ より $q_1 = q_2 = q$ は (4.13) を満たす．(4.14) は

$$q_2(2N - 4q_1) = 2q(N-2q) \leq \frac{(N-2)^2}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad p \geq p_{JL}.$$

したがって $f(u)=e^u$, $(u+1)^p$ の場合，定理 A, B から定理 4.3 の仮定は最良であることがわかる．

(ii) $N=10$, $q=1$ の場合に (2.13), (2.14) を満たす定数は $q_1=q_2=1$ に限られ，そのため定理 4.3 を適用できる非線形項は $f(u)=e^{au+b}$ の形に限定される．一般に，$q=q_{JL}$ $(N\geq 10)$ の場合は，同様の議論により定理 4.3 を適用できる非線形項は限定される．

臨界 $q=q_{JL}$ の場合，次の結果が得られる．

定理 4.4. ([22]) $N\geq 10$ とし，$u\geq 0$ において (4.12) および (f2) を仮定し $q=q_{JL}$ とする．$u\geq 0$ に対して $F(u)<1$ とし，次を仮定する：

$$q_{JL}\leq f'(u)F(u)\leq q_{JL}+\frac{\mu_0}{(\log F(u))^2}\quad \text{for } u\geq 0,$$

ここで，

$$\mu_0=\frac{1}{2N-4q_{JL}}=\frac{1}{N+2\sqrt{N-1}}.$$

とする．このとき $\lambda(\alpha)$ は $\alpha>0$ で狭義単調増加である．

注意. $q=q_{JL}$ の場合，$u>0$ において $f'(u)F(u)<q_{JL}$ を満たす f に対する判定条件は，残念ながら得られていない．

先述したように，(4.3) の解 $u(r,\alpha)$ の最初の零点 $r_0(\alpha)$ に対して $\lambda(\alpha)=r_0(\alpha)^2$ であるので，定理 4.3, 4.4 の証明では，$r_0(\alpha)$ が $\alpha>0$ について単調であることを示せばよい．次の補題を用いる：

補題 4.2. ([22]) ある $\hat{v}\in C^2(0,R]$ が存在し

$$\begin{cases} \hat{v}''+\dfrac{N-1}{r}\hat{v}'+f(\hat{v})\geq 0 \quad \text{for } 0<r\leq R, \\ \hat{v}(r)>0 \ \text{ for } 0<r<R \quad \text{and} \quad \hat{v}(R)=0, \\ \hat{v}(r)\to\infty, \quad |\hat{v}'(r)|\to\infty \quad \text{as } r\to 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

を満たすとする．また，$Q\in C(0,R]$ は

$$f'(\hat{v}(r))\leq Q(r)\quad \text{for } 0<r\leq R$$

を満たし，さらに線形方程式

$$Z''+\frac{N-1}{r}Z'(r)+Q(r)Z=0\quad \text{for } 0<r\leq R, \tag{4.16}$$

は $r\to 0$ において $r^{N-1}\hat{v}(r)Z'(r)\to 0$, $r^{N-1}\hat{v}'(r)Z(r)\to 0$ を満たす正値解 $Z(r)$ をもつとする．このとき，(4.3) の解 $u(r,\alpha)$ の最初の零点 $r_0(\alpha)$ は，$\alpha>0$ について狭義単調増加となる．

定理 4.3 の証明の概略. 関数 $\hat{v} \in C^2(0,R]$ を

$$\hat{v}(r) = F^{-1}\left(\frac{r^2}{2N-4q_1}\right) \quad \text{for } 0<r\le R, \quad R=\sqrt{(2N-4q_1)F(0)},$$

により定めると $\hat{v}$ は $\hat{v}(R)=0$ を満たし，3 節の議論より

$$\hat{v}'' + \frac{N-1}{r}\hat{v}' + f(\hat{v}) + \frac{q_1 - F(\hat{v})f'(\hat{v})}{F(\hat{v})f(\hat{v})}(\hat{v})^2 = 0 \quad \text{for } 0<r\le R$$

を満たす．したがって，(4.13) より (4.15) を満たす．次に $Q(r)$ を

$$Q(r) = \frac{(N-2)^2}{4r^2} \quad \text{for } r>0.$$

により定めると (4.16) は正値解 $Z(r) = r^{-(N-2)/2}$ をもつ．$f'(u)F(u) \le q_2$, (4.14) より

$$f'(\hat{v}(r)) \le \frac{q_2}{F(\hat{v}(r))} = \frac{q_2(2N-4q_1)}{r^2} \le \frac{(N-2)^2}{4r^2} = Q(r) \quad \text{for } 0<r<R.$$

が得られ，補題 4.2 より $r_0(\alpha)$ の単調性が得られる． □

定理 4.4 の証明の概略. 関数 $\hat{v} \in C^2(0,R]$ を

$$\hat{v}(r) = F^{-1}\left(\frac{r^2}{2N-4q_{JL}}\right) \quad \text{for } 0<r\le R, \quad R=\sqrt{(2N-4q_{JL})F(0)},$$

により定めると，定理 4.3 の証明での議論と同様に $\hat{v}$ は (4.15) を満たすことを示すことができる．さらに $\hat{v}$ は

$$\log F(\hat{v}(r)) = \log\frac{r^2}{2N-4q_{JL}} = 2(\log r - \log \hat{R}), \quad \hat{R} = \sqrt{2N-4q_{JL}}, \tag{4.17}$$

を満たす．$\hat{R} = \sqrt{2N-4q_{JL}} > R$ に注意し，$Q(r)$ を次で定める：

$$Q(r) = \frac{(N-2)^2}{4r^2} + \frac{1}{4r^2(\log r - \log \hat{R})^2} \quad \text{for } 0<r\le R.$$

このとき (4.16) は，次の正値解 $Z(r)$ をもつ：

$$Z(r) = r^{-(N-2)/2}(-\log r + \log \hat{R})^{1/2} \quad \text{for } 0<r\le R.$$

ここで，(4.17) および $q_{JL}(2N-4q_{JL}) = (N-2)^2/4$ に注意すると，$0<r\le R$ において

$$\begin{aligned} f'(\hat{v}(r)) &\le \frac{1}{F(\hat{v}(r))}\left(q_{JL} + \frac{\mu_0}{(\log F(\hat{v}(r)))^2}\right) \\ &\le \frac{q_{JL}(2N-4q_{JL})}{r^2} + \frac{(2N-4q_{JL})\mu_0}{4r^2(\log r - \log \hat{R})^2} \\ &= \frac{(N-2)^2}{4r^2} + \frac{1}{4r^2(\log r - \log \hat{R})^2} = Q(r) \end{aligned}$$

が得られ，補題 4.2 より $r_0(\alpha)$ の単調性が得られる． $\square$

4.6. Super-exponential case への応用

定理 4.1–4.4 の応用として $f(u) = \exp(g(u))$ の場合を考える．$e_n(u)$ $(n \geq 1)$ を

$$e_1(u) = e^u, \quad e_n(u) = \exp(e_{n-1}(u)) \quad \text{for } n \geq 2,$$

により定めると (1.3) で与えられる $f(u)$ は $\exp(e_n(u))$ と表される．$f(u) = \exp(g(u))$ の場合，

$$\frac{f'(u)^2}{f(u)f''(u)} = \frac{1}{1 + \frac{g''(u)}{g'(u)^2}}$$

より，$g(u)$ が $(u+1)^p$ あるいは $e_n(u)$ ならば (f2) が $q = 1$ として成り立つ．さらに

$$q_1 \leq \frac{f'(u)^2}{f(u)f''(u)} \leq q_2 \quad \text{for } u > 0,$$

ならば

$$q_1 \leq f'(u)F(u) \leq q_2 \quad \text{for } u > 0$$

が成り立つことから，次が得られる．

定理 4.5. ([22]) (4.1) において $f(u) = \exp(g(u))$ とし，$g(u) = (u+1)^p$, $p > 1$, あるいは $g(u) = e_n(u)$, $n \geq 1$, とする．このとき次が成り立つ．

(i) $3 \leq N \leq 9$ ならば $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りを無限回振動する．

(ii) $N \geq 11$ ならば $\lambda(\alpha)$ は $\alpha > 0$ において狭義単調増加である．

注意. (i) 定理 4.5 における分岐曲線の挙動は，古典的な Gel'fand 問題

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \quad \text{for } N \geq 3$$

における挙動と，$N = 10$ を除いて一致する．

(ii) これらの問題において $N = 10$ の場合は，f は

$$f'(u)F(u) < 1 \quad \text{and} \quad f'(u)F(u) \to 1 \quad \text{as } u \to \infty$$

を満たすため，判定条件は得られていない．

References

[1] H. Brezis and J. Vázquez, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997), 443–469.

[2] C. Budd, C and J. Norbury, Semilinear elliptic equations and supercritical growth, J. Differential Equations **68** (1987), 169–197.

[3] J. Dolbeault and I. Flores, Geometry of phase space and solutions of semilinear elliptic equations in a ball, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 4073–4087.

[4] L. Dupaigne and A. Farina, Stable solutions of $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbf{R}^N$, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), 855–882.

[5] Y. Fujishima, Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), 4617–4645.

[6] Y. Fujishima and N. Ioku, Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term, J. Math. Pures Appl. **118** (2018), 128–158.

[7] Y. Fujishima and N. Ioku, Global in time solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure, Partial Differ. Equ. Appl. **3** (2022) No. 23, 32 pp.

[8] Y. Fujishima and N. Ioku, Quasi self-similarity and its application to the global in time solvability of a superlinear heat equation, Nonlinear Anal. **236** (2023) Paper No. 113321, 18 pp.

[9] I. M. Gel'fand, Some problems in the theory of quasilinear equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **29** (1963), 295–381.

[10] M. Ghergu and O. Goubet, Singular solutions of elliptic equations with iterated exponentials, J. Geom. Anal. **30** (2020), 1755–1773.

[11] B. Gidas, W.-M. Ni, and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[12] Z. Guo and J. Wei, Global solution branch and Morse index estimates of a semilinear elliptic equation with super-critical exponent, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 4777–4799.

[13] D.D. Joseph and T.S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73), 241–269.

[14] H. Kikuchi and J. Wei, A bifurcation diagram of solutions to an elliptic equation with exponential nonlinearity in higher dimensions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **148** (2018), 101–122.

[15] P. Korman, Solution curves for semilinear equations on a ball, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1997–2005.

[16] F. Merle and L. Peletier, Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **118** (1991), 49–62.

[17] Y. Miyamoto, Structure of the positive solutions for supercritical elliptic equations in a ball, J. Math. Pures Appl. **102** (2014), 672–701.

[18] Y. Miyamoto, A limit equation and bifurcation diagrams for semilinear elliptic equations with general supercritical growth, J. Differential Equations **264** (2018), 2684–2707.

[19] Y. Miyamoto and Y. Naito, Singular extremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball, J. Differential Equations **265** (2018), 2842–2885.

[20] Y. Miyamoto and Y. Naito, Fundamental properties and asymptotic shapes of the singular and classical radial solutions for supercritical semilinear elliptic equations, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **27** (2020), Article 52.

[21] Y. Miyamoto and Y. Naito, Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth, Ann. Mat. Pura Appl. **202** (2023), 341–366.

[22] Y. Miyamoto and Y. Naito, A bifurcation diagram of solutions to semilinear elliptic equations with general supercritical growth, J. Differential Equations **406** (2024), 318–337.

[23] F. Takahashi, Topics of stable solutions to elliptic equations, Sugaku Expositions **34** (2021), 35–59. （日本語）数学 **69** (2017), 31–55.

[24] J. I. Tello, Stability of steady states of the Cauchy problem for the exponential reaction-diffusion equation, Math. Anal. Appl. **324** (2006), 381–396.

[25] X. Wang. On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 549–590.