構造保存型差分解法の エネルギー法

吉川　周二

日本数学会　2018年年会

於 東京大学

平成３０年３月２０日

科研費 KAKENHI

国立大学法人 大分大学 OITA UNIVERSITY

目次

1. はじめに

1. はじめに

要旨では偏微分方程式を例に説明していますが, 時間の都合上今日は常微分方程式を例にしてお話します. そのため要旨の使用は参考文献の引用にとどめ, <u>要旨と異なる流れ</u>でお話します.

スライド資料:
http://lab.ms.oita-u.ac.jp/yoshikawa/siryo/MSJ.pdf

要旨の訂正:
[14] S. Yoshikawa, Remarks on energy method for structure -preserving finite difference schemes –small data global existence and unconditional error estimate—

1. はじめに

目的:偏微分方程式のエネルギー法を差分解法に適用した一般理論の構築

構造保存型差分解法の多くは陰解法なので, 解の存在も自明ではない. エネルギー法を用いて, <u>解の存在</u>や<u>誤差評価</u>を示す.

キーワード:時間大域的な結果

…リマインダー

２．構造保存型差分解法と差分商の性質

２．構造保存型差分解法と差分商の性質

構造保存型差分解法 :ここではエネルギー保存やエントロピー増大などの物理法則を継承する差分解法.

例1. $u=u(t)$に対して
$$\partial_t u = -u^3$$

方程式の両辺に$\partial_t u$をかけると
$$\partial_t\left(\frac{1}{4}u^4\right)+|\partial_t u|^2=0$$
をみたす, 両辺を0からtまで積分すると,
$$\frac{1}{4}|u(t)|^4+\int_0^t|\partial_t u(s)|^2ds=\frac{1}{4}|u(0)|^4$$
をみたす.

2. 構造保存型差分解法と差分商の性質

構造保存型差分解法

$U^{(n)}$: $u(n\Delta t)$に対応する数値解
Δt: 時間tに対する刻み幅

$\partial_t u = -u^3$ （$\times\, \partial_t u$） $\Rightarrow$
$\partial_t\left(\frac{1}{4}u^4\right) + |\partial_t u|^2 = 0,$
$\frac{1}{4}|u(t)|^4 + \int_0^t |\partial_t u(s)|^2 ds = \frac{1}{4}|u(0)|^4$

例1d. $U^{(n)}$に対して

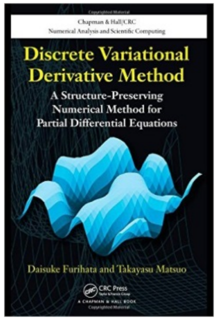
$$\delta_n^+ U^{(n)} = -\frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{3}\left(U^{(n+1)}\right)^{3-\ell}\cdot\left(U^{(n)}\right)^{\ell}, \qquad \delta_n^+ U^{(n)} := \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t}$$

方程式の両辺に$\delta_n^+ U^{(n)}$をかけると$(\because (a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4)$

$$\delta_n^+\left(\frac{1}{4}\left(U^{(n)}\right)^4\right) + \left|\delta_n^+ U^{(n)}\right|^2 = 0$$

をみたす, 両辺$n = 0$から$(n-1)$まで和を取ると,

$$\frac{1}{4}\left(U^{(n)}\right)^4 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\left|\delta_n^+ U^{(\ell)}\right|^2 \Delta t = \frac{1}{4}\left(U^{(0)}\right)^4$$



２. 構造保存型差分解法と差分商の性質

構造保存型差分解法

例2. $u = u(t)$に対して

$$\partial_t u = \sin u$$

方程式の両辺に$\partial_t u$をかけると

$$\partial_t \cos u + |\partial_t u|^2 = 0$$

をみたす, 両辺を0からtまで積分すると,

$$\cos u\,(t) + \int_0^t |\partial_t u(s)|^2 ds = \cos u(0)$$

定義2.1.(差分商) 差分商$\frac{\partial F}{\partial(U,V)}$を次で定義する;

$$\frac{\partial F}{\partial(U,V)} := \begin{cases} \dfrac{F(U) - F(V)}{U - V}, & U \neq V, \\ F'(V), & U = V. \end{cases}$$

2. 構造保存型差分解法と差分商の性質

構造保存型差分解法

$$\frac{\partial F}{\partial(U,V)} := \begin{cases} \dfrac{F(U)-F(V)}{U-V}, & U \neq V, \\ F'(V), & U = V. \end{cases}$$

注意. $F(u) := u^4/4$ に対して

$$\frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)},U^{(n)}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{3}\left(U^{(n+1)}\right)^{3-\ell}\cdot\left(U^{(n)}\right)^{\ell}$$

例2d. $F(u) := \cos u$ に対して

$$\delta_n^+ U^{(n)} = \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)},U^{(n)}\right)}, \qquad \delta_n^+ U^{(n)} := \frac{U^{(n+1)}-U^{(n)}}{\Delta t}$$

先程と全く同じ議論から

$$\cos U^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\left|\delta_n^+ U^{(\ell)}\right|^2 \Delta t = \cos U^{(0)}$$

差分商を用いれば, 多項式型以外の一般の非線形項も取り扱える.

２．構造保存型差分解法と差分商の性質

差分商の性質

補題2.1

$$\inf F' \leq \frac{\partial F}{\partial(U,V)} \leq \sup F'$$

$$\frac{\partial F}{\partial(U,V)} := \begin{cases} \dfrac{F(U)-F(V)}{U-V}, & U \neq V, \\ F'(V), & U = V. \end{cases}$$

縮小写像の方法で解の存在を示すときや, 誤差評価を考えるとき, 差分商同士の差がしばしばあらわれる. そのため二階差分商の一種である$\overline{F}''$を以下のように定義する;

定義2.2(平均二階差分).

$$\overline{F}''(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}) := \frac{\partial}{\partial(\xi,\tilde{\xi})}\left(\frac{\partial F}{\partial(\cdot,\eta)} + \frac{\partial F}{\partial(\cdot,\tilde{\eta})}\right)$$

2．構造保存型差分解法と差分商の性質

差分商の性質

補題2.2.　$F \in C^2$とする．$\overline{F}''$は以下を満たす;

(i) $\dfrac{\partial F}{\partial(\xi,\eta)} - \dfrac{\partial F}{\partial(\tilde{\xi},\tilde{\eta})}$

$$= \frac{1}{2}\overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right)\cdot\left(\xi-\tilde{\xi}\right) + \frac{1}{2}\overline{F}''\left(\eta,\tilde{\eta};\xi,\tilde{\xi}\right)\cdot(\eta-\tilde{\eta})$$

(ii) $\inf F'' \le \overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right) \le \sup F''$

証明. [12](, [14])参照.

$$\overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right) := \frac{\partial}{\partial\left(\xi,\tilde{\xi}\right)}\left(\frac{\partial F}{\partial(\cdot,\eta)} + \frac{\partial F}{\partial(\cdot,\tilde{\eta})}\right)$$

３．エネルギー法

3. エネルギー法

エネルギー法

（運動方程式）×（速度） ⇨ エネルギー保存則

⇩ 一般化

（微分方程式）×（未知関数やその導関数） ⇨ アプリオリ評価

一般に「未知関数を方程式に乗ずる」ことで微分方程式の解の諸性質を導くことをエネルギー法と呼ぶ.

例（狭義のエネルギー法）. エネルギークラスで時間局所解を構成し, エネルギー保存則（アプリオリ評価）から解を時間大域的に延長する.

３．エネルギー法

エネルギー法

適切性（well-posedness）:
①解の存在　②一意性　③初期値連続依存性（時に④持続性）

縮小写像原理で時間局所解を構成すると「②一意性」はほぼ自動的に従う. それだけでなく「③連続依存性」もほぼ付随して示せることが多い.
連続依存性と誤差評価は見た目が似ているので, エネルギー法で解の存在だけでなく誤差評価まで示せそうである（期待）.

３．エネルギー法

（１）時間大域解の存在

(Large Data Global Existence とSmall Data Global Existence)

３．エネルギー法

例3．常微分方程式：

$$\partial_t u + u + a u^3 = 0, \qquad u(0) = u_0 \quad a = \pm 1 \quad (Ex)_\pm$$

アプリオリ評価

方程式$(Ex)_\pm$の両辺に$\partial_t u$をかけると,

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{a}{4} u^4 \right) + |\partial_t u|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{a}{4} u^4 \right)(t) + \int_0^t |\partial_t u(s)|^2 ds = \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{a}{4} u_0^4$$

３．エネルギー法

$\partial_t u + u + au^3 = 0, \qquad u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$

時間局所解の構成

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} + au^3 = 0, \qquad \tilde{u}(0) = u_0 \quad \ldots (NL)$$

で非線形写像$\Phi: u \to \tilde{u}$を定義する. 半径$2M$の閉球

$$X_M \coloneqq \left\{ u : \sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \le 2M \right\}, \qquad M \ge |u_0|$$

の中でΦが中への縮小写像であることを示す.

$$(NL) \times \partial_t \tilde{u} \Rightarrow \partial_t \left(\frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right) + \cancel{|\partial_t \tilde{u}|^2} = -a\partial_t \tilde{u} \cdot u^3 \le \cancel{|\partial_t \tilde{u}|^2} + \frac{1}{4} u^6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,T]} |\tilde{u}(t)|^2 \le \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{1}{4} \int_0^T |u(t)|^6 dt \le \frac{1}{2} M^2 + \frac{T}{4} (2M)^6$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]} |\tilde{u}(t)| \le M + 8M^2 \sqrt{T/2} M$$

3. エネルギー法

$$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$$
$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} + au^3 = 0, \qquad \tilde{u}(0) = u_0 \quad \ldots(NL)$$

時間局所解の構成(続き)

$u_1, u_2 \in X_M \coloneqq \{u : |u| \le 2M\}$から選ぶと

$$\partial_t(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) + (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = -a(u_1^3 - u_2^3)$$

両辺に $\partial_t(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)$をかけて同じ計算をすると

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}|(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)(t)|^2 \le \frac{1}{4}\int_0^T \left|(u_1^3 - u_2^3)(t)\right|^2 dt$$

$$\int_0^T \left|(u_1^3 - u_2^3)(t)\right|^2 dt \le \int_0^T \left|(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)\cdot(u_1 - u_2)(t)\right|^2 dt$$
$$\le (12M^2)^2 T \sup_{t\in[0,T]}|(u_1 - u_2)(t)|^2$$

$$\sup_{t\in[0,T]}|(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)(t)| \le 12M^2\sqrt{T/2}\sup_{t\in[0,T]}|(u_1 - u_2)(t)|$$

３．エネルギー法

時間局所解の構成(続き)

$$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$$

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} + au^3 = 0, \qquad \tilde{u}(0) = u_0 \quad \ldots (NL)$$

$$X_M \coloneqq \left\{u : \sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq 2M\right\}$$

以上をまとめると

$$\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{u}(t)| \leq M + 8M^2\sqrt{T/2}M$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)(t)| \leq 12M^2\sqrt{T/2} \sup_{t\in[0,T]} |(u_1 - u_2)(t)|$$

だから, Tを

$$12M^2\sqrt{T/2} < 1$$

をみたすように選ぶと, ΦはX_Mの中への縮小写像になるので, X_Mの中でただ一つの不動点（$(Ex)_\pm$の解）が存在することがわかる. □

３. エネルギー法

$$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$$

時間大域解の構成1（$a = 1$のとき）

アプリオリ評価:

$$\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{a}{4}u^4\right)(t) + \int_0^t |\partial_t u\ (s)|^2 ds = \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{a}{4}u_0^4$$

より,

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |u(t)| \le \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}$$

がわかるので, 先程の局所解の証明のMとして$\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}$を選んで, $[T, 2T]$での解を構成できる. これを繰り返せば, 時間大域解の一意存在が示される.

3. エネルギー法

$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$

時間大域解の構成2（$a = -1$のとき）

次に $(Ex)_-$を考える. この場合アプリオリ評価は,

$$\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4\right)(t) + \int_0^t |\partial_t u(s)|^2 ds = \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{4}u_0^4$$

となり, 先程の議論は使えないように思われる. しかし $\sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq 1$

を仮定すると, アプリオリ評価から, $\frac{1}{4}u^2(t) \leq \frac{1}{2}u_0^2$, すなわち

$\sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq \sqrt{2}|u_0|$ が示される. 初期値に$|u_0| \leq 1/(2\sqrt{2})$と仮定

をして, 先程の局所解の定理を$M = 1/2(\geq |u_0|)$ に対して適用すると,

$\sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq 1$ を満たす解が存在する. アプリオリ評価より

$|u(T)| \leq 1/2$だから $\sup_{t\in[T,2T]} |u(t)| \leq 1$ を満たす解が存在する.

つなぎ合わせると $\sup_{t\in[0,2T]} |u(t)| \leq 1$となり, また$|u(2T)| \leq 1/2$がわかる.

繰り返すと時間大域解の存在がわかる.

３．エネルギー法

$$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$$

時間大域解の構成１＆２（連続の問題）

<u>定理３．１（時間大域解）．</u> (1) Let $a = 1$. $\forall u_0$, $\exists!\, u(t)$: global solution for $(Ex)_+$ satisfying $\displaystyle\sup_{t\in[0,\infty)} |u(t)| \leq \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}$.

(2) Let $a = -1$. $\forall u_0$ satisfying $|u_0| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\exists!\, u(t)$: global solution for $(Ex)_-$ satisfying $\displaystyle\sup_{t\in[0,\infty)} |u(t)| \leq \frac{1}{2}$.

以上は, 西原-松村[8]にすっきりとまとめられている.

次に対応する差分解法の結果を紹介する.

３．エネルギー法

例3 $\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$

時間局所解の構成（差分解法）

例3d.

例3に対応する構造保存型差分解法は, $F(u) \coloneqq au^4/4$に対して,

$$\delta_n^+ U^{(n)} + \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)}, U^{(n)})} = 0 \quad (dEx)_\pm$$

補題３．１（時間局所解）．$\tau(M) := \frac{1}{32M^4}$. 任意の$U^{(n)}$に対して, $\Delta t \le \tau\left(\left|U^{(n)}\right|\right)$ ならば, $(dEx)_\pm$の解$U^{(n+1)}$が唯一つ存在する.

３. エネルギー法

$$\delta_n^+ U^{(n)} + \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)}, U^{(n)})} = 0 \quad (dEx)_\pm$$

時間局所解の構成(差分解法)

補題３．１の証明. 以下で定まる非線形写像$\Phi: U \to \widetilde{U}$ s.t.

$$\frac{\widetilde{U} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{U} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U, U^{(n)})} = 0 \quad (dNL)$$

が $X_M := \{U : \ |U| \le 2M\}$, $M \ge |u_0|$ で縮小写像となることを示す.
(dNL)の両辺に$\left(\widetilde{U} - U^{(n)}\right)/\Delta t$ をかけると,

$$\left|\frac{\widetilde{U} - U^{(n)}}{\Delta t}\right|^2 + \frac{\left|\widetilde{U}\right|^2 - \left|U^{(n)}\right|^2}{2\Delta t} \le \left|\frac{\widetilde{U} - U^{(n)}}{\Delta t}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\frac{\partial F}{\partial(U, U^{(n)})}\right|^2$$

$$\Rightarrow \left|\widetilde{U}\right| \le \left|U^{(n)}\right| + \sqrt{\frac{\Delta t}{2}}\left|\frac{\partial F}{\partial(U, U^{(n)})}\right| \le M + \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \max_{|u| \le 2M} |F'(u)|$$

$$\le M + 8M^2\sqrt{\Delta t/2}M$$

補題2.1 $\inf F' \le \frac{\partial F}{\partial(U,V)} \le \sup F'$

３．エネルギー法

$$\frac{\tilde{U}-U^{(n)}}{\Delta t}+\frac{\tilde{U}+U^{(n)}}{2}+\frac{\partial F}{\partial(U,U^{(n)})}=0 \quad (dNL)$$

時間局所解の構成（差分解法）

証明（続き）. 同様に, $U_1, U_2 \in X_M$に対しての(dNL)の差をとると

$$\frac{\tilde{U}_1-\tilde{U}_2}{\Delta t}+\frac{\tilde{U}_1-\tilde{U}_2}{2}+\frac{\partial F}{\partial(U_1,U^{(n)})}-\frac{\partial F}{\partial(U_2,U^{(n)})}=0$$

となるので, 両辺に$\left(\tilde{U}_1-\tilde{U}_2\right)$をかけると,

$$\left|\tilde{U}_1-\tilde{U}_2\right| \le \sqrt{\frac{\Delta t}{2}}\left|\frac{\partial F}{\partial(U_1,U^{(n)})}-\frac{\partial F}{\partial(U_2,U^{(n)})}\right|$$

$$\le \sqrt{\frac{\Delta t}{2}}\max_{|u|\le 2M}\frac{|F''(u)|}{2}\cdot|U_1-U_2| \le 6\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}M^2|U_1-U_2|$$

補題2．2．(i) $\frac{\partial F}{\partial(\xi,\eta)}-\frac{\partial F}{\partial(\tilde{\xi},\tilde{\eta})}=\frac{1}{2}\overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right)\cdot\left(\xi-\tilde{\xi}\right)+\frac{1}{2}\overline{F}''\left(\eta,\tilde{\eta};\xi,\tilde{\xi}\right)\cdot(\eta-\tilde{\eta})$

(ii) $\inf_{\xi\in\Omega}F''(\xi)\le\overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right)\le\sup_{\xi\in\Omega}F''(\xi)$

3．エネルギー法

$$\frac{\widetilde{U}-U^{(n)}}{\Delta t}+\frac{\widetilde{U}+U^{(n)}}{2}+\frac{\partial F}{\partial(U,U^{(n)})}=0 \quad (dNL)$$

時間局所解の構成（差分解法）

証明（続き）．以上もう一度まとめてかくと，

$$\left|\widetilde{U}\right| \leq M+8M^2\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}M, \qquad \left|\widetilde{U}_1-\widetilde{U}_2\right| \leq 6M^2\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}\left|U_1-U_2\right|$$

が得られた．よって，$8M^2\sqrt{\Delta t/2}<1$ となるように，Δtを十分小さく選ぶと，縮小写像の原理より，Φの不動点，すなわち$U^{(n+1)}$ の存在がわかる．

ここで，$8M^2\sqrt{\Delta t/2}<1 \Leftrightarrow \Delta t<\tau(M)=1/32M^4$に注意する．　□

３．エネルギー法

$$\delta_n^+ U^{(n)} + \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)}, U^{(n)})} = 0 \quad (dEx)_\pm$$

時間大域解の構成1（$a = 1$のとき）

アプリオリ評価:

$$\frac{1}{2}\left|U^{(n)}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|U^{(n)}\right|^4 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\left|\delta_n^+ U^{(\ell)}\right|^2 \Delta t = \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{1}{4}u_0^4$$

より, $\sup_{n=0,1,\ldots}\left|U^{(n)}\right| \le \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}$ がわかる. 先程の局所解の存在は

$\Delta t < \tau\left(\left|U^{(n)}\right|\right)$ の元でなりたつが, τ の単調減少性より

$\tau\left(\left|U^{(n)}\right|\right) \ge \tau\left(\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}\right)$ がなりたつので, $\Delta t \le \tau\left(\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}\right)$

のもとで時間大域解の一意存在が示される. □

3. エネルギー法

$$\delta_n^+ U^{(n)} + \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)}, U^{(n)})} = 0 \quad (dEx)_\pm$$

時間大域解の構成2（$a = -1$のとき）

次に $(dEx)_-$を考える. この場合アプリオリ評価は,

$$\frac{1}{2}\left|U^{(n)}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|U^{(n)}\right|^4 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\left|\delta_n^+ U^{(\ell)}\right|^2 \Delta t = \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{4}u_0^4$$

となる. $\max_{n=0,1,\ldots,N}\left|U^{(n)}\right| \leq 1$ を仮定すると，アプリオリ評価から,

$\frac{1}{4}\left|U^{(n)}\right|^2 \leq \frac{1}{2}u_0^2$, すなわち $\max_{n=0,1,\ldots,N}\left|U^{(n)}\right| \leq \sqrt{2}|u_0|$ が示される.

初期値に$|u_0| \leq 1/(2\sqrt{2})$と仮定をして，先程の局所解の定理を $M = 1/2$ に対して適用すると, $\left|U^{(1)}\right| \leq 1$ を満たす解が存在する.

アプリオリ評価より $\left|U^{(1)}\right| \leq 1/2$だから$\left|U^{(2)}\right| \leq 1$ を満たす解が存在する. つなぎ合わせると $\max_{n=0,1,2}\left|U^{(n)}\right| \leq 1$となり, また$\left|U^{(2)}\right| \leq \frac{1}{2}$ がわかる. 繰り返すと時間大域解の存在がわかる. □

３．エネルギー法

$u' + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_{\pm}$

時間大域解の構成１＆２（差分解法）

定理３．２（時間大域解）．(1) Let $a = 1$.

$\forall u_0,\ \Delta t \le \tau\left(\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}\right) \Rightarrow\ \exists!\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$: solution for $(dEx)_+$

satisfying $\sup\limits_{n=0,1,\ldots} \left|U^{(n)}\right| \le \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2}u_0^4}$.

(2) Let $a = -1$.

$\forall u_0$ satisfying $|u_0| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\Delta t \le \tau\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \exists!\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$: solution for $(dEx)_-$ satisfying $\sup\limits_{n=0,1,\ldots} \left|U^{(n)}\right| \le \frac{1}{2}$.

3. エネルギー法

$\partial_t u + u + au^3 = 0,\ u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$

まとめ（差分解法の時間大域解）

例4（より一般の形）. 以上の議論を, より一般の方程式:

$$\partial_t u + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$$

について整理する. (O)に対応する差分解法は

$$\delta_n U^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad (Od)$$

で与えられる.

この(Od)の時間大域解の存在は次のようにまとめられる.

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$$
$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad (Od)$$

3．エネルギー法

まとめ（差分解法の時間大域解）

主張LE（時間局所解）. $C_l > 1$:固定. $\forall M_n \geq \left|U^{(n)}\right|$, ∃単調減少関数$\tau$: 任意の$U^{(n)}$に対して, $\Delta t \leq \tau(M_n)$ならば$\left|U^{(n+1)}\right| \leq C_l M_n$を満たす$(Od)$の解$U^{(n+1)}$が一意に存在する.

＋

主張A1（アプリオリ評価1）. $\forall u_0, \exists C = C(u_0)$: (Od)の解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$が存在する$\Rightarrow \max_{n=0,1,\ldots,N} \left|U^{(n)}\right| \leq C(u_0)$.

⇩

定理GE1（Large Data Global Existence）. 主張LEとA1を仮定する. $\forall u_0$に対して, $\Delta t \leq \tau\left(C(u_0)\right)$ $\Rightarrow \sup_{n=0,1,\ldots,\infty} \left|U^{(n)}\right| \leq C(u_0)$を満たす$(Od)$の大域解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$が一意に存在する.

3. エネルギー法

まとめ（差分解法の時間大域解）

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad (Od)$$

主張LE

＋

主張A2（アプリオリ評価2）. $\exists \varepsilon_0, \exists C_0$ s.t. $\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$が$|u_0| \le \varepsilon_0$のもとで$(Od)$の解ならば, その解は $\max_{n=0,1,\dots,N} \left|U^{(n)}\right| \le C_0|u_0|$ を満たす.

⇩

定理GE2（Small Data Global Existence 1）. 主張LEとA2を仮定する. $|u_0| \le \varepsilon_0$なる任意のu_0に対して, $\Delta t \le \tau(C_0|u_0|)$ ⇒ $\sup_{n=0,1,\dots,\infty} \left|U^{(n)}\right| \le C_0|u_0|$ を満たす(Od)の大域解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$が一意に存在する.

3. エネルギー法

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \qquad (Od)$$

まとめ（差分解法の時間大域解）

主張LE ✚

主張A3（アプリオリ評価3）. $\exists \varepsilon_0, \exists C_0$ s.t.
$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$が$\max_{n=0,1,\ldots,N}\left|U^{(n)}\right| \le \varepsilon_0$のもとで$(Od)$の解ならば, その解は$\max_{n=0,1,\ldots,N}\left|U^{(n)}\right| \le C_0|u_0|$を満たす.

⇩

定理GE3（Small Data Global Existence 2）. 主張LEとA3を仮定する.
$\delta := \min\left\{1, \frac{1}{C_0}\right\} \cdot \frac{\varepsilon_0}{C_l}$. $|u_0| \le \delta$なる任意のu_0に対し, $\Delta t \le \tau\left(\frac{\varepsilon_0}{C_l}\right)$
$\Rightarrow \sup_{n=0,1,\ldots,\infty}\left|U^{(n)}\right| \le C_0|u_0|$を満たす$(Od)$の大域解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$が一意に存在する.

定理GE1, GE2, GE3の証明については[14]を参照.

３．エネルギー法

（２）誤差評価

(Conditional Error Estimate と Unconditional Error Estimate)

3. エネルギー法

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \quad \text{(O)}$$

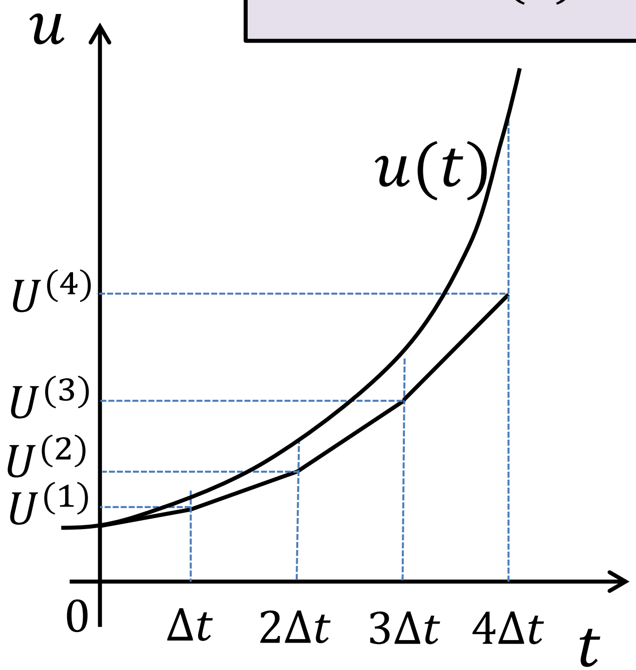
$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad \text{(Od)}$$

誤差評価

以下では, 誤差$e^{(n)} \coloneqq U^{(n)} - u(n\Delta t)$についての評価を求めたい.

差分法の標準的な誤差評価は時間区間の幅に依存する結果が多い.

例. $u' = u,\ \ t \in [0, T],\ \ u(0) = 1,$ $\qquad \delta_n^+ U^{(n)} = U^{(n)},\ \ n = 0, 1, \dots, N,\ \ U^{(0)} = 1,$



$$\delta_n^+ e^{(n)} = e^{(n)} + \{u'(n\Delta t) - \delta_n^+ u(n\Delta t)\}$$

$|u'(n\Delta t) - \delta_n^+ u(n\Delta t)| \leq \frac{\Delta t}{2} |u''(\exists c)| = C\Delta t$ と

$\sum_{l=0}^{n-1} (1 + \Delta t)^l \leq \sum_{l=0}^{n-1} e^{l\Delta t} \leq n e^{n\Delta t}$ より,

$$\begin{aligned}
\left|e^{(n)}\right| &\leq (1 + \Delta t)\left|e^{(n-1)}\right| + C\Delta t^2 \\
&\leq (1 + \Delta t)^n \left|e^{(0)}\right| + C\Delta t^2 \sum_{l=0}^{n-1} (1 + \Delta t)^l \\
&\leq 0 + C\,\Delta t \cdot n\Delta t\, e^{n\Delta t} \leq C T e^T \Delta t
\end{aligned}$$

$$\therefore \left|e^{(n)}\right| \leq C T e^T \Delta t$$

３．エネルギー法

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \quad \text{(O)}$$
$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad \text{(Od)}$$

誤差評価

定理E1（誤差評価）. $T = N\Delta t$とする. (Od)の解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$が存在するとし, (O)に対しては, 解$u \in C^4([0, T])$が存在するとする. また

$\max_{n=0,1,\dots,N} |u(n\Delta t)|,\ \max_{n=0,1,\dots,N} \left|U^{(n)}\right| \le C_1$とする.

このとき, $\Delta t \max_{|u| \le C_1} |F''(u)| < 1$ならば

$$\max_{n=1,2,\dots,N} \left|u(n\Delta t) - U^{(n)}\right| \le C\sqrt{T} e^{CT} \Delta t^2$$

注意. 標準的な誤差評価で, 左辺が時間区間の幅Tに依存している. 言い換えると局所的な評価である.

3. エネルギー法

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \quad \text{(O)}$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad \text{(Od)}$$

誤差評価

定理E1（誤差評価）. $T = N\Delta t$とする. (Od)の解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$が存在するとし, (O)に対しては, 解$u \in C^4([0,T])$が存在するとする. また

$\max_{n=0,1,\ldots,N} |u(n\Delta t)|,\ \max_{n=0,1,\ldots,N} \left|U^{(n)}\right| \leq C_1$とする.

このとき, $\Delta t \max_{|u| \leq C_1} |F''(u)| < 1$ならば

$$\max_{n=1,2,\ldots,N} \left|u(n\Delta t) - U^{(n)}\right| \leq C\sqrt{T} e^{CT} \Delta t^2$$

証明. $e^{(n)} := U^{(n)} - u(n\Delta t)$ とかく. (Od)から $t = (n + 1/2)\Delta t$ での(O)を引くと,

$$\delta_n^+ e^{(n)} + \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)}, u^{(n)}\right)}\right\} = \zeta^{(n)} \quad \text{(E)}$$

$$\zeta^{(n)} = \delta_n^+ u^{(n)} - \partial_t u^{(n+1/2)} + \left\{F'\left(u^{(n+1/2)}\right) - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)}, u^{(n)}\right)}\right\}$$

3. エネルギー法

$$\delta_n^+ e^{(n)} + \left\{\frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)},U^{(n)})} - \frac{\partial F}{\partial(u^{(n+1)},u^{(n)})}\right\} = \zeta^{(n)} \text{ (E)}$$

誤差評価

証明(続き). Taylorの定理から

$$\zeta^{(n)} = \delta_n^+ u^{(n)} - \partial_t u^{(n+1/2)} + \left\{F'\left(u^{(n+1/2)}\right) - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)},u^{(n)}\right)}\right\} = O(\Delta t^2).$$

(E)の両辺に$\frac{\left(e^{(n+1)}+e^{(n)}\right)}{2}$をかけると,

$$\frac{\left|e^{(n+1)}\right|^2-\left|e^{(n)}\right|^2}{2\Delta t} = -\frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2}\cdot\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)},U^{(n)}\right)} - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)},u^{(n)}\right)}\right\} - \zeta^{(n)}\right]$$

$$\leq \sup_{|u|\leq C_1}|F''(u)|\left(\frac{\left|e^{(n+1)}\right|+\left|e^{(n)}\right|}{2}\right)^2 + \frac{\left|e^{(n+1)}\right|+\left|e^{(n)}\right|}{2}C\Delta t^2$$

$$\leq \left(\sup_{|u|\leq C_1}|F''(u)| + \epsilon\right)\frac{\left|e^{(n+1)}\right|^2+\left|e^{(n)}\right|^2}{2} + \frac{C}{\epsilon}\Delta t^4.$$

離散Gronwallの不等式から,

$$\max_{n=1,2,\ldots,N}\left|e^{(n)}\right| \leq C\sqrt{T}e^{CT}\Delta t^2 \qquad \square$$

３．エネルギー法

$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$

$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad (Od)$

誤差評価

定理E2（無条件誤差評価）. (Od)の解$\left\{U^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$が存在するとし, (O)に対しては, 解$u \in C^2([0, \infty))$が存在するとする.

また $\sup_{n=0,1,\ldots,\infty} |u(n\Delta t)|,\ \sup_{n=0,1,\ldots,\infty} \left|U^{(n)}\right| \le C_1$とする.

更に, $\inf_{|u| \le C_1} F''(u) \ge C_2 > 0$ で, (Od)の解と(O)の解が

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\delta_n^+ U^{(n)}\right|^2 \Delta t + \int_0^{\infty} \left(|\partial_t u|^2 + |\partial_t^2 u|^2\right) dt \le C$$

を満たすとする. このとき

$$\sup_{n=1,2,\ldots,\infty} \left|u(n\Delta t) - U^{(n)}\right| \le C\Delta t$$

3．エネルギー法

$$u' + F'(u) = 0,\ u(0) = u_0 \qquad (O)$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} = 0,\ U^{(0)} = u_0 \quad (Od)$$

誤差評価

証明. (Od)から $t = (n+1)\Delta t$ での(O)を引くと,

$$\delta_n^+ e^{(n)} + \left\{\frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)}, u^{(n)}\right)}\right\} = \tilde{\zeta}^{(n)} \quad \text{(E)}$$

$$\tilde{\zeta}^{(n)} = \delta_n^+ u^{(n)} - \partial_t u^{(n+1)} + \left\{F'\left(u^{(n+1)}\right) - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)}, u^{(n)}\right)}\right\}.$$

ここで, $ab + cd = \frac{1}{2}(a+b)(c+d) + \frac{1}{2}(a-b)(c-d)$ より

$$\frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)}, U^{(n)}\right)} - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)}, u^{(n)}\right)} = \frac{1}{2}\overline{F}'' e^{(n+1)} + \frac{1}{2}\overline{\overline{F}}'' e^{(n)}$$

$$= \frac{\overline{F}'' + \overline{\overline{F}}''}{2}\,\frac{e^{(n+1)} + e^{(n)}}{2} + \frac{\overline{F}'' - \overline{\overline{F}}''}{2}\,\frac{e^{(n+1)} - e^{(n)}}{2}$$

ただし, $\overline{F}'' := \overline{F}''\left(U^{(n+1)}, u^{(n+1)}; U^{(n)}, u^{(n)}\right)$,

$\overline{\overline{F}}'' := \overline{F}''\left(U^{(n)}, u^{(n)}; U^{(n+1)}, u^{(n+1)}\right)$とおいた.

補題2．2．(i) $\frac{\partial F}{\partial(\xi,\eta)} - \frac{\partial F}{\partial(\tilde{\xi},\tilde{\eta})}$
$= \frac{1}{2}\overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right)\cdot\left(\xi - \tilde{\xi}\right)$
$+ \frac{1}{2}\overline{F}''\left(\eta,\tilde{\eta};\xi,\tilde{\xi}\right)\cdot\left(\eta - \tilde{\eta}\right)$

$$\delta_n^+ e^{(n)} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial\left(U^{(n+1)},U^{(n)}\right)} - \frac{\partial F}{\partial\left(u^{(n+1)},u^{(n)}\right)} \right\} = \tilde{\zeta}^{(n)} \quad \text{(E)}$$

3．エネルギー法

誤差評価

証明. $(E) \Leftrightarrow \delta_n^+ e^{(n)} + \frac{\overline{F}'' + \tilde{\overline{F}}''}{2} \frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2} = -\frac{\overline{F}'' - \tilde{\overline{F}}''}{2} \frac{e^{(n+1)}-e^{(n)}}{2} + \tilde{\zeta}^{(n)}$

$$= -\frac{\overline{F}'' - \tilde{\overline{F}}''}{2} \frac{\left(U^{(n+1)}-U^{(n)}\right)-\left(u^{(n+1)}-u^{(n)}\right)}{2} + \tilde{\zeta}^{(n)}$$

両辺に$\frac{\left(e^{(n+1)}+e^{(n)}\right)}{2}$をかけると補題2．2(ii)と仮定より,

$$\frac{\left|e^{(n+1)}\right|^2-\left|e^{(n)}\right|^2}{2\Delta t} + C_2 \cancel{\left|\frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2}\right|^2}$$

$$\leq \sup|F''| \left|\frac{\left(U^{(n+1)}-U^{(n)}\right)-\left(u^{(n+1)}-u^{(n)}\right)}{2}\right| \cdot \left|\frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2}\right| + \frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2} \cdot \tilde{\zeta}^{(n)}$$

$$\leq C_2 \cancel{\left|\frac{e^{(n+1)}+e^{(n)}}{2}\right|^2}$$

$$+ \frac{C(C_1)}{C_2}\left\{\left|U^{(n+1)} - U^{(n)}\right|^2 + \left|u^{(n+1)} - u^{(n)}\right|^2 + \left|\tilde{\zeta}^{(n)}\right|^2\right\}.$$

仮定. $\inf_{\xi\in\Omega} F''(\xi) \geq C_2 > 0$

補題2．2. (ii) $\inf_{\xi\in\Omega} F''(\xi) \leq \overline{F}''\left(\xi,\tilde{\xi};\eta,\tilde{\eta}\right) \leq \sup_{\xi\in\Omega} F''(\xi)$

3．エネルギー法

$$\delta_n^+ e^{(n)} + \left\{\frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)},U^{(n)})} - \frac{\partial F}{\partial(u^{(n+1)},u^{(n)})}\right\} = \tilde{\zeta}^{(n)} \quad \text{(E)}$$

誤差評価

証明(続き). $\Leftrightarrow$

$$\frac{\left|e^{(n+1)}\right|^2 - \left|e^{(n)}\right|^2}{2\Delta t} \le \frac{C(C_1)}{C_2}\left\{\left|U^{(n+1)} - U^{(n)}\right|^2 + \left|u^{(n+1)} - u^{(n)}\right|^2 + \left|\tilde{\zeta}^{(n)}\right|^2\right\}.$$

よって

$$\sup_{n=0,1,\ldots} \left|e^{(n)}\right|^2$$

$$\le C \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left|U^{(n+1)} - U^{(n)}\right|^2 + \left|u^{(n+1)} - u^{(n)}\right|^2 + \left|\tilde{\zeta}^{(n)}\right|^2\right\} \Delta t \le C\Delta t^2.$$

$\because$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|U^{(n+1)} - U^{(n)}\right|^2 \Delta t \sim \Delta t^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left|\delta_n^+ U^{(n)}\right|^2 \Delta t\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|u^{(n+1)} - u^{(n)}\right|^2 \Delta t \sim \Delta t^2 \int_0^\infty |\partial_t u(t)|^2 dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\tilde{\zeta}^{(n)}\right|^2 \Delta t \sim \Delta t^2 \left(\int_0^\infty |\partial_t u(t)|^2 dt + \int_0^\infty |\partial_t^2 u(t)|^2 dt\right)$$

□

3. エネルギー法

$$\partial_t u + u + au^3 = 0, \qquad u(0) = u_0 \quad (Ex)_\pm$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} + \frac{\partial F}{\partial(U^{(n+1)}, U^{(n)})} = 0 \quad (dEx)_\pm$$

誤差評価

定理1（誤差評価）. $a = \pm 1$の両方に対して, $(Ex)_\pm$と$(dEx)_\pm$の時間大域解が存在する条件のもとで, スタンダードな誤差評価と無条件誤差評価の両方が成り立つ.

証明の概略. スタンダードな誤差評価は明らかなので省略.
無条件誤差評価は, $G(u) := \frac{1}{2}u^2 + \frac{a}{4}u^4$ に対して, $G'' \geq C_2 > 0$をチェックすればよい. $a = 1$のときは, $G'' = 1 + 3u^2$ なので明らか.
$a = -1$のときは SDGE の結果より $|u| \leq 1/2$だから,

$$G''(u) \geq \inf_{|u| \leq 1/2} (1 - 3u^2) \geq \frac{1}{4}$$

となるので確かに成り立つ.

３．エネルギー法

（３）応用例
(非線形偏微分方程式への応用例)

３．エネルギー法

以下の結果はすべてΔt：小の仮定のもとで成り立つ（$\Delta t \le o(\Delta x^p)$のような制限はあらわれない）．

その他の応用例

１．Large Data Global Existence (LDGE) と条件付き誤差評価(CEE)

(1) Cahn-Hilliard equation, Boussinesq equation ･･･[12]
エネルギークラスでのLDGEとCEE

(2) 半線形熱弾性･･･[13]
エネルギークラス$H^2 \times L^2 \times L^1$ より少し狭い空間$H^2 \times L^2 \times L^1$でのLDGEとCEE

(3) 力学的境界条件下でのCahn-Hilliard equation･･･[2]
エネルギークラスでのLDGEとCEE

２．Small Data Global Existence (SDGE) と無条件誤差評価(UCEE)

(1) 半線形熱方程式･･･[14]
エネルギークラスでのSDGEとUCEE

(2) 準線形熱弾性（緩和双曲型方程式）･･･[6]
半離散スキームで十分狭い空間でのSDGE

4. 今後の課題

4. 今後の課題

1. 半線形方程式で無条件誤差評価が成り立つために必要な評価の改善. 非自明な問題の応用例.
2. 準線形方程式への一般論: 半離散スキーム(空間については連続)に対してはガレルキン法で解の存在を示すことで, SDGEが構成できる(川島-吉川[6]). これはほぼ準線形方程式の一般論がそのまま構造保存型差分解法に適用できることを意味している. 完全離散版でうまくいくかはわからない.
3. 多次元問題:ボロノイメッシュ. 一次元の非一様メッシュはうまくいく. (市川-吉川)
4. 確率微分方程式:構造保存型スキームは構成できる. (降旗-Lindgren-吉川).
5. なめらかでない解に対しての解析:分散型方程式に対してのStrichartz評価や、放物型方程式の最大正則性理論などの応用.

４．今後の課題

参考資料：　詳細や証明については
http://lab.ms.oita-u.ac.jp/yoshikawa/res.html
にまとめた資料を置く予定です.

ありがとうございました。