芥川和雄 (東工大理工)

Title : 「山辺不変量と singular Einstein 計量—小林プログラムについて—」

Abstract : この講演の一部は，Gilles Carron(ナント大) と Rafe Mazzeo(スタンフォード大) との共同研究に基づいている．

閉多様体の微分位相不変量である山辺不変量の基本問題は,

(1) **山辺不変量を達成する (一般には退化した特異)Einstein 計量を求めること**,

(2) **山辺不変量の値を求めること・評価すること**,

の二つである．(2) は十分に難しい問題であるが，3・4 次元では大きな進歩があった．特に 3 次元では，Ricci flow の研究の発展より,（山辺不変量が正の場合を除いて）完全に解決した．(1) はさらに難しい問題で，最近まで大きな進歩はなかった．これに関する一つのアプローチとして,（私が**小林プログラム**と呼んでいる）興味深いものが存在する．しかしながらそれも第一歩をどう進んでよいか分からない問題であった．最近漸く，n 次元球面 S^n 上のある **edge-cone Einstein 計量の族**を考えることにより，問題 (1) に関して興味深い現象が成立することが分かってきた．

一方，山辺の問題は (殆どリーマン的な) コンパクト測度距離空間と呼ばれる特異空間 (X,d,μ) 上で定義され，その**山辺定数** $Y(X,d,\mu)$ および**局所山辺定数** $Y_\ell(X,d,\mu)$ が定義され，さらに **Aubin 型の不等式**

$$Y(X,d,\mu) \leq Y_\ell(X,d,\mu)\ (\,\leq Y(S^n)\,)$$

が成立する．局所山辺定数 $Y_\ell(X,d,\mu)$ は，X の (正則部分には依存せず) 特異部分のみで決まる定数である．したがって，(X,d,μ) が通常の C^∞ 級多様体である場合は，$Y_\ell(X,d,\mu) = Y(S^n)$ である．上記の不等式が strict な不等式 $Y(X,d,\mu) < Y_\ell(X,d,\mu)$ であるとき, 山辺の問題は可解である．等号成立 $Y(X,d,\mu) = Y_\ell(X,d,\mu)$ の場合は，特異空間上では山辺の問題は一般に可解ではないことが知られている．この一連の研究が，上記の問題 (1) と関係して来ることになる．

本講演では，先ず特異空間上の山辺の問題と山辺計量の存在定理を紹介し，上記の問題 (1) に関する現在進行中の結果とその考察を行う．

参考文献

[1] 芥川和雄,「山辺不変量」, **数学・論説 66**, 日本数学会 (2014), 31–60.

[2] K. Akutagawa, B. Botvinnik, O. Kobayashi and H. Seshadri, *The Weyl functional near the Yamabe invariant*, **J. Geom. Anal. 13** (2003), 1–20.

[3] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, *The Yamabe problem on stratified spaces*, **Geom. Funct. Anal. 24** (2014), 1039–1079.

[4] —, *The Yamabe problem on Dirichlet spaces*, to appear in a survey of **Mathematical Science Center** in Tsinghua University (2015), arXiv:1306.4373.

[5] —, *Hölder regularity of solutions for Schrödinger operators on stratified spaces*, **J. Funct. Anal. 269** (2015), 815–840.

[6] M. Atyah and C. LeBrun, *Curvature, cones and Characteristic numbers*, **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 155** (2013), 13–37.

[7] 小林治，芥川和雄，井関裕靖,「山辺の問題」, **数学メモアール第 7 巻**, 日本数学会 (2013), 75 pp.

[8] I. Mondello, *The local Yamabe constant of Einstein stratified spaces*, preprint (2014), arXiv:1411.7996.

[9] J. Viaclovsky, *Monopole metrics and the orbifold Yamabe problem*, **Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 60** (2010), 2503–2543.