四元数多様体の複素部分多様体

塚田　和美*

序

最初に四元数についておさらいする．$\mathbb{H}$ は 単位元 1 をもつ $\mathbb{R}$ 上の代数で，次の演算規則をもつ i, j, k で生成されている：

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$\mathbb{H}$ は **四元数体 (quaternion field)** と呼ばれ，$\mathbb{H}$ の元は **四元数 (quaternion)** と呼ばれる．積についての特徴は

· 可換でない.

· 結合法則が成立する：即ち，$a(bc) = (ab)c.$

· $a \neq 0$ となる a について，積に関する逆元 x が存在する：$ax = xa = 1$

四元数 $a \in \mathbb{H}$ に対し，

$$a = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \qquad a_l \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

と表すことができる．この表示により $\mathbb{H}$ は，4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ と同一視することができる.

$\mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}1$ と同一視される．複素数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{H}$ の部分体として捉える仕方は一意的ではない. ここでは　1 と i で生成される部分体を $\mathbb{C}$ とおく．四元数 $a \in \mathbb{H}$ に対し，

$$a = a_0 + ja_1, \qquad a_l \in \mathbb{C}$$

と表すことができる．この表示により $\mathbb{H}$ は，2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ と同一視することができる.

以下, $\mathbb{K}$ は，$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$ を表すことにする．$\mathbb{K}^n$ で，$\mathbb{K}$ を成分にもつ n 項列ベクトル全体のなす空間を表す．$\mathbb{K}^n$ に $\mathbb{K}$ の元を 右から かけることにより，　$\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．$\mathbb{H}^n$ は，$\mathbb{R}$ 上の $4n$ 次元ベクトル空間であり，$\mathbb{C}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間と見ることができる．特に

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n + j\,\mathbb{C}^n, \qquad (\text{直和}) \tag{0.2}$$

と表すことができる.

$\mathbb{K}^{n+1}$ 内の（$\mathbb{K}$ に関する）1 次元部分空間全体の集合を $\mathbb{K}P^n$ で表す. $\mathbb{K}P^n$ は，$n \times \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ 次元（実）多様体になり，**射影空間** と呼ばれている．複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ は複素多様体，ケー

*秋葉原微分幾何セミナー 2020 年 10 月 31 日

ラー多様体の典型例として知られている．四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ は本講演で論じられる四元数多様体，四元数ケーラー多様体の典型例である．また，(0.2) によって　自然に $\mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{H}P^n$ の部分多様体となることが分かる．本講演のテーマは「四元数多様体の複素部分多様体」であるが，$\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{H}P^n$ はそのような対象の典型例である．

この講演では,「四元数多様体の複素部分多様体」に関わる 2 つの話題について解説する．

1. 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体
2. 対称四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体
– 複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ を中心に

前者の話題は，F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkall([9]) の理論の高次元化を試みることが動機である．高次元化の試みを次のような図式で考えたい:

高次元化の試み

$\mathbb{H}P^1$ の $GL(2,\mathbb{H})$-幾何 $= S^4$ の共形幾何	$\Rightarrow$	$\mathbb{H}P^n$ の $GL(n+1,\mathbb{H})$-幾何 $= \mathbb{H}P^n$ の四元数微分幾何
S^4 の曲面（リーマン面）	$\Rightarrow$	$\mathbb{H}P^n$ の半分次元 “複素部分多様体 ”

後者の話題は，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の複素部分多様体の研究をほかの対称四元数ケーラー多様体の場合に拡張することを目指したものである．四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体はリーマン部分多様体論の興味深い対象になるのではないかと考えている．

「四元数多様体の複素部分多様体」というテーマが，複素微分幾何と四元数微分幾何が相互作用する四元数複素微分幾何学とでも呼ぶべき研究領域として発展することを期待している．

講演の構成

§1 四元数多様体とその上のツイスター空間

§2 四元数多様体の複素部分多様体

§3 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の四元数構造，Q-接続

§4 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体

§5 対称四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体 – 複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ を中心に

§1 四元数多様体とその上のツイスター空間

この節については，Besse ([5]) Chapter 14 が良い参考文献となる．

四元数多様体の定義を与えたい． C^∞ 級可微分多様体，複素多様体の定義のアナロジーとして考えれば，$\mathbb{H}^n$ の開集合をモデルとして座標変換を“ 四元数正則写像” とする設定を自然に思いつく．しかし，“ 四元数正則関数”についての良い概念がないため，上記のような設定では 狭い範囲の対象を扱うものになってしまうことが知られている（この辺の事情は Besse ([5]) p.410 参照）．ここでは，複素多様体を特別なテンソル場をもつ可微分多様体とみる捉え方のアナロジーを考える．概複素構造について思い起こそう（本項については，松島与三 [22] II §16,17, Kobayashi and Nomizu [20] Chapter IX など参照のこと ）．

多様体 M 上の $(1,1)$ 型テンソル場 I で， $I^2=-\mathrm{id}$ をみたすものを M 上の**概複素構造 (almost complex structure)** という．概複素構造を備えた多様体 (M,I) を**概複素多様体 (almost complex manifold)** という．各点 $p\in M$ において， I_p は接ベクトルを i 倍するという演算を定め， 接空間 T_pM が複素ベクトル空間となることを意味している．M が複素多様体であるときは，複素座標系を用いることにより，各点 $p\in M$ の接空間 T_pM を複素ベクトル空間とすることができ，従って概複素構造 I_p を定めることができる．このようにして定まる I を複素多様体 M に付随した概複素構造と呼ぶ.

概複素構造 I に対して，複素座標系が存在してその座標系に付随する概複素構造に一致するとき， I は**積分可能 (integrable)** という．また，積分可能な概複素構造を単に複素構造と呼ぶ．概複素構造 I が積分可能であるためのとても良い判定条件が知られている．ここでは，接続を用いた条件について紹介する．

概複素構造 I に対して，I を平行にする，即ち $\nabla I=0$ を満たすアファイン接続を**概複素接続 (almost complex connection)** と呼ぶ．概複素多様体上には概複素接続が必ず存在することが知られている (cf. [20] p.143). ただし，一意ではない．さらに次が成り立つ.

定理 1.1 (cf. [20] p.145 Corollary 3.5) 概複素多様体 (M,I) が積分可能であるための必要十分条件は捩率が 0 となる概複素接続が存在することである．

この定理により，複素多様体を 概複素多様体 (M,I) で捩率が 0 の概複素接続 ∇ をもつものとして捉えることができる．四元数多様体の定義として，この捉え方のアナロジーを考えることにする．定義を与える前に複素多様体についてもう少し準備をする．

（概）複素多様体の幾何学的性質を調べる際，適合するリーマン計量を導入してリーマン幾何学の手法を適用するのは有効である．(M,I) を概複素多様体とする． M 上の リーマン計量 g について，各点 $p\in M$ で，g_p が I_p 不変であるとき，**エルミート (Hermite) 計量**と呼ばれる．エルミート計量 g を備えた概複素多様体を**概エルミート多様体**といい， (M,I,g) と表示する．エルミート計量 g について，そのリーマン接続 ∇ が概複素接続となる時，**ケーラー (Kähler) 計量**と呼ばれる．リーマン接続は捩率が 0 であるから，定理 1.1 により，概複素構造 I は積分可能であり，複素多様体となる．ケーラー計量は，複素構造と相性の良いリーマン計量と言える．ケーラー計量を備えた複素多様体を **ケーラー多様体**と呼ぶ.

以上の準備を経て，ここで四元数多様体，四元数ケーラー多様体の定義を与える．

定義 1.2 M を $4n(n\geq 2)$ 次元多様体とし，Q を $\mathrm{End}\,TM$ の 3 次元部分束で次の条件をみたすものとする：

(a) M の各点 p に対して p の近傍 U で定義された Q の局所枠場 $\{I, J, K\}$ が存在して，次をみたす:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{id}, \quad IJ = -JI = K,$$
$$JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

(b) 捩率が 0 となるアファイン接続 ∇ で, End TM の中で Q を平行にするものが存在する.

このとき，Q を M 上の**四元数構造 (quaternionic structure)** といい，Q を備えた多様体 (M, Q) を**四元数多様体 (quaternionic manifold)** という．条件 (b) をみたすアファイン接続 ∇ を Q **-接続 (Q -connection)** という．また，条件 (a) を満たす局所枠場 $\{I, J, K\}$ を局所許容枠場という.

与えられた四元数構造 Q に対し，Q -接続は一意的ではなく，次が成立する.

命題 1.3 ([1] Prop.5.1) ∇ を Q -接続とする．別の Q -接続 ∇' に対して，1-form θ が存在して

$$\begin{aligned}(1.1) \qquad \nabla'_X Y &= \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \theta(IX)IY - \theta(IY)IX \\ &\quad -\theta(JX)JY - \theta(JY)JX - \theta(KX)KY - \theta(KY)KX\end{aligned}$$

が成立する．逆に，1-form θ に対し (1.1) で表せる ∇' は Q -接続である.

Q -接続は四元数構造 Q を調べるための道具として用いる．四元数構造 Q のみに依存し，Q -接続の選び方によらない性質，量を論ずる.

四元数構造 Q に次のようにして，自然に内積 $\langle , \rangle$ を導入することできる：$A, B \in Q$ に対し，

$$(1.2) \qquad \langle A, B \rangle = -\frac{1}{4n}\mathrm{tr}(AB)$$

とおく．ここで，$\mathrm{tr}(AB)$ は AB を 各接空間の実線形変換とみたときのトレースを表す．局所許容枠場 $\{I, J, K\}$ は，この内積に関して正規直交枠場となる．また，Q -接続 ∇ は $\langle , \rangle$ に関して計量接続となる．即ち，局所許容枠場 $\{I, J, K\}$ に対し 1-forms の組 $(\omega_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ が存在し，次が成立する.

$$(1.3) \qquad \begin{aligned}\nabla I &= \omega_3 \otimes J - \omega_2 \otimes K \\ \nabla J &= -\omega_3 \otimes I + \omega_1 \otimes K \\ \nabla K &= \omega_2 \otimes I - \omega_1 \otimes J\end{aligned}$$

定義 1.4 (M, Q) を $4n (n \geq 2)$ 次元四元数多様体とする．M 上のリーマン計量 g について，各点 $p \in M$ で，g_p が Q_p 不変であり，かつそのリーマン接続が Q-接続であるとき，(Q, g) を**四元数ケーラー構造 (quaternionic Kähler structure)** といい，(Q, g) を備えた多様体 M を**四元数ケーラー多様体 (quaternionic Kähler manifold)** という.

四元数ケーラー多様体の曲率については，次のような著しい性質が成立することが知られている（ cf. Besse ([5]) Chapter 14 ）.
(i) アインシュタインである．即ち， $\mathrm{Ric} = \lambda \mathrm{id}$ が成り立つ．ここで, Ric はリッチ曲率テンソルを表し，λ は実数.
(ii) リッチ曲率テンソルが 0 である四元数ケーラー多様体に対して，局所許容枠場 $\{I, J, K\}$ で， $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ をみたすものが存在する.

M 全体で定義された許容枠場 $\{I, J, K\}$ で， $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ をみたすものが存在するとき，(M, Q, g) は **ハイパーケーラー多様体** と呼ばれている．本講演ではハイパーケーラー多様体については論じない.

例 1.5 リッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体 M で，対称空間になるものは J.A.Wolf [31] によって分類されている．そのリストについては， Besse ([5]) にある表を引用させてもらう．リッチ曲率が正のときは，M はコンパクト型で表中の G/K で表されるもの．リッチ曲率が負のときは，M は非コンパクト型で表中の G^*/K で表されるものである.

G	G^*	K	$\dim M$
$Sp(n+1)$	$Sp(n,1)$	$Sp(n)Sp(1)$	$4n (n \geq 2)$
$SU(n+2)$	$SU(n,2)$	$S(U(n)U(2))$	$4n (n \geq 2)$
$SO(n+4)$	$SO(n,4)$	$SO(n)SO(4)$	$4n (n \geq 3)$
G_2	G_2^2	$SO(4)$	8
F_4	F_4^{-20}	$Sp(3)Sp(1)$	28
E_6	E_6^2	$SU(6)Sp(1)$	40
E_7	E_7^{-5}	$Spin(12)Sp(1)$	64
E_8	E_8^{-24}	$E_7Sp(1)$	112

$Sp(n+1)/Sp(n)Sp(1)$ は，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ であり，その四元数構造については §3 で詳述する．$SU(n+2)/S(U(n)U(2))$ は $\mathbb{C}^{n+2}$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$, $SO(n+4)/SO(n)SO(4)$ は $\mathbb{R}^{n+4}$ の向きづけられた 4 次元部分空間全体の なす実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$ である．また，$G_2/SO(4)$ は純虚八元数 $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ の結合的部分空間全体のなす結合的グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ と呼ばれるものである.
リッチ曲率が正であるコンパクト四元数ケーラー多様体の例は，上記コンパクト型対称四元数ケーラー多様体のみしか知られていない．これら知られているもの以外に存在するか否かの問題は大きな研究テーマになっている.

Alekseevsky and Cortes は，Clifford 代数やスピン表現を用いて，等質四元数多様体及び等質四元数（擬）ケーラー多様体を組織的にかつ大量に構成する方法を示した（V.Cortes [11] ）．Joyce ([17]) による等質四元数多様体の構成方法も興味深い．この方法によって，四元数ケーラー構造を持たないコンパクト単連結等質四元数多様体が構成できる.

四元数微分幾何学を展開する際，ツイスター空間を導入し複素微分幾何学を援用するのは有効である．ツイスター空間とその上の複素構造，正則接触構造について述べる.

(M, Q) を四元数構造 Q をもつ四元数多様体とする.

$$\mathcal{Z}_p = S(Q_p) = \{I \in Q_p | I^2 = -\mathrm{id}\} = \{I \in Q_p | \langle I, I \rangle = 1\}.$$

とおく．$\pi : \mathcal{Z} \to M$ は，M 上の S^2-束になる．$\mathcal{Z}$ を M の**ツイスター空間**と呼ぶ．

定理 1.6 ([25]) (M, Q) を $4n(n \geq 2)$ 次元四元数多様体とする．M のツイスター空間 $\mathcal{Z}$ は自然な複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ をもつ．$\pi : \mathcal{Z} \to M$ のファイバーはこの複素構造に関して，種数 0 のコンパクト複素曲線になる．

証明の概略．　ここでは，Besse ([5] Ch. 14 $\S G$) による証明についてその概略を紹介する．Q-接続 ∇ を 1 つ選ぶ．Q は，∇ に関して End TM の平行な部分束であり，さらに ∇ は Q の自然な内積に関する計量接続になっていた．これより，∇ による平行移動で $\mathcal{Z}$ は保たれる．従って $\mathcal{Z}$ の接束 $T\mathcal{Z}$ は次のように直和分解される．

$$T\mathcal{Z} = \mathcal{V} + \mathcal{H}$$

ここで，$\mathcal{V}$ は S^2-束のファイバーに接する垂直接分布, $\mathcal{H}$ は Q-接続 ∇ によって定義される水平接分布を表す．

各点 $z \in \mathcal{Z}$ に対し，$T_z\mathcal{Z}$ 上の概複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ を次のように定める．$\mathcal{Z}_{\pi(z)} = S(Q_{\pi(z)})$ には $Q_{\pi(z)}$ の内積と向きから，標準計量と向きが定る．この標準計量と向きから $\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ に複素構造が定まる．$\mathcal{V}_z = T_z\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ であるから，$\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ の複素構造より，$\hat{I}^2 = -\mathrm{id}$ を満たす $\mathcal{V}_z$ の線形変換 $\hat{I}$ が定まる．一方，$\pi_*|_{\mathcal{H}_z} : \mathcal{H}_z \to T_{\pi(z)}M$ は線形同型写像であり，z は $T_{\pi(z)}M$ の線形変換で，$z^2 = -\mathrm{id}$ を満たしている．従って，$\bar{I} = (\pi_*|_{\mathcal{H}_z})^{-1} \circ z \circ \pi_*|_{\mathcal{H}_z}$ とおいて，$\mathcal{H}_z$ の線形変換 $\bar{I}$ を定めれば，$\bar{I}^2 = -\mathrm{id}$ を満たす．以上の議論の上で $T_z\mathcal{Z}$ 上の概複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ を次のように定める．

(i) $I^{\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{V}_z, \mathcal{H}_z$ をそれぞれ不変にする．
(ii) $\mathcal{H}_z$ 上では，$I^{\mathcal{Z}} = \bar{I}$.
(iii) $\mathcal{V}_z$ 上では，$I^{\mathcal{Z}} = \hat{I}$.

補題 1.7 $I^{\mathcal{Z}}$ は Q-接続 ∇ の選び方によらない．

$I^{\mathcal{Z}}$ の Nijenhuis tensor N を計算し，それが 0 となることを示す．Newlander and Nirenberg の定理 ([24]) によって，$I^{\mathcal{Z}}$ は積分可能であることが示され，$\mathcal{Z}$ は複素多様体となる．$N = 0$ を示すには，Q-接続 ∇ の曲率テンソルの性質などを用いて，かなり hard．Besse のテキスト (p.413 ~　p.415) 参照のこと．　□

四元数ケーラー多様体の場合，そのリーマン接続から定まるツイスター空間 $\mathcal{Z}$ 上の水平接分布 $\mathcal{H}$ は良い性質を持つ．用語を 1 つ導入する．(複素) $2n+1$ 次元複素多様体 Z の（複素）余次元 1 接分布 $\mathcal{H}$ に対し，各点の近傍 U 上に正則 1-形式 ω が存在し，U 上で $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$, $\omega|_{\mathcal{H}} = 0$ を満たすとき，$\mathcal{H}$ を**正則接触構造 (holomorphic contact structure)** という．

定理 1.8 ([5] Theorem 14.78) (M, Q, g) をリッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体とする．$\mathcal{H}$ をリーマン接続から定まるツイスター空間 $\mathcal{Z}$ 上の水平接分布とする．このとき，$\mathcal{H}$ は正則接触構造となる．

四元数ケーラー多様体のツイスター空間を具体的に与えることは興味深いと思う．そればかりでなく，個別の四元数ケーラー多様体の詳細な研究を進める上で重要な方法を与える．四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ であり，複素グラスマン

多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{m+2})$ のツイスター空間は複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{m+1})$ である．等々．後節でその説明を与える．

リーマン対称空間上のツイスター空間についての一般理論とリーマン面からの調和写像の研究への応用については， Burstall and Rawnsley [10] が参考になる．

§2 四元数多様体の複素部分多様体

$(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q})$ を，四元数構造 $\tilde{Q}$ をもつ $4n(n \geq 2)$ 次元四元数多様体とする．$\tilde{M}$ のはめ込まれた部分多様体 M^{2m} に対して，$\tilde{Q}|_M$ の切断 $\tilde{I}$ で (1) $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ をみたすものが存在するとき，M^{2m} を $\tilde{M}$ の**概複素部分多様体**という (cf. [2])．以下，M を $\tilde{M}$ の概複素部分多様体とする．$\tilde{I}$ を M に制限して得られる M の概複素構造を I で表す．$\tilde{Q}|_M$ は次のように分解される：

$$\tilde{Q}|_M = \mathbb{R}\tilde{I} + Q'. \tag{2.1}$$

ここで $Q' = [\tilde{I}, \tilde{Q}|_M] = \tilde{I}$ の直交補空間．Q' の局所枠場 $\tilde{J}, \tilde{K}$ を選び，$\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ が $\tilde{Q}|_M$ の局所許容枠場となるようにする．各点 $p \in M$ で，$\bar{T}_pM = T_pM \cap \tilde{J}(T_pM)$ とおく．$\bar{T}_pM$ は $T_p\tilde{M}$ の $\tilde{Q}$-不変部分空間, T_pM の I-不変部分空間になる．

$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}$ を 1 つ選ぶ. $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ に対して, (1.3) で定まる接続形式を $(\omega_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ とおく．M 上の 1-form ψ を

$$\psi(X) = \omega_3(IX) - \omega_2(X) \qquad X \in TM \tag{2.2}$$

とおく．

命題 2.1 ([2] Theorem 1.1) M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の概複素部分多様体とする．

(1) M に誘導された概複素構造 I が積分可能であるための必要十分条件は, M 上で $\psi = 0$.

(2) M の各点 p で，$\dim T_pM/\bar{T}_pM > 2$ であれば I は積分可能である．

[2] では，$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ が四元数ケーラーであることが仮定されているが，ケーラー性を仮定せずとも上記命題は成立する．証明もほぼ同じ．

$\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{M}$ をツイスター空間とする．$I^{\tilde{\mathcal{Z}}}$ を定理 1.6 で示された $\tilde{\mathcal{Z}}$ の複素構造とする．M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の概複素部分多様体とし，$\tilde{I} \in \Gamma(\tilde{Q}|_M)$ を対応する切断とする．$\tilde{I}$ は $\tilde{\mathcal{Z}}|_M$ の切断であり，$\tilde{I}$ は M から $\tilde{\mathcal{Z}}$ へのはめ込みとみることができる．$\tilde{I}$ から誘導された M の概複素構造を I で表す．$\tilde{I}$ もしくはその像となる $\tilde{\mathcal{Z}}$ の部分多様体 $\tilde{I}(M)$ を概複素部分多様体の**ツイスターリフト**と呼ぶこともある．

命題 2.2 ([3] Theorem 4.2) $\dim M = 2m \geq 4$ とする．このとき I が積分可能であるための必要十分条件は，$\tilde{I}$ が M から $\tilde{\mathcal{Z}}$ への正則はめ込みとなることである．

[3] では，$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ が四元数ケーラーであることが仮定されているが, ケーラー性を仮定せずとも上記命題は成立する．

概複素部分多様体 M^{2m} $(m \geq 2)$ の各点 p で，$\tilde{J} \in Q'_p$ (Q' は (2.1) で与えられている）に対し $\tilde{J}T_pM \cap T_pM = \{0\}$ が成立するとき，M を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の**横断的複素部分多様体 (transversally complex submanifold)** と呼ぶ．命題 2.1 (2) によって $\tilde{I}$ から誘導され

た概複素構造 I は積分可能，即ち (M, I) は複素多様体になる．また，$(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ が四元数ケーラー多様体で各点 $p \in M$ で $\tilde{J} \in Q'_p$ に対し $\tilde{J}T_pM \perp T_pM$ が成立するとき，M を $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の**全複素部分多様体 (totally complex submanifold)** と呼ぶ (cf. [13])．

$(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ をリッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体とする．このとき，定理 1.8 によってそのツイスター空間 $\tilde{\mathcal{Z}}$ は正則接触構造 $\mathcal{H}$ をもつ．ツイスターリフトによる全複素部分多様体の特徴付けが知られている．

命題 2.3 ([3]) M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の概複素部分多様体とする．M が全複素部分多様体となるための必要十分条件は，ツイスターリフト $\tilde{I}$ が $\tilde{\mathcal{Z}}$ への正則はめ込みであり，かつ正則接触構造 $\mathcal{H}$ に関して積分多様体となることである．特に，$m = n$ のとき，全複素部分多様体 $M^{2n} \subset \tilde{M}^{4n}$ から $\tilde{\mathcal{Z}}$ へのリフト $\tilde{I}(M)$ は $\tilde{\mathcal{Z}}$ のルジャンドル部分多様体になる．逆に，$\tilde{\mathcal{Z}}$ のルジャンドル部分多様体を射影することにより $\tilde{M}^{4n}$ の全複素部分多様体が得られる．

例 2.4 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ は，四元数ケーラー構造をもつリーマン対称空間である (例 1.5)．[27] では，$\mathbb{H}P^n$ の対称部分多様体となる全複素部分多様体を構成，分類した．即ち，対称部分多様体となる全複素部分多様体 $M^{2n} \subset \mathbb{H}P^n$ は次のいずれかと合同である．

(1) $\mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{H}P^n \quad$ (totally geodesic),
(2) $Sp(3)/U(3) \hookrightarrow \mathbb{H}P^6$,
(3) $SU(6)/S(U(3) \times U(3)) \hookrightarrow \mathbb{H}P^9$,
(4) $SO(12)/U(6) \hookrightarrow \mathbb{H}P^{15}$,
(5) $E_7/E_6 \cdot T^1 \hookrightarrow \mathbb{H}P^{27}$,
(6) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}/2) \hookrightarrow \mathbb{H}P^2$,
(7) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \hookrightarrow \mathbb{H}P^3$,
(8) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times SO(n+1)/SO(2) \cdot SO(n-1) \hookrightarrow \mathbb{H}P^n \quad (n \geq 4)$.

例 2.5 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間は，複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ である．命題 2.3 によって，$\mathbb{C}P^{2n+1}$ のジャンドル部分多様体を射影すると $\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体を得る．Landsberg and Manivel ([21]) は K3 曲面をブローアップした曲面で $\mathbb{C}P^5$ にルジャンドル部分多様体として埋め込めるものが存在することを示し，$\mathbb{C}P^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ の非等質なコンパクトルジャンドル部分多様体の最初の例であることをコメントしている．その後 Buczynski ([8]) は $\mathbb{C}P^{2n+1}$ のコンパクト非等質ルジャンドル部分多様体を組織的に構成する方法を示し，多くの例を構成した．これらの例を射影することにより，四元数射影空間の全複素部分多様体の例が得られる．

以下では $\dim M = \frac{1}{2} \dim \tilde{M}$ となる横断的複素部分多様体について議論する．分解 (2.1) における Q' の局所枠場 $\tilde{J}, \tilde{K}$ を選び，$\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ が $\tilde{Q}|_M$ の局所許容枠場となるようにする．$T^\perp M = \tilde{J}TM$ とおく．$T^\perp M$ は $\tilde{J}$ の選び方によらず定まり，$T\tilde{M}|_M$ の $\tilde{I}$ -不変部分束 となる．このようにして次の分解が得られる：

$$T\tilde{M}|_M = TM + T^\perp M \tag{2.3}$$

$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}$ を 1 つ選ぶ．分解 (2.3) によってアファイン微分幾何学における部分多様体論が展開できる．局所枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ に対して (1.3) で定まる接続形式を $(\omega_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ とおく．命題 2.1 (1) によって， $\omega_2(X) = \omega_3(IX)$．分解 (2.3) によって $\tilde{\nabla}$ から M に誘導接続 ∇, 第 2 基本形式 σ が定義される．∇ は捩率零，σ は $T^\perp M$ に値をもつ対称テンソル場となる．M の複素構造 I によって σ を 2 つの成分 $(2,0)+(0,2)$ 成分 σ_+，$(1,1)$ 成分 σ_- に分解する．即ち

$$\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$$
$$\sigma_+(IX, IY) = -\sigma_+(X, Y), \qquad \sigma_-(IX, IY) = \sigma_-(X, Y), \quad X, Y \in TM.$$

補題 2.6 ([30] Lemma 3.5) (1) $\nabla I = 0$.
(2)

$$\begin{aligned}\sigma_-(X,Y) &= \frac{1}{2}\left\{\omega_2(X)\tilde{J}Y + \omega_3(X)\tilde{K}Y + \omega_2(Y)\tilde{J}X + \omega_3(Y)\tilde{K}X\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{I}(\tilde{\nabla}_X\tilde{I})Y + \tilde{I}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{I})X\right\}\end{aligned}$$

系 2.7([30] Corollary 3.6) $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ をリッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体とし，M^{2n} $(n \geq 2)$ を $\tilde{M}$ の横断的複素部分多様体とする．リーマン接続 $\tilde{\nabla}$ に関して定まる第 2 基本形式の $(1,1)$ 成分を σ_- とする． M が全複素部分多様体であるための必要十分条件は，$\sigma_- = 0$ となることである．

別の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}'$ に対して，$\tilde{M}$ 上の 1-form θ が存在して $\tilde{\nabla}$ と $\tilde{\nabla}'$ とは (1.1) の関係で結ばれている． $\tilde{\nabla}'$ から誘導される M の接続を ∇', 第 2 基本形式を $\sigma', \sigma'_+, \sigma'_-$ とおく．このとき，次が成立する：

命題 2.8([30] Proposition 3.7) (1) $\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \{\theta(IX)IY + \theta(IY)IX\}$
(2) $\sigma'_+(X,Y) = \sigma_+(X,Y)$
$\sigma'_-(X,Y) = \sigma_-(X,Y) - \{\theta(\tilde{J}X)\tilde{J}Y + \theta(\tilde{J}Y)\tilde{J}X + \theta(\tilde{K}X)\tilde{K}Y + \theta(\tilde{K}Y)\tilde{K}X\}$

命題 2.8 に関する注意をいくつか述べる．
(1) 複素多様体 M に導入された 2 つの接続 ∇, ∇' が命題 2.8 (1) の関係で結ばれているとき，∇' は ∇ の正則射影変形と呼ばれている（ cf [16]）．
(2) 命題 2.8 (2) によって，σ_+ は $\tilde{Q}$-接続によらない不変量であることが分かる． σ_+ を用いて，良いクラスの横断的複素部分多様体の特徴付けが得られることが望ましい．第 4 節でそのような定理を 1 つ与える（定理 4.9）．
(3) 一方 σ_- は，$\tilde{Q}$-接続に依存する．ただし，次のようなことは成立する．$M_1, M_2 \subset \tilde{M}$ を横断的複素部分多様体とし，点 p を共有し，この点で $T_pM_1 = T_pM_2$ とする．この点で M_1, M_2 の σ_- が一致するか否かは $\tilde{M}$ の $\tilde{Q}$-接続の選び方によらない．

§3 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の四元数構造，Q-接続

この節は，主に [30] §4 に基づいている．

四元数 $n+1$ 項列ベクトル空間を $\mathbb{H}^{n+1}$ で表す．四元数による右からのスカラー乗法について四元数ベクトル空間と見る．四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の幾何学を四元数ベクトル束を用いて論ずる．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = \mathbb{H}P^n \times \mathbb{H}^{n+1}$ を $\mathbb{H}P^n$ 上の自明束，$L \subset \underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ を**同語反復部分束 (tautological bundle)** とする．即ち

$$L = \{(l, v) \in \mathbb{H}P^n \times \mathbb{H}^{n+1} \mid v \in l\}$$

L は四元数直線束である．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ で商ベクトル束を表す．自然に四元数ベクトル束になる．$\pi_L : \underline{\mathbb{H}^{n+1}} \to \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ を射影とする．π_L は四元数ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ を各ファイバーにおける $\mathbb{H}$-線形写像からなる実ベクトル束とする．以下では，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の接ベクトル束 $T\mathbb{H}P^n$ と $\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ とは実ベクトル束として同型であることを見る．

d を $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の自明接続とする．$l \in \mathbb{H}P^n, v \in l$ に対して l の近傍で定義された L の切断 s を $s(l) = v$ となるように選ぶ．$X \in T_l\mathbb{H}P^n$ に対し $\alpha(X) : l \to \mathbb{H}^{n+1}/l$ を

$$\alpha(X)v = \pi_L(d_X s) \tag{3.1}$$

で定める．切断 s の選び方によらず定義される．また，$\alpha(X)$ は l から $\mathbb{H}^{n+1}/l$ への $\mathbb{H}$-線形写像である．

命題 3.1 上で定めた $\alpha : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ は実ベクトル束の束同型写像になる．

証明については，[9] p.10 などを参照のこと．

以下では，$\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ を接ベクトル束 $T\mathbb{H}P^n$ と同一視して議論する．

$\mathbb{H}P^n$ の四元数構造 $Q \subset \mathrm{End}\, T\mathbb{H}P^n$ を次のように定める：$U \subset \mathbb{H}P^n$ を開集合，$s_0 \in \Gamma(L)$ を U 上で定義された零点を持たない L の局所切断とし，固定する．このとき，$T\mathbb{H}P^n \ni X \mapsto \alpha(X)(s_0) \in \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ は U 上で定義された束同型 $T\mathbb{H}P^n \to \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ となる．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ は四元数ベクトル束ゆえ，この束同型を用いて $T\mathbb{H}P^n$ に四元数構造を導入する．即ち

$$X \in T\mathbb{H}P^n|_U \text{ に対し } \alpha(\tilde{I}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))i,\ \alpha(\tilde{J}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))j \text{ とおく}$$

さらに，$\tilde{K} = \tilde{I}\tilde{J}$ とおく．このとき，$\alpha(\tilde{K}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))(-k)$ である．$\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ で $\mathbb{R}$ 上生成される $\mathrm{End}\, T\mathbb{H}P^n$ の３次元部分束を Q とおく．Q は局所切断 s_0 の選び方によらない．$GL(n+1, \mathbb{H})$ は $\mathbb{H}P^n$ に自然に微分同型写像として作用する．この作用で 四元数構造 Q は不変である．

Q-接続については次が成立する．

定理 3.2 次の 1 対 1 対応が成立する：

$\mathbb{H}P^n$ （もしくはその開集合）上の Q-接続	$\leftrightarrow$	自明束 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の $\mathbb{H}$ ベクトル束としての直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c$

ここで L^c は同語反復直線束 L の補空間ベクトル束を表す．

証明の概略．上記定理 の右辺から左辺への対応を説明する： 自明束 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の分解

$$\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c \tag{3.2}$$

が与えられたとする． π_L を L^c に制限することにより，自然な同型 $L^c \cong \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ が得られ次の同型が導かれる：

$$T\mathbb{H}P^n \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, L^c)$$

d を $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の自明接続とし，分解 (3.2) に応じて d の分解を考える．$X \in \Gamma(T\mathbb{H}P^n), s \in \Gamma(L), \xi \in \Gamma(L^c)$ に対し

$$\begin{aligned} d_X s &= D_X s + \alpha(X)s \\ d_X \xi &= \tau(X)\xi + D^c_X \xi. \end{aligned}$$

ここで，D, D^c はそれぞれ L, L^c の $\mathbb{H}$-線形接続で，$\alpha : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L, L^c)$ は束同型，$\tau : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L^c, L)$ は束準同型である．同型対応 $\alpha : T\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}(L, L^c)$ のもと，D, D^c から定まる $\mathbb{H}P^n$ のアファイン接続を ∇ で表す．即ち $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{H}P^n), s \in \Gamma(L)$ に対し

$$\alpha(\nabla_X Y)(s) = D^c_X(\alpha(Y)(s)) - \alpha(Y)(D_X s)$$

このとき，∇ は Q-接続になる． □

例 3.3 アファイン座標: $\mathbb{H}^{n+1}$ の標準基底を $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ とし，その双対基底を $\{{}^1, \cdots, \theta^{n+1}\}$ で表す．$M' = \{[v] \in \mathbb{H}P^n \mid \theta^1(v) \neq 0\}$ とおく．M' は $\mathbb{H}P^n$ の開集合．M' 上で $L^c = \{e_2, \cdots, e_{n+1}\}_{\mathbb{H}}$ とおく．M' 上での直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c$ を得る．

M' 上に四元数座標 $\{z^\gamma\}_{\gamma=2,\cdots,n+1}$，実座標 $\{x^\gamma_a\}_{\gamma=2,\cdots,n+1,a=0,1,2,3}$ を次のように定める．$M' \ni l$ に対して，$v \in l$ を $\theta^1(v) = 1$ をみたすようにとる．このとき，$z^\gamma = \theta^\gamma(v)$ $(\gamma = 2, \cdots, n+1)$ とおく．このようにして，M' は $\mathbb{H}^n$ と同一視される．さらに $z^\gamma = x^\gamma_0 1 + x^\gamma_1 i + x^\gamma_2 j + x^\gamma_3 k$, $x^\gamma_a \in \mathbb{R}$ とおく．$\{x^\gamma_a\}_{\gamma=2,\cdots,n+1,a=0,1,2,3}$ は M' 上の実座標．M' の点 $\{z^\gamma\} = \{x^\gamma_a\}$ に対し，

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2_0 1 + x^2_1 i + x^2_2 j + x^2_3 k \\ \vdots \\ x^{n+1}_0 1 + x^{n+1}_1 i + x^{n+1}_2 j + x^{n+1}_3 k \end{pmatrix}$$

と表せ，v は M' 上の L の切断になる．$d_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}} v$ の計算により，

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}} v = 0, \quad \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}\right)v = \begin{cases} e_\gamma \ (a=0), & e_\gamma i \ (a=1) \\ e_\gamma j \ (a=2), & e_\gamma k \ (a=3) \end{cases}$$

明らかに，$d_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}} e_\delta = 0$ であるから，$D^c_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}} e_\delta = 0$. これらより，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma_a}} \frac{\partial}{\partial x^\delta_b} = 0$. 即ち，$\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ の標準接続に他ならない．

例 3.4 （擬）リーマン計量: $(\ ,\ )$ を $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の非退化四元数エルミート内積とする．$M' = \{[v] \in \mathbb{H}P^n \mid (v, v) \neq 0\}$ とおく．M' の点で，$(\ ,\ )$ に関する L の直交補空間 $L^\perp$ を考える．

M' 上直交直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^{\perp}$ を得る．また，(,) より，M' 上に（擬）リーマン計量 g が次のようにして定義される．$l \in M'$ を固定する．$l^{\perp}$ を (,) に関する l の直交補空間とする．射影 $\pi_l : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{n+1}/l$ を $l^{\perp}$ に制限することにより $l^{\perp}$ と $\mathbb{H}^{n+1}/l$ とを同一視する．この同一視を通じて $\mathbb{H}^{n+1}/l$ に非退化四元数エルミート内積が定まる．これを同じ記号 (,) で表す．実線形写像 $\alpha : T_l\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(l, \mathbb{H}^{n+1}/l)$ を通じて $T_l\mathbb{H}P^n$ に非退化実内積 $g(,)$ を次のようにして導入する．0 でない $v \in l$ を 1 つとり固定する．$X, Y \in T_l\mathbb{H}P^n$ に対し

$$g(X, Y) = \frac{1}{(v, v)}\mathrm{Re}(\alpha(X)v, \alpha(Y)v)$$

とおく．$g(X, Y)$ は $v \in l$ の選び方によらず定まる．$g(,)$ は非退化内積で Q_l-不変であることが容易に示される．さらに，直交直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^{\perp}$ に対応する Q 接続は，g の（擬）リーマン接続となることが分かる．以上から，(M', Q, g) は四元数（擬）ケーラー多様体となる．より強く (M', g) は対称（擬）リーマン多様体になる．特に 標準エルミート内積 $\langle , \rangle_{\mathbb{H}}$ の場合，$M' = \mathbb{H}P^n$ となり，$(\mathbb{H}P^n, Q, g)$ は例 1.5 の表中 $Sp(n+1)/Sp(n)Sp(1)$ で表されるものである．

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に対しても，$\mathbb{H}P^n$ と同様に議論が展開される．自明束 $\underline{\mathbb{C}^{n+1}} = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ の同語反復部分束 E を考える． E は複素直線束．商ベクトル束 $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}/E$ は自然に複素ベクトル束になる．$\mathrm{Hom}(E, \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/E)$ を各ファイバーにおける複素線形写像からなる実ベクトル束とする．接ベクトル束 $T\mathbb{C}P^n$ から $\mathrm{Hom}(E, \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/E)$ への実ベクトル束としての束同型写像 α が $T\mathbb{H}P^n$ の場合と同様に定まる．$\mathrm{Hom}(E, \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/E)$ は自然に複素ベクトル束となり，同型写像 α を通じて $T\mathbb{C}P^n$ に概複素構造 I が定義される．$e \in \mathbb{C}P^n$ を固定する．$X \in T_e\mathbb{C}P^n$ が与えられたとき，任意の $v \in e$ に対し, $v \mapsto (\alpha(X)v)i$ で e から $\mathbb{C}^{n+1}/e$ への写像を定めると複素線形写像となり，$\mathrm{Hom}(e, \mathbb{C}^{n+1}/e) \cong T_e\mathbb{C}P^n$ のベクトルを定める．これを IX とおく．即ち，$\alpha(IX)v = (\alpha(X)v)i$. I は，$\mathbb{C}P^n$ の概複素構造になる．定理 3.2 と同様な考察を行うと，捩率 0 の接続 ∇ で $\nabla I = 0$ を満たすものが存在することが示され，I が積分可能になることが分かる．

四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ において，$\mathbb{H}$ の右からのスカラー乗法を $\mathbb{C}$ に制限することにより, $\mathbb{H}^{n+1}$ は複素ベクトル空間とみなすことができ，$\mathbb{C}^{2(n+1)}$ と同一視することができる．$e \subset \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{C}^{2(n+1)}$ を複素 1 次元部分空間とする.$e + ej$ とおくと，四元数 1 次元部分空間 l を得る．0 でない $u \in e$ をとると $S(Q_l)$ の元が定まる．$X \in T_l\mathbb{H}P^n$ に対し，$\alpha(\tilde{I}X)u = (\alpha(X)u)i$ とおけば，$\tilde{I} \in S(Q_l)$. さらに，$\tilde{I}$ は $u \in e$ の選び方によらない．以上から，写像 $\tilde{\pi} : \mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n, \psi : \mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathcal{Z}$ が定まり，次の可換図式が成立する．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}P^{2n+1} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathcal{Z} \\
{\scriptstyle \tilde{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathbb{H}P^n & = & \mathbb{H}P^n
\end{array}$$

実際 ψ は正則同型写像であることが示され，$\mathbb{C}P^{2n+1}$ は $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間となることが分かる．

§4 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体

この節は，主に [30] §5,§6 に基づいている．

最初に線形代数の準備をする． V, W を右からのスカラー乗法に関する四元数ベクトル空間とし， $\dim_{\mathbb{H}} V = 1, \dim_{\mathbb{H}} W = n$ とする．$\mathrm{Hom}(V, W)$ を $\mathbb{H}$-線形写像全体のなす実ベクトル空間とする．四元数構造 $Q \subset \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ を次のように定める：$v \in V, v \neq 0$ を１つとり固定する．このとき，$\mathrm{Hom}(V, W) \ni F \mapsto F(v) \in W$ は実線形同型写像となることに注意して，$I, J, K \in \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ を

$$F \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ に対して} \quad (IF)(v) = F(v)i, (JF)(v) = F(v)j, K = IJ$$

とおき，I, J, K で $\mathbb{R}$ 上生成される $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ の部分空間を Q とおく．Q は $v \in V, v \neq 0$ の選び方によらず定まる．横断的複素部分多様体の定義と同様に，実部分空間 $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ が横断的複素部分空間であることが定義される．$\tilde{I} \in Q$ で $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}$, $\tilde{I}U = U$ をみたすものが存在し，さらに 任意の $\tilde{J} \in Q'$ に対し，$\tilde{J}U \cap U = \{0\}$ が成立するとき， U を**横断的複素部分空間**という．ここで， $Q' = [\tilde{I}, Q] = \{\tilde{J} \in Q \mid \langle \tilde{I}, \tilde{J} \rangle = 0\}$．横断的複素部分空間 $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ は， $\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ をみたすとする．0 でない $\tilde{J} \in Q'$ に対し，$U^{\perp} = \tilde{J}U$ とおく．$U^{\perp}$ は $\tilde{J}$ の選び方によらず定まり，直和分解

$$\mathrm{Hom}(V, W) = U + U^{\perp}$$

を得る．次のような横断的複素部分空間の特徴付けが与えられる．

補題 4.1 ([9] Lemma 3 の高次元版) (1) $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ を横断的複素部分空間で，$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ とする．このとき，次の性質をみたす複素構造の組 $J_1 \in \mathrm{End}(V), J_2 \in \mathrm{End}(W)$ が存在する：

$$J_2 U = U, U J_1 = U, \ U = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = F J_1\}$$

その上，そのような組 J_1, J_2 は符号を除いて一意的である．ここで，$J_2 F$, $F J_1$ は $\mathbb{H}$-線形写像の合成を表し，$J_2 U = \{J_2 F \mid F \in U\}$, $U J_1 = \{F J_1 \mid F \in U\}$ は $\mathrm{Hom}(V, W)$ の部分空間である．

(2) 逆に複素構造の組 $J_1 \in \mathrm{End}(V), J_2 \in \mathrm{End}(W)$ が与えられたとき，

$$U = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = F J_1\}$$

とおくと，U は $\mathrm{Hom}(V, W)$ の横断的複素部分空間で，$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ となる．また，

$$U^{\perp} = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = -F J_1\}$$

が成立する．

多様体 M から $\mathbb{H}P^n$ への写像 f 及びその微分 df を ベクトル束の言葉で記述する：次の 1 対 1 対応が成立する：

$$\text{写像 } f : M \to \mathbb{H}P^n \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{H} \text{ 直線部分束} \\ L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1} \end{array}$$

また，$T\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ であるので，df は実線形写像

$$df : TM \to \mathrm{Hom}(L, \mathcal{H}/L)$$

に対応している．命題 3.1 によって df は次のように与えられる：$p \in M, X \in T_pM, \psi_0 \in L_p$ が与えられたとき，$\psi \in \Gamma(L)$ を $\psi(p) = \psi_0$ をみたすように選ぶ．このとき，$df_p(X)\psi_0 = \pi_L(d_X\psi)$.

$f : M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの横断的複素はめ込みとする．即ち，$\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体で，M の複素構造 I と $\tilde{I} \in \Gamma(\tilde{Q}|_M)$ に対して，$df(IX) = \tilde{I}df(X)$，$X \in TM$ が成立している．このはめ込みに対して，$df_p : T_pM \to \mathrm{Hom}(L_p, (\mathcal{H}/L)_p)$ は単射で，その像 $df_p(T_pM)$ は，$\mathrm{Hom}(L_p, (\mathcal{H}/L)_p)$ の横断的複素部分空間となり，補題 4.1 が適用される．

例 4.2 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$：S を $\mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造とする．即ち，$S \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$, $S^2 = -\mathrm{id}$. このとき，$S' = \{l \in \mathbb{H}P^n \mid Sl = l\}$ とおくと，S' は $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体で，n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に正則微分同型になる．

以下では，[9] において S-理論と呼ばれている理論の高次元化を試みる．$M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの横断的複素はめ込みとする．I を M の複素構造とし，M 上の（ベクトル空間に値をもつ）1-form ω に対して，$*\omega(X) = \omega(IX)$ とおき，$*\omega$ を定める．写像 $S : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ (or $S \in \Gamma(\mathrm{End}\ \mathcal{H})$) は $S^2 = -\mathrm{id}$ を満たしているとする．このような S に対して，$\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ (or $\mathrm{End}\ \mathcal{H}$)) に値を持つ M 上の 1-forms A^+, A^- を次で定義する（[9] §5）

$$A^+ = \frac{1}{4}(SdS + *dS), \quad A^- = \frac{1}{4}(SdS - *dS). \tag{4.1}$$

横断的複素はめ込み $f : M \to \mathbb{H}P^n$ に対して，補題 4.1 を適用することにより，複素構造の組 $J_1 \in \Gamma(\mathrm{End}L), J_2 \in \Gamma(\mathrm{End}\mathcal{H}/L)$ で，$df(IX) = df(X)J_1 = J_2df(X)$ を満たすものが存在することが分かる．(J_1, J_2) を拡張して $\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造 S を定義したい．即ち，$S \in \Gamma(\mathrm{End}\ \mathcal{H})$ で $S^2 = -\mathrm{id}$ を満たし

$$SL = L,\ S|_L = J_1,\ \pi_LS = J_2\pi_L \tag{4.2}$$

が成り立つものを考えたい．$S|_L = J_1, \pi_LS = J_2\pi_L$ 及び　$df(X)J_1 = J_2df(X)$ であることより，$dS(L) \subset L$ が導かれることに注意する．

定理 4.3 ([9] Theorem 2 の高次元版) M を $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体としてはめ込まれた（複素）n 次元複素多様体とし，$L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ をはめ込みに対応する $\mathbb{H}$ 直線部分束とする．このとき，次の条件を満たす複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\ \mathcal{H})$ がただ 1 つ存在する：

(1) $SL = L,\ dS(L) \subset L$

(2) $*df = dfS|_L = \pi_LSdf$

(3) $A^-|_L = 0$

定理 4.3 によって与えられる複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\ \mathcal{H})$ を横断的複素はめ込みの **Gauss 写像** と呼ぶ. Gauss 写像 S は $\mathbb{H}P^n$ の四元数構造のみによって定まり，$Q-$ 接続によらない. この S が $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体を四元数微分幾何の立場から論ずる際，有用であることが期待される.

$\mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造全体の集合を $\mathcal{S}$ で表す．即ち，

$$\mathcal{S} = \{\ S \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1}) \mid S^2 = -\mathrm{id}\ \}.$$

$\mathcal{S}$ は $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ の $2(n+1)^2$ 次元閉部分多様体となる． $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ の点における接ベクトル空間と $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ との同一視のもと，$S \in \mathcal{S}$ における接ベクトル空間 $T_S\mathcal{S}$ は次で与えられる：

$$T_S\mathcal{S} = \{\ X \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1}) \mid XS + SX = 0\ \}.$$

$\mathcal{S}$ には自然に擬エルミート対称空間の構造が入る．以下，それを説明する．スカラー乗法を実数に制限することにより $\mathbb{H}^{n+1}$ を実ベクトル空間とみて，$F \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ を実線形変換と見る．実線形変換としてのトレースを $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}F$ で表す． $X, Y \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ に対し

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{4(n+1)}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(XY)$$

とおくと， $\langle , \rangle$ は $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ における不定値内積になる．この不定値内積 $\langle , \rangle$ から，$\mathcal{S}$ に擬リーマン計量が誘導される．この擬リーマン計量の符号数は $((n+1)(n+2), n(n+1))$ (即ち標準形における正項の数が，$(n+1)(n+2)$ ，負項の数が，$n(n+1)$ である．また，$S \in \mathcal{S}, X \in T_S\mathcal{S}$ に対し，$JX = SX$ とおくと， J は $\mathcal{S}$ 上の複素構造になる．擬リーマン計量 $\langle , \rangle$ は J に対して不変である．即ち， $X, Y \in T_S\mathcal{S}$ に対し，$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$ が成り立つ．このようにして定められた擬エルミート構造に関して，$(\mathcal{S}, \langle , \rangle, J)$ は擬エルミート対称空間になる．横断的複素はめ込み $M \to \mathbb{H}P^n$ に対する Gauss 写像 $S : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ を M から $\mathcal{S}$ への写像と見る．このとき，$A^+ = 0$, $A^- = 0$ はそれぞれ， S が反正則写像, 正則写像であることを意味している.

$\mathbb{H}P^n$ に Q-接続 $\tilde{\nabla}$ が与えられているという設定で，横断的複素はめ込みの Gauss 写像について考える．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c$ を Q-接続 $\tilde{\nabla}$ に対応する自明束の分解とする.

命題 4.4 M を複素 n 次元複素多様体とし, $f : M \to \mathbb{H}P^n$ を横断的複素はめ込み，$S : M \to \mathcal{S} \subset \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ をそのガウス写像とする．さらに，$\mathbb{H}P^n$ に Q-接続 $\tilde{\nabla}$ が与えられているとする．このとき，次の 3 条件は互いに同値である：

(1) $Q|_M$ に誘導された接続 $\tilde{\nabla}$ に関して，$\tilde{I}$ は平行である.

(2) 第 2 基本形式の $(1,1)$-成分 σ_- について，$\sigma_- = 0$.

(3) ガウス写像 S が，L^c を保つ．即ち，$S(L^c) = L^c$.

命題 4.5 $\mathbb{H}P^n$ に四元数ケーラー構造 $(Q, \tilde{g})$ が導入されているとする． $f : M \to \mathbb{H}P^n$ を複素多様体 M からの全複素はめ込みとし，$S : M \to \mathcal{S} \subset \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ をそのガウス写像とす

る．このとき，M の各点で S は $\mathbb{H}^{n+1}$ のユニタリ変換である．さらに，$A^+ = 0$ ，従ってガウス写像 S は反正則写像である．

§3 例 3.3 で導入された $\mathbb{H}P^n$ のアファイン座標のもとで横断的複素部分多様体について論ずる．$M' \subset \mathbb{H}P^n$ をアファイン座標が導入されている開集合とする．M' は $\mathbb{H}^n$ と同一視され，ここでの四元数構造は $\mathbb{H}$ による右からのスカラー乗法によって与えられる．また，Q-接続として $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ の標準接続 $\tilde{\nabla}$ を考える．$M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの横断的複素はめ込みとし，その像は M' に含まれているとする．はめ込みに対応する $\mathbb{H}$ 直線部分束 $L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ に対し，はめ込み $f : M \to \mathbb{H}^n$ が存在して $L = [\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}]$ と表せる．補題 4.1 を適用することにより，写像 $\lambda : M \to \mathbb{H}$, $\lambda^2 = -1$, $N : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^n)$, $N^2 = -\mathrm{id}$ で

$$*df = Ndf = -df\lambda \tag{4.3}$$

を満たすものが一意的に存在することが分かる．また，各点 $p \in M$ で M の接ベクトル空間 $df(T_pM)$, 法空間 $T_p^{\perp}M$ は次で与えられる：

$$df(T_pM) = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N(p)v = -v\lambda(p)\}, \quad T_p^{\perp}M = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N(p)v = v\lambda(p)\} \tag{4.4}$$

標準接続 $\tilde{\nabla}$ から M に誘導される接続を ∇, 第 2 基本形式を σ で表す．このとき，次が成立する：

補題 4.6 $X, Y \in TM$ に対し，

(1) $*d\lambda = \lambda d\lambda = -d\lambda\lambda$

(2) $dN \wedge df = df \wedge d\lambda$ 即ち $dN(X)df(Y) - dN(Y)df(X) = df(X)d\lambda(Y) - df(Y)d\lambda(X)$

(3) $(*dN)(X)df(Y) = -NdN(X)df(Y) + 2Ndf(X)d\lambda(Y)$

(4)

$$\begin{aligned}
N\sigma(X,Y) &= -\frac{1}{4}\{dN(X)df(Y) + dN(Y)df(X) + df(X)d\lambda(Y) + df(Y)d\lambda(X)\} \\
N\sigma_+(X,Y) &= \frac{1}{4}\{-dN(X)df(Y) - dN(Y)df(X) + df(X)d\lambda(Y) + df(Y)d\lambda(X)\} \\
N\sigma_-(X,Y) &= -\frac{1}{2}\{df(X)d\lambda(Y) + df(Y)d\lambda(X)\}
\end{aligned}$$

(4)' (4) の別表示.

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(*df)(Y)d\lambda(X) - dN(X)(*df)(Y)\} \\
\sigma_+(X,Y) &= -\frac{1}{2}\{dN(X)(*df)(Y) + (*df)(X)d\lambda(Y)\} \\
\sigma_-(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(*df)(X)d\lambda(Y) + (*df)(Y)d\lambda(X)\}
\end{aligned}$$

定理 4.3 の複素構造 S をアファイン座標のもとで求める．$\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の枠場 $\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, e_2, \cdots, e_{n+1}$ に関して S を行列表示する．即ち，$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & I_n \end{pmatrix}$ とおき，$S = GPG^{-1}$ という形で表す． $SL = L$ という条件より，

$$SG = G \begin{pmatrix} -\lambda & \eta \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{H},\ {}^t\eta \in \mathbb{H}^n,\ N \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^n) \tag{4.5}$$

$$S^2 = -I_{n+1} \iff \lambda^2 = -1,\ \lambda\eta = \eta N,\ N^2 = -I_n \tag{4.6}$$

$$\text{定理 4.3 (2) の条件式} \iff *df(X) = Ndf(X) = -df(X)\lambda,\ X \in TM \tag{4.7}$$

$$dS = G \begin{pmatrix} -d\lambda - \eta df & d\eta \\ 0 & df\eta + dN \end{pmatrix} G^{-1} \tag{4.8}$$

$$4A^- = SdS - *dS = G \begin{pmatrix} 2\lambda d\lambda - 2\eta df\lambda & -\lambda d\eta + \eta df\eta + \eta dN - *d\eta \\ 0 & NdN - *dN \end{pmatrix} G^{-1} \tag{4.9}$$

$$A^-|_L = 0 \iff d\lambda = -\eta df \tag{4.10}$$

命題 4.7 定理 4.3 で定まる複素構造 S を (4.5) のように表したとき次が成立する：

$$dS = G \begin{pmatrix} 0 & d\eta \\ 0 & df\eta + dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

$$4A^+ = G \begin{pmatrix} 0 & -(d\eta)N + *d\eta \\ 0 & 2Ndf\eta + NdN + *dN \end{pmatrix} G^{-1},\ 4A^- = G \begin{pmatrix} 0 & -(d\eta)N - *d\eta \\ 0 & NdN - *dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

また，第 2 基本形式について次が成立する：

$$2N\sigma_-(X, Y) = df(X)\eta df(Y) + df(Y)\eta df(X). \tag{4.11}$$

命題 4.8 アファイン座標のもとで，$\sigma_- = 0$ ならば， $A^+ = 0$. 従ってガウス写像 S は反正則写像である．

定理 4.9 M を $\mathbb{H}P^n$ に横断的複素部分多様体としてはめ込まれた複素 n 次元複素多様体とする． M 上 $\sigma_+ = 0$ ならば，ガウス写像 $S : M \to \mathcal{S}$ は定値写像である．特に，M はこの S から例 4.2 のように定まる $\mathbb{C}P^n$ の開部分多様体になる．

定理 4.9 の証明の概略 M に対して定まる $\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の $\mathbb{H}$ 直線部分束を L で表す．また，定理 4.3 によって唯一つ定まる $\mathcal{H}$ の複素構造を $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$(あるいは$S : M \to \mathrm{End}\,\mathbb{H}^{n+1}$) とする．$M$ の各点に対しこの点 を含む $\mathbb{H}P^n$ のアファイン座標を導入して議論する．このとき，アファイン座標を用いて求めた σ_+ も消えている（命題 2.8 の後の注意 (2) ）．補題

4.6 を用いて議論することにより， $dS = 0$ を得る． 従って， S は M の点によらず一定. この S から 例 4.2 によって定まる複素射影空間を $\mathbb{C}P^n$ とする． $S(L) = L$ であったので, $M \subset \mathbb{C}P^n$. M と $\mathbb{C}P^n$ との次元の関係によって，M は $\mathbb{C}P^n$ の開部分多様体になることが分かる.

注意 4.10 定理 4.3 で定まる複素構造 S の幾何学的な意味：アファイン座標のもとで考える． $p \in M$ を固定する．

$$S_p = G \begin{pmatrix} -\lambda_p & \eta_p \\ 0 & N_p \end{pmatrix} G^{-1}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(p) & I_n \end{pmatrix}$$

S_p によって接ベクトル空間は定まる．即ち，$df(T_pM) = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N_p v = -v\lambda_p\}$．また，第 2 基本形式の $(1,1)$ 成分 σ_- も命題 4.7 で与えられた公式 (4.11) によって定まる．固定された S_p から定まる複素射影空間を S'_p で表す．即ち， $S'_p = \{l \in \mathbb{H}P^n \mid S_p l = l\}$．このとき，$S'_p$ は p を含み，この点での接ベクトル空間は，M の接ベクトル空間に一致し，かつ σ_- も一致することが上の議論から分かる．また，命題 2.8 後の注意 (3) により，σ_- が一致するのは，$\tilde{Q}$-接続の選び方によらない．文献 [9] では，$S^4 = \mathbb{H}P^1$ の 曲面 M に対して定まる複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\ \mathcal{H})$ を **the mean curvature sphere** of M と呼んでいる．

〈 **今後の課題** 〉

四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体について，今後次のような問題について取り組みたいと考えている：

(1) 全複素部分多様体ではない横断的複素部分多様体で興味深い例を見出す.

(2) 例 2.4 で述べた対称部分多様体となる全複素部分多様体の σ_+ やガウス写像 S を用いた特徴付け.

(3) コンパクト横断的複素部分多様体に対する汎関数をガウス写像の言葉で定義し，その変分問題を考察する．[9] では，mean curvature sphere (上記 注 4.10 参照) を用いて Willmore 汎関数を再定式化し，そのもとで，Willmore 汎関数に関する問題にアプローチしている．彼らの研究の高次元化を目指したい.

§5 対称四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体 – 複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ を中心に

四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の複素部分多様体の研究をほかの対称四元数ケーラー多様体の場合に拡張したい．リーマン部分多様体論の観点から全複素部分多様体を中心に考えることにする.

対称四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体を対象とする先行研究の基本的な結果として，竹内勝による（半分次元）全測地的全複素部分多様体の構成，分類 ([26]) が知られている．コンパクト型（あるいは非コンパクト型）対称四元数ケーラー多様体 $\tilde{M}$ とその（半分次元）完備全測地的全複素部分多様体 M の組 $(\tilde{M}, M)$ と佐竹図形のあるクラスとの 1 対 1 対応を与えるという美しい理論である．$\tilde{M}$ がコンパクト型で古典型の場合の表を引用しておく.

$\tilde{M}$	M	注
$\mathbb{H}P^n$	$\mathbb{C}P^n$	$n \geq 2$
$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$	$\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$	$0 \leq p \leq q, \quad p+q=n \geq 2$
$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$	$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$	$n \geq 2$
$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$	$(Q^p \times Q^q)/\mathbb{Z}_2$	$0 \leq p \leq q, \quad p+q=n \geq 3$
$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{2n+4})$	$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$	$n \geq 3$

ここで， $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ は $\mathbb{C}^{n+2}$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体, $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ の (向きを考えない) 2 次元部分空間全体の なす実グラスマン多様体, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$ は $\mathbb{R}^{n+4}$ の向きづけられた 4 次元部分空間全体の なす実グラスマン多様体，Q^p は複素 p 次元複素 2 次超曲面をそれぞれ表す.

講演者は，対称四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体について，次のような方針で研究を進めている：個別の対称四元数ケーラー多様体について

(1) 四元数構造を具体的に記述し，その幾何学的特徴を明らかにする.

(2) ツイスター空間の幾何学的実現，幾何学的特徴を明らかにする.

(3) (1),(2) をもとに，全複素部分多様体の興味深い例を構成する.

(4) (1),(2) をもとに，全複素部分多様体の幾何学と他の幾何学との連関を明らかにする.

(5) 全複素部分多様体の興味深いクラスの分類：等質であるもの，(4) の視点からの特徴付け，等.

統一的な理論を目指すのではなく，個別具体的な多様性の豊かさを明らかにしたいと思っている．ここでは，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の場合の研究結果 ([28]) を述べたい. ほかにも，実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$, 結合的グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ についても取り組んでいるが，まだ十分な成果が得られていない．なお，木村真琴 ([18]) は非平坦複素空間型の実超曲面と複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ ，$\mathbb{C}_1^{n+2}$ の不定値複素 2 次元部分空間のなす複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}_1^{n+2})$，それらのツイスター空間との幾何学的な関係について興味深い研究を行っている．ここで，$\mathbb{C}_1^{n+2}$ は指数 1 の不定値複素ベクトル空間を表す.

$\mathbb{C}^{n+2}$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ は, ケーラー構造と四元数ケーラー構造という 2 つの興味深い構造が入り, その相互の関係も興味深い．最初に，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の四元数ケーラー構造を具体的に与え，その四元数ケーラー構造から定まるツイスター空間が複素射影空間の射影余接束になることを述べる.

まず，複素多様体の射影余接束に標準的に定義される正則接触構造について述べる．参考文献として， [12], [19] をあげておく．$\tilde{M}$ を複素 $n+1$ 次元複素多様体とし，$T^*\tilde{M}$ を $\tilde{M}$ 上の複素 1 次形式全体のなす余接束とする．$\mathrm{P}(T^*\tilde{M}) = (T^*\tilde{M} - \{\text{the zero section}\})/\mathbb{C}^\times$ を射影余接束とする．ここで，$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ は複素スカラー倍として $T^*\tilde{M}$ に作用している. $\mathrm{P}(T^*\tilde{M})$ は，底空間を $\tilde{M}$ とし，ファイバーが n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ であるファイバー束である．$\mathrm{P}(T^*\tilde{M})$ には正則接触構造が次のように定義される: $T^*\tilde{M}$ 上に正則 1 次微分形式 ω を次で定める：

$$\omega(u) = v(\pi_{1*}(u)), \qquad u \in T_v(T^*\tilde{M})$$

ここで, $\pi : T^*\tilde{M} \to \tilde{M}$ は射影，π_* はその微分を表す． $\tilde{M}$ の局所座標系 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ から誘導される $T^*\tilde{M}$ の局所座標系を $z_0, z_1, \cdots, z_n, \zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$ とする．このとき，ω は次のように表される：

$$\omega = \zeta_0 dz_0 + \zeta_1 dz_1 + \cdots + \zeta_n dz_n.$$

この ω を用いて，$\mathrm{P}(T^*\tilde{M})$ 上に正則接触構造が定義される．

$\varphi : M \to \tilde{M}$ を複素多様体 M から，$\tilde{M}$ への正則はめ込みとする．このとき，射影法余接束 $\mathrm{P}(N^*M)$ を

$$\mathrm{P}(N^*M) = \{\ (x, \omega) \in M \times \mathrm{P}(T^*\tilde{M})\ |\ \varphi(x) = \pi(\omega), \omega(d\varphi_x(T_xM)) = 0\ \}$$

と定め，$\mathrm{P}(T^*\tilde{M})$　への写像 $\hat{\varphi}$ を

$$\hat{\varphi} : \mathrm{P}(N^*M) \to \mathrm{P}(T^*\tilde{M}),\ (x, \omega) \mapsto \omega$$

と定める．このとき，$\hat{\varphi}$ は正則接触構造に関しルジャンドルはめ込みとなる．

Fillmore ([12]) の論文に従い，複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ を具体的に与える．$\mathbb{C}^{n+2}$, $(\mathbb{C}^{n+2})^*$ で，それぞれ $n+2$ 項複素列ベクトル空間，行ベクトル空間を表す. $\mathbb{C}^{n+2} \times (\mathbb{C}^{n+2})^*$ の複素部分多様体 P を次式で定める：

$$P = \{\ (z, w) \in (\mathbb{C}^{n+2} - \{0\}) \times ((\mathbb{C}^{n+2})^* - \{0\})\ |\ wz = 0\ \}.$$

複素 Lie 群 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ の P への作用を

$$R_{(\lambda,\mu)}(z, w) = (\lambda z, \mu^{-1} w) \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \tag{5.1}$$

で定義する．このとき，複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ は，$P/\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ と表すことができる．P 上の正則 1 次微分形式

$$\tilde{\eta} = w\ dz = \sum_{i=1}^{n+2} w_i\ dz^i$$

は，$\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ 上の標準的な正則接触構造を定める．

複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の四元数構造から定まるツイスター空間との関係を見るために，$n+2$ 項複素列ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+2}$ に標準的なエルミート内積 $\langle z, w \rangle_\mathbb{C}$，ユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入し，$\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ の別の表示を与える．

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle_\mathbb{C} &= {}^t\bar{z}w = \sum_{i=1}^{n+2} \bar{z}^i w^i \qquad \text{for } z, w \in \mathbb{C}^{n+2} \\ \langle\ ,\ \rangle &= \text{the real part of } \langle\ ,\ \rangle_\mathbb{C}. \end{aligned}$$

$n+2$ 行 2 列複素行列全体の集合を $\mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})$ で表し，標準的なエルミート内積，ユークリッド内積を与える：

$$\begin{aligned} \langle Z, W \rangle_\mathbb{C} &= \text{trace } {}^t\bar{Z}W \qquad \text{for } Z, W \in \mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C}) \\ \langle\ ,\ \rangle &= \text{the real part of } \langle\ ,\ \rangle_\mathbb{C}. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^{n+2}$ のユニタリ 2-系全体のなす複素スティーフェル多様体を $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ で表す．$\mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})$ の部分多様体として，次のように表される：

$$\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) = \{\ Z = (z_1, z_2) \in \mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{Z}Z = I_2\ \}.$$

$G = \mathrm{SU}(n+2)$ 及び $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ の $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ への作用をそれぞれ次で定める：
$Z = (z_1, z_2) \in \mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\rho(g)(Z) = gZ = (gz_1, gz_2) \qquad\qquad g \in G = \mathrm{SU}(n+2)$$

(5.2)
$$R_{(\lambda,\mu)}(Z) = Z \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = (\lambda z_1, \mu z_2) \qquad\qquad (\lambda, \mu) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$$

このとき，$\rho(G)$ は $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ に推移的に作用し，G の作用 ρ と $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ の作用は可換である．包含写像 $\tilde{\psi} : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to P$ を次で定義する：
$Z = (z_1, z_2) \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ に対して，

$$\tilde{\psi}(Z) = \tilde{\psi}(z_1, z_2) = (z_1, \langle z_2, \cdot\ \rangle_{\mathbb{C}}) = (z_1, {}^t\bar{z}_2).$$

このとき，$\tilde{\psi}$ は埋め込み（imbedding）であり，$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ の作用に関して同変写像になる:

$$\tilde{\psi}(R_{(\lambda,\mu)}(z_1, z_2)) = R_{(\lambda,\mu)}\tilde{\psi}(z_1, z_2) \qquad\qquad (\lambda, \mu) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$$

$\psi = \tilde{\pi} \circ \tilde{\psi} : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ とおく．ここで, $\tilde{\pi} : P \to \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ は射影を表す．このとき, ψ は $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ を構造群としてもつ主ファイバー束となる．

複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ のケーラー構造，四元数ケーラー構造を記述する．参考文献として，[6],[23] をあげておく．群 $\mathrm{U}(2)$ は $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ に右から自由に作用している：

$$R_a(Z) = Za \qquad Z \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}), \quad a \in \mathrm{U}(2)$$

自然な射影 $\pi_2 : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$　$Z = (z_1, z_2) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\ \{z_1, z_2\}$ は $\mathrm{U}(2)$ を構造群にもつ主ファイバー束である．$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ は，$\mathrm{U}(2)$ の閉部分群であるから，全射写像 $\pi : \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ が存在し，次の可換図式が成立する：

(5.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\pi_2"'] & \\
 & P(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[dl, "\pi"] \\
\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}) &
\end{tikzcd}$$

特に，写像 $\pi : \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ は，標準ファイバー $\mathrm{U}(2)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ 　をもつ随伴束である．$Z \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ における $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の接ベクトル空間は，$\mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})$ 　の実部分空間として次のように表される:

$$T_Z\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) = \{\ W \in \mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})\ \mid\ {}^t\bar{W}Z + {}^t\bar{Z}W = 0\ \}.$$

$T_Z\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の部分空間 $\mathcal{V}_Z$ を次で定める：

$$\mathcal{V}_Z = \{\ ZA\ \mid\ A \in \mathfrak{u}(2)\ \}.$$

$\mathcal{V}_Z$ は主ファイバー束 $\pi_2 : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の Z におけるファイバーに接する部分空間である．$T_Z\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ におけるユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathcal{V}_Z$ の直交補空間 $\mathcal{H}_Z$ は次のように表される：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_Z &= \{\ W \in T_Z\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})\ \mid\ {}^t\bar{Z}W = 0\ \} \\ &= \{\ W = (w_1, w_2) \in \mathrm{M}_{n+2,2}(\mathbb{C})\ \mid\ w_1, w_2 \in \pi_2(Z)^{\perp}\ \}\end{aligned}$$

ここで，$\pi_2(Z)^{\perp}$ は $\mathbb{C}^{n+2}$ における $\pi_2(Z)$ の直交補空間を表す．上の式より，任意の $a \in \mathrm{U}(2)$ に対して $\mathcal{H}_{Za} = \mathcal{H}_Z$, $R_{a*}(\mathcal{H}_Z) = \mathcal{H}_Z$ が導かれる．このことは，$\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \ni Z \mapsto \mathcal{H}_Z \subset T_Z\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ は，主ファイバー束 $\pi_2 : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 　の接続になっていることを意味している．$\mathcal{H}_Z$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は，$\mathrm{U}(2)$ の右からの作用で不変ゆえ， $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上のリーマン計量 $\tilde{g}$ を定める．

各 $Z \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ で， $\mathcal{H}_Z$ は $\mathrm{U}(2)$ の作用で不変ゆえ，その Lie 環 $\mathfrak{u}(2)$ の作用でも不変となる．さらに次の関係式が成立する：

$$R_{a*}(WA) = R_{a*}(W)\mathrm{Ad}(a^{-1})A \qquad \text{for } W \in \mathcal{H}_Z, a \in \mathrm{U}(2), A \in \mathfrak{u}(2).$$

$\mathfrak{u}(2)$ の作用を用いて，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ にケーラー構造，四元数ケーラー構造を定義する．$\mathfrak{u}(2)$ は次のように，Lie 環の直和として分解される：

$$\mathfrak{u}(2) = \mathbb{R}\varepsilon_0 + \mathfrak{su}(2), \quad \varepsilon_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

ε_0 の作用により，ケーラー構造 $\tilde{I}$ 　が定義され, $\mathfrak{su}(2)$ の作用により，四元数ケーラー構造 $\tilde{Q}$ が定義される．以下で，より詳しく説明する．
各 $A \in \mathfrak{u}(2)$ に対し, 線形変換 $\tilde{J}_A \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_Z)$ を次で定義する：

$$\tilde{J}_A W = WA \qquad \text{for } W \in \mathcal{H}_Z.$$

$\mathfrak{u}(2)$ の基底 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ を次で与える：

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

さらに， $\tilde{J}_i = \tilde{J}_{\varepsilon_i}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とおく．このとき，次が成立する：

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
&\tilde{J}_i^2 = -\mathrm{id} \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \tilde{J}_0\tilde{J}_i = \tilde{J}_i\tilde{J}_0 \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\tilde{J}_1\tilde{J}_2 = \tilde{J}_3, \quad \tilde{J}_2\tilde{J}_3 = \tilde{J}_1, \quad \tilde{J}_3\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2.
\end{aligned}
$$

特に，$W \in \mathcal{H}_Z$ に対し，$\tilde{J}_0 W = \sqrt{-1}W$ となる．ε_0 は $\mathrm{U}(2)$ の随伴表現 $\mathrm{Ad}(\mathrm{U}(2))$ で不変ゆえ， $\mathcal{H}_Z$ の線形変換 $\tilde{J}_0$ は $\mathrm{U}(2)$ の右からの作用で不変．これより，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の概複素構造を定める．これを，$\tilde{I}$ で表す． $(\tilde{I}, \tilde{g})$ は $G = \mathrm{SU}(n+2)$ の作用で不変ゆえ，$(\tilde{I}, \tilde{g})$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上のケーラー構造となる．

次に，$\mathrm{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の四元数構造 $\tilde{Q}$ を定義しよう．$Z \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ における $\mathcal{H}_Z$ の線形変換 $\tilde{J}_A$ を $(d\pi_2)_Z$ によって $T_{\pi_2(Z)}\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の線形変換に移す．このようにして得られた線形変換を $\tilde{J}(Z, A)$ で表す．$Z, Z' \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ と $A, A' \in \mathfrak{su}(2)$ に対し，$\tilde{J}(Z, A) = \tilde{J}(Z', A')$ が成り立つための必要十分条件は $a \in \mathrm{U}(2)$ で $Z' = Za$, $A' = \mathrm{Ad}(a^{-1})A$ を満たすものが存在することである．$\mathrm{U}(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現による，随伴束 $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \times_{\mathrm{U}(2)} \mathfrak{su}(2)$ を考える．このとき，$[(Z, A)] \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \times_{\mathrm{U}(2)} \mathfrak{su}(2)$ に対して，$\mu([(Z, A)]) = \tilde{J}(Z, A)$ とおくことにより，埋め込み (imebedding) μ: $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \times_{\mathrm{U}(2)} \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{End}(T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}))$ を定義することができる．μ は束準同型である．像 $\mu(\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \times_{\mathrm{U}(2)} \mathfrak{su}(2))$ を $\tilde{Q}$ とおく．$\tilde{Q}$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の概四元数構造となる．$\tilde{Q}$ は，$\mathrm{End}(T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}))$ の中で，$G = \mathrm{SU}(n+2)$ の作用で不変であることから， $(\tilde{Q}, \tilde{g})$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 上の四元数ケーラー構造であることが分かる．

最後に，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の四元数構造から定まるツイスター空間が複素射影空間の射影余接束になることを示す．$S = \{\ A \in \mathfrak{su}(2) \mid A^2 = -\mathrm{id}\ \}$ とおく．S は 2 次元球面である．$\mathrm{U}(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現は S に推移的に作用する．従って，束準同型 μ は $\mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \times_{\mathrm{U}(2)} S$ から ツイスター空間 $\mathcal{Z} \subset \tilde{Q}$ of $\mathrm{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の上への写像となる．$\mathrm{U}(2)$ の作用の $\varepsilon_1 \in \mathfrak{su}(2)$ における等方部分群は $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ である．これより，$Z \in \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ に対して, $\phi(Z) = \mu([(Z, \varepsilon_1)]) = \tilde{J}(Z, \varepsilon_1)$ とおくことにより，$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ を構造群としてもつ主ファイバー束 $\phi : \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to \mathcal{Z}$ が定まる．特に，複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ からツイスター空間 $\mathcal{Z}$ への束同型写像 φ が定義されて，次の可換図式が成立する：

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{V}_2(\mathbb{C}^{n+2}) \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
P(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{Z} \arrow[dl, "\pi"] \\
 & \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}) &
\end{tikzcd}
$$

さらに， φ は，2 つ の複素多様体間の写像として正則写像であり，それぞれの正則接触構造が φ によって移されることが示される．その議論は省略する．以上から，次が示された．

定理 5.1 複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ は図式 (5.3) によって，四元数ケーラー多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ 　のツイスター空間とみることができる．より正確には，$\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ 　の複素構造と四元数多様体のツイスター空間として定まる複素構造は一致し，射影余接束として定まる正則接触構造と四元数ケーラー多様体のツイスター空間として定まる正則接触構造は一致する．

命題 2.3 及び 定理 5.1 を応用して，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の全複素部分多様体を構成することができる．次のファイブレーションに注目する：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2}) & & \mathbb{C}P^{n+1} \end{tikzcd}$$

$\varphi : M \to \mathbb{C}P^{n+1}$ を複素 m 次元複素多様体 M から，複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ への正則はめ込み (a holomorphic immersion) とし，$\hat{\varphi} : \mathrm{P}(N^*M) \to \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1})$ を射影法余接束 $\mathrm{P}(N^*M)$ から $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{m+1})$ へのルジャンドルはめ込みとする．$\tilde{\varphi} = \pi \circ \hat{\varphi} : \mathrm{P}(N^*M) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ とおく．ここで，$\pi : \mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{n+1}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ はツイスター空間からの射影である．このとき，命題 2.3 によって， $\tilde{\varphi}$ は半分次元の全複素はめ込み（a totally complex immersion）である．

命題 5.2 複素 m 次元複素多様体 M から，複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ への正則はめ込み (a holomorphic immersion) とする．このとき, $\tilde{\varphi} : \mathrm{P}(N^*M) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ は，半分次元の全複素はめ込みである．特に， $\varphi : M \to \mathbb{C}P^{n+1}$ をはめ込まれた複素超曲面とすると，M から $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ への全複素はめ込みが得られる．

命題 5.2 により，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の全複素部分多様体の例がたくさん構成できることが分かる．

等質部分多様体となる例を構成しよう．$\mathbb{C}^{n+2}$ のユークリッド内積 $\langle\, ,\, \rangle$ = the real part of $\langle\, ,\, \rangle_{\mathbb{C}}$ から誘導される $\mathbb{C}P^{n+1}$ のフビニ-スタディ計量を考える．この計量に関する正則等長変換群は， $\mathrm{PU}(n+2) = \mathrm{SU}(n+2)/\{\ cI_{n+2} \mid c \in \mathbb{C} \text{ with } c^{n+2} = 1\ \}$ である．M.Buchner, K.Fritzsche，T.Sakai([7]) に従い，法等質部分多様体 (normally homogeneous submanifolds) の定義を与える．

定義 5.3 M を $\mathbb{C}P^{n+1}$ に埋め込まれた閉連結部分多様体とする．$\mathrm{PU}(n+2)$ の閉連結部分群 G が存在し, M は G の軌道であり，ある $x \in M$ での等方部分群 G_x が x での単位法ベクトルに推移的に作用しているとき，M は**法等質部分多様体** (a normally homogeneous submanifold) と呼ばれる．

明らかに，定義 5.3 はどんなリーマン多様体に対しても設定できる．

Buchner,Fritzsche and Sakai ([7]) は， $\mathbb{C}P^{n+1}$ 　の法等質複素部分多様体を分類した．

定理 5.4 ([7] Theorem 4.2) 複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ の法等質複素部分多様体は次のものに限る．

(1) 線形部分空間 $\mathbb{C}P^k \to \mathbb{C}P^{n+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n.$

(2) セグレ埋め込み $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^{2m+1}$.

(3) 2 次超曲面 $Q^n \to \mathbb{C}P^{n+1}$.

(4) プリュッカー埋め込みによる　グラスマン多様体 $\mathrm{G}_2(\mathbb{C}^5) \to \mathbb{C}P^9$.

(5) スピン表現による　エルミート対称空間 $\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5) \to \mathbb{C}P^{15}$.

ここで，$\mathbb{C}P^0$ は，$\mathbb{C}P^{n+1}$ の 1 点を表している．

M を複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ の法等質複素部分多様体とすると， $N = \pi(\mathrm{P}(N^*M))$ は 複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の等質（局所）全複素部分多様体になる．逆も成立する．

定理 5.5 N を $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の半分次元の（局所）全複素部分多様体とする．N が等質部分多様体ならば，$\mathbb{C}P^{n+1}$ の法等質複素部分多様体 M が存在し，$N = \pi(\mathrm{P}(N^*M))$　となる．

複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ がもつもう一つの幾何構造であるケーラー構造 $\tilde{I}$ に関係する性質を利用した特徴付けについての結果を紹介する．
$(\tilde{M}, \tilde{I}, \tilde{g})$ をケーラー多様体とし，N をその部分多様体とする．N の各点 $x \in N$ で $\mathcal{D}_x = T_xN \cap \tilde{I}T_xN$ とおいて $\mathcal{D}_x$ を定義する．部分多様体 N が CR-部分多様体であるとは，$\mathcal{D}_x$ の次元がすべての点 $x \in N$ で同じであり，その直交補空間 $\mathcal{D}^\perp$ が全実（totally real)，即ちすべての点 $x \in N$ で $\tilde{I}\mathcal{D}_x^\perp \subset T_x^\perp N$ を満たすときをいう（[4]）．

定理 5.6 N を $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の半分次元の（局所）全複素部分多様体とする．N がケーラー構造 $\tilde{I}$ に関して CR-部分多様体であるならば，$\mathbb{C}P^{n+1}$ の法等質複素部分多様体 M が存在し, N は $\pi(\mathrm{P}(N^*M))$ に局所合同である．

全測地的部分多様体について次のような特徴付けも得られた．

定理 5.7 N を $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の半分次元の（局所）全複素部分多様体とする．N がケーラー構造 $\tilde{I}$ に関して 複素部分多様体ならば，全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^n$ または $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^{n-k}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ に局所合同である．N が全実部分多様体ならば，全測地的部分多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ に局所合同である．ここで, $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ の 2 次元部分空間全体のなす実グラスマン多様体を表す.

⟨ 今後の課題 ⟩

実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$, 結合的グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ についても同様の結果をえたい．即ち，
· ツイスター空間の幾何学的実現，幾何学的特徴を明らかにする．
· 全複素部分多様体の興味深い例を構成する．

参考文献

[1] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures*, Ann. Mat. Pura and Appl. 171(1996),205-273

[2] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *Hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. 38(2001), 869-904

[3] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold* , Annali di Mat. 184(2005),53-74

[4] A.Bejancu : *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I*, Proc. Amer. Math. Soc. 69(1978), 134-142

[5] A.L.Besse : *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987,Berlin

[6] J.Berndt : *Riemannian geometry of complex two-plane Grassmannians*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 55(1997), 19-83

[7] M.Buchner, K.Fritzsche and T.Sakai: *Geometry and cohomology of certain domains in the complex projective space*, J.Reine. Angew. Math. 323(1981), 1-52

[8] J.Buczynski: *Algebraic Legendrian varieties*, 2009

[9] F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkall : *Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol.1772, Springer, Berlin,2002

[10] F.E.Burstall and J.H.Rawnsley : *Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol.1424, Springer, Berlin,1990

[11] V.Cortes : *A new construction of homogeneous Quaternionic manifolds and related geometric structures* ,Memoirs of A.M.S. 700(2000)

[12] J.P.Fillmore : *Hermitean quadrics as contact manifolds*,Rocky Mountain J. of Math. 14(1984), 559-571

[13] S.Funabashi : *Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold*, Kodai Math.J. 2(1979), 314-336

[14] R.Harvey : *Spinors and Calibrations*, Perspectives in Mathematics,Vol. 9 (1990)

[15] R.Harvey and H.B.Lawson: *Calibrated geometries*, Acta Math. 148(1982), 47-157

[16] S.Ishihara : *Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold*, Tohoku Math. J. 9(1959), 273-297

[17] D.D.Joyce : *Compact hypercomplex and quaternionic manifolds*, J. of Differential Geometry 35(1992), 743-761

[18] 木村真琴 : *Gauss map of real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor space of complex 2-plane Grassmannian* , 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会特別講演，2019 年 9 月，金沢大学

[19] S.Kobayashi : *Remarks on complex contact manifolds*, Proc. A.M.S. 10(1959), 164-167

[20] S. Kobayashi and K. Nomizu: *Foundations of differential geometry* , Wiley, New York, II(1969)

[21] J.M.Landsberg and L.Manivel: *Legendrian varieties*, Asian J. Math.,11(2007), 341-360

[22] 松島与三: 多様体入門， 裳華房

[23] Y.Miyata : *A characterization of certain Einstein Kähler hypersurfaces in a complex Grassmann manifold of* 2*-planes*, Tokyo. J. Math.,28 (2005), 443-461

[24] A.Newlander and L.Nirenberg: *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math.,65(1957), 391-404

[25] S.Salamon:*Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math., 67(1982),143-171

[26] M.Takeuchi : *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan J. Math. 12(1986), 161-189

[27] K.Tsukada : *Parallel submanifolds in a quaternion projective space*, Osaka J. Math. 22(1985), 187-241

[28] K. Tsukada : *Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes*, Differential Geometry and its Applications, vol.44(2016),30–51

[29] K. Tsukada : *Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space*, in Hermitian-Grassmannian submanifolds, edited by Y.J.Suh, Y.Ohnita, J.Zhou, B.H.Kim, H.Lee, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 203(2017), 223-233.

[30] K.Tsukada : *The Gauss maps of transversally complex submanifolds of a quaternion projective space*, to appear in Tohoku Math. J.

[31] J.A. Wolf :*Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. of Math. and Mech. 14(1965),1033-1047