

ロバスト安定性を考慮した PID 制御器のマッチングによる設計例を示す。
これは教科書の 9 章と 11 章の理解を助けるための演習問題である。

1. 演習問題

制御対象の伝達関数が次式で与えられるとしよう。

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s^2+s+100}$$

設計のために次式の簡単な数式モデルを用いるとする。

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

制御器は I-P 型の PI 制御器とする (図 9. 11)。すなわち、フィードバック系は次式で表される。

$$y = \tilde{P}u$$

$$u = -K_p y + \frac{K_I}{s}(r - y)$$

PI 制御器の伝達関数は次式で与えられる。

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

問 1 : 目標値応答が次式に示す標準 2 次遅れ系の参照モデルに一致するように IP 制御器のゲインを決定せよ (9. 3 節参照)。

$$y = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} r$$

問 2 : ロバスト安定性を考慮しながら、参照モデルの固有角周波数 ω_n をなるべく大きくする IP ゲインを求めよ (11. 3. 3 項参照)。

2. 設計

問 1 の解 : 目標値から制御量への閉ループ伝達関数が次式で与えられるように PI 制御器を設計する。

$$y = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} r$$

モデル $P(s)$ に対して、閉ループ伝達関数は

$$y = \frac{P(s) \frac{K_I}{s}}{1 + P(s)K(s)} r = \frac{K_I}{s^2 + (1 + K_p)s + K_I} r$$

であるので、係数比較により

$$K_p = 2\zeta\omega_n - 1$$

$$K_I = \omega_n^2$$

で与えられる.

問2の解: 適度な過渡応答波形とするために $\zeta = 0.7$ に設定し, 応答を速くするために ω_n を大きくする. このとき, 感度関数 $S(s)$ と相補感度関数 $T(s)$ のゲイン特性を描いて, フィードバック制御系の特性を評価する. また, 目標値応答の時間応答も同時に調べる. 数式モデルに対する感度関数は

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}, T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

であり, ロバスト安定条件は

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_m(j\omega)|}, \omega \in R$$

で与えられる. ここに, 乗法的モデル誤差は

$$\Delta_m = \frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)} = \frac{3(s+1)}{s^2 + s + 100}$$

であるから, モデル誤差の大きさは

$$|W_m(j\omega)| = \left| \frac{3(j\omega+1)}{-\omega^2 + j\omega + 100} \right|$$

で評価される. 感度関数と相補感度関数のゲイン特性のグラフに, モデル誤差の逆数 $1/|W_m(j\omega)|$ の特性も描くことにする.

図1に $\omega_n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対する, $S, T, 1/W_m$ のゲイン特性を描いた. ω_n が大きくなるにつれ, 感度関数の有効制御帯域が右へ拡大し, より広い帯域で低感度, 外乱抑制, 高速応答の特性となることが分かる. このとき, 相補感度関数の帯域幅も右方向へ移動し, 速応性が良くなると期待される. その際に, 相補感度関数の共振ピークが大きくなるので良好な応答特性がモデル $P(s)$ に対しては達成されないと考えられる.

一方, モデル誤差による境界 $1/|W_m(j\omega)|$ があるので $\omega_n = 2$ まではロバスト安定制約が満たされるが, $\omega_n = 3$ ではロバスト安定制約が満たされない. これより, これ以上に ω_n を大きくしていくと時間応答が悪化し, 最悪の場合には不安定化する危険性が予想される. ただし, ロバスト安定条件は十分条件であるので, 確実に不安定化することを意味しない.

図2に数式モデルに対するステップ目標値応答を示す. 完全なマッチングにより良好な応答がすべての場合に得られる. 一方, 図3に実システムの場合のステップ目標値応答を示す. 上記のロバスト安定解析で予想したように, ω_n が大きくなるにつれてモデル誤差による振動的な応答が見られる.

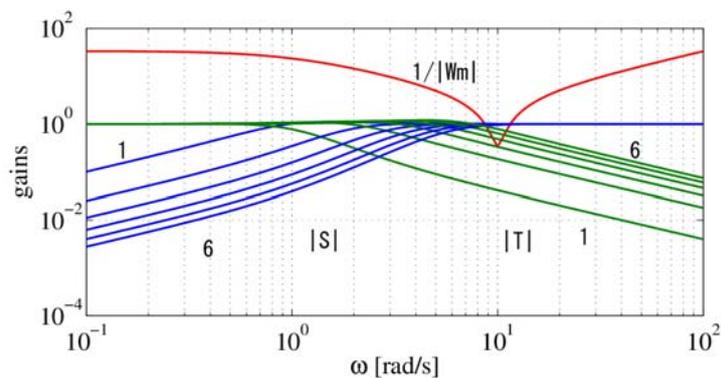


図1 感度，相補感度，モデル誤差の境界のグラフ

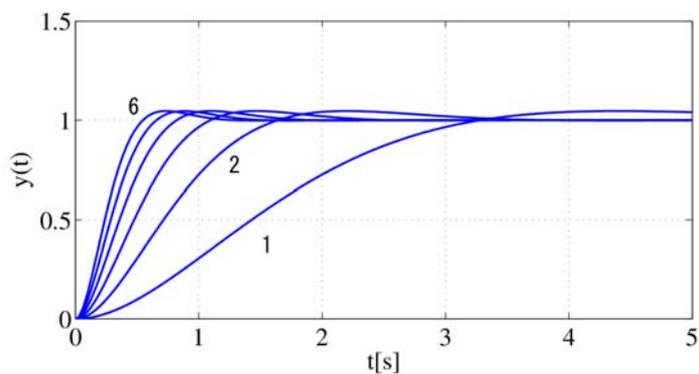


図2 ステップ目標値応答 ($P(s)$ の場合)

「図2はモデル $P(s)$ に対する $\omega_n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の閉ループ系のステップ目標値応答である。モデル誤差がないので，すべての応答が良好である。」

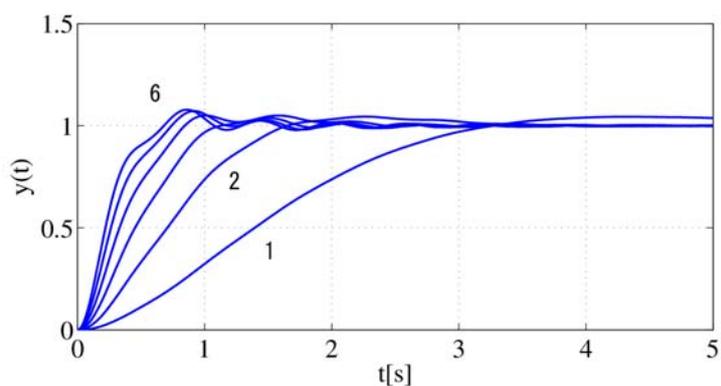


図3 ステップ目標値応答 ($\tilde{P}(s)$ の場合)

「図3は実システム $\tilde{P}(s)$ に対する時間応答である。設計時に無視したモデル誤差の影響が ω_n が大きくなるにつれ，振動として現れている。」