講演題目：対称空間とグラスマン幾何

内藤博夫　　(秋葉原セミナー　2018 年 2 月 10 日)

概要「グラスマン幾何」は，接空間に対して与えられた制約条件下で，部分多様体を考察するという部分多様体論で，局所的には，準線形一階偏微分方程式系の解の研究に繋がっている．このような考え方が既にあったことは容易に想像されるが,「グラスマン幾何」というネーミングは，R. Harvey と B. Lawson の論文"Caribrated geometries"(1980) の中で初めて使われたようである．一方，E．B. Dynkin による複素半単純リー代数の複素半単純リー部分代数の分類理論 (1952) から，コンパクト半単純リー群の閉リー部分群の局所的分類が得られる．この延長線上に，等質リーマン多様体の等質部分多様体の分類問題がある．これに関連して，これまで，定曲率空間や階数１リーマン対称空間など個別の等質リーマン多様体に対して，その等質部分多様体の分類問題が研究されてきた．等質部分多様体の分類問題は，グラスマン幾何の枠組みを通してうまく定式化（軌道型グラスマン幾何を導入）することができ，等質部分多様体を形式的に類別することができる．類別された形式的な部分多様体の族は，個々それぞれに，O-幾何と呼ばれ，O-幾何における最初の問題は，(1) 与えられたO-幾何に真に部分多様体が存在するか否かを判別することである．これは付随する準線形偏微分方程式系の解の存在・非存在を明らかにすることに他ならない．その後，次の段階として，(2) 実質的なO-幾何に典型的な部分多様体（例えば，極小部分多様体や等質部分多様体など）が存在するかを考察することが課題になる．特に，等質部分多様体の存在問題が解明できれば，等質リーマン多様体における等質部分多様体の存在状況あるいは分布状況を把握できるのではないかと考えた．この講演では，このような考えに立って，これまでの研究成果をグラスマン幾何の観点から振り返るとともに，リーマン対称空間の（特に曲面に関する）O-幾何について得られた現状と今後の課題について解説したい．

第一講．　グラスマン幾何と部分多様体論 - イントロダクション -　(10:30-11:30)

この節では，グラスマン幾何に係る基本事項のほか，グラスマン幾何の枠組みの中で考察されたキャリブレーションの幾何や 一階偏微分方程式系によって定義される $\mathbb{R}^n$ の極小部分多様体に関する J. M. Landsberg の結果を概観する．また，定曲率空間や階数１対称空間の部分多様体論をグラスマン幾何の枠組みから見直すとともに，以下の解説の流れについて説明する．

初めにグラスマン幾何の枠組みについて説明する．M を滑らかな m 次元多様体，s を $1 \le s \le m-1$ を満たす自然数とし，$Gr^s(TM)$ を M 上のグラスマン束とする．各点 $p \in M$ に対して，そのファイバー $Gr^s(T_pM)$ は点 p の接空間 T_pM の s 次元線形部分空間全体のなすグラスマン多様体である．グラスマン束 $Gr^s(TM)$ の部分集合 Σ を固定する．M の s 次元連結部分多様体 S が **Σ-部分多様体**であるとは，S の接空間 $T_pS, p \in S$, がすべて Σ に属するときにいい，そのような Σ-部分多様体の族を **Σ-幾何**という．Harvey-Lawson [1] が導入した**グラスマン幾何**の枠組みは，このような Σ-幾何の総称である．キャリブレーションの幾何とユークリッド空間の極小部分多様体の枠組みに関する Landsberg の考察はこのようなグラスマン幾何の枠組みの中で考察されている．

次にキャリブレーションの幾何について概観する．M を m 次元リーマン多様体, s を m 以下の自然数とし, φ を次の性質を満たす M 上の s 次閉微分形式で，M に接する全ての向き付けられた s 次元線形部分空間 ξ に対して $\varphi|_\xi \le \mathrm{vol}_\xi$ が成り立つものとする．このような φ を M 上の **Calibration** といい，Calibration が与えられたリーマン多様体を **Calibrated 多様体** という．Calibrated 多様体 (M, φ) が与えられたとき，$(\Sigma =)\ G(\varphi) = \cup_{p \in M} G_p(\varphi) \subset Gr^s(TM)$, $G_p(\varphi) = \{\xi \in Gr^s(T_pM) |\ \varphi|_\xi = \mathrm{vol}_\xi\}$, と置き，$M$ の $G(\varphi)$-部分多様体 S を **Calibrated 部分多様体** という．$G(\varphi)$ は **face** と呼ばれる．一般に，Caribleted 多様体 (M, φ) の向き付けられたコンパクト s 次元連結部分多様体 S' は不等式 $\int_{S'} \varphi \le \mathrm{vol}(S')$ を満たし，等号成立は S' が $G(\varphi)$-部分多様体，i.e., Calibrated 部分多様体であることが知られている．これらの性質と Stokes の定理によって，Calibrated 部分多様体 S と $H_s(M, \mathbb{R})$ の同じホモロジークラスに属する S' に対して $\int_S \mathrm{vol}_S = \int_S \varphi = \int_{S'} \varphi \le \int_{S'} \mathrm{vol}_{S'}$ が成り立ち，その結果, S はホモロジー的に体積最小であることが分かる．Calibrated 部分多様体の典型的な例として，(1) Kähler 多様体の complex 部分多様体の族，(2) Calabi-Yau 多様体の special Lagrangian 部分多様体の族，(3) G_2-多様体の associative 部分多様体の族および coassociative 部分多様体の族，(4) $Spin(7)$-多様体の Cayley 部分多様体の族などがある．

次に，Landsberg [2] の考察を概観する．M を $s+n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{s+n}$，$Gr^s(\mathbb{R}^{s+n})$ を $\mathbb{R}^{s+n}$ の s 次元線形部分空間のなすグラスマン多様体とする．$Gr^s(\mathbb{R}^{s+n})$ の部分集合 Σ が **m-subset** であるとは，$\mathbb{R}^{s+n}$ の任意の Σ-部分多様体，すなわち，Gauss 写像の像が Σ に属する部分多様体, がすべて極小部分多様体になるときにいい，論文では，このような m-subset Σ の構成について考察される．この問題を簡単に "Σ-部分多様体 $\Rightarrow$ 極小部分多様体" と表す．

最初に，問題の "infinitesmal" バージョンを考える．V を内積を持った s 次元ベクトル空間，W を n 次元ベクトル空間，$C^\infty(V, W)$ を V 上の W-valued C^∞ 関数全体のなす空間と

し，$\Delta : C^\infty(V,W) \to C^\infty(V,W)$ を Laplace 作用素（ 2 次線形微分作用素) とする．今，適当なベクトル空間 $\mathcal{R}$ をとり，1 次線形微分作用素 $D : C^\infty(V,W) \to C^\infty(V,\mathcal{R})$ で，Ker $D \subset$ Ker Δ を満たすものを考える，簡単に "$D \Rightarrow \Delta$" と表す．例えば，
"Cauchy-Riemann 方程式 $\Rightarrow$ Laplace 方程式"である．$\mathrm{Hom}(V,W)$ の線形部分空間 A を次の意味で 1 階線形斉次 PDE とみなす：$f \in C^\infty(V,W)$ に対して，$x \in V$ での f の Jacobians が A に属するとき f はこの PDE の解，すなわち，A の定義方程式によって PDE は記述される．このとき A は **tabuleau** と呼ばれる．同様に，$W \otimes \mathrm{Sym}^2 V^*$ の線形部分空間 $\tilde{A}$ を２階線形斉次 PDE とみなす: $f \in C^\infty(V,W)$ に対して，$x \in V$ での f の２階偏微分係数が $\tilde{A}$ に属するとき f はこの PDE の解．このとき，$\tilde{A}$ は **tabuleau of order 2** と呼ばれる．$f \in C^\infty(V,W)$ に対する Laplace 方程式は，$\tilde{A} = \{P \in W \otimes \mathrm{Sym}^2 V^* |\ \mathrm{trace}(P) = 0\}$ で記述される．ここで，trace: $W \otimes \mathrm{Sym}^2 V^* \to W$ は V^* の計量に関するトレースである．
今，tabuleau $A \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ に対して, A の **prolongation** $A^{(1)}$ を

$$A^{(1)} = \{P \in W \otimes \mathrm{Sym}^2 V^* |\ \partial P/\partial x \in A \text{ for } \forall x \in V^*\} = (A \otimes V^*) \cap (W \otimes \mathrm{Sym}^2 V^*)$$

で定義する．すなわち，$A^{(1)}$ は A によって定義される 1 階線形斉次 PDE のべき級数解の 2 階の偏微分係数のなす空間と考えられる．$A^{(1)}$ は tableau of order 2 である．$D \Rightarrow \Delta$ を満たす 1 次線形微分作用素 D を見つけることは，$A^{(1)}$ が traceless になる tableau A を見つけることに他ならない．このような A を **m-tableau** という．また，tableau A が **involutive** であるとは，A の定義方程式を微分しても新しい方程式が得られない，すなわち，A は解空間をできるだけ大きくした１階線形斉次 PDE であるときにいう．論文では, Cauchy-Riemann m-tableau, associative m-tableau, coassociative m-tableau, Cayley m-tableau, Dirac m-tableau, special Lagrangian m-tableau など， involutive m-tableaux の代表的な具体例が与えられる．また，m-tableau A の特徴付け (characteristic variety による) や存在するための必要条件 (codim $(A) \geq \max(s,n)$), さらに，codim $A = \max(s,n)$ の場合や s, n が小さい場合など，特別な場合の m-tableaux の分類が議論される．

次に，m-tableaux に関する結果を踏まえて，"Σ-部分多様体 $\Rightarrow$ 極小部分多様体", すなわち，m-subset Σ に関する問題が考察される．以下，グラスマン多様体 $Gr^s(\mathbb{R}^{s+n})$ を $Gr_{s,n}$ と記し，$\Sigma \subset Gr_{s,n}$ は部分多様体と仮定する．

$E \in Gr_{s,n}$ とし，E での接空間 $T_E(Gr_{s,n})$ を $E^\perp \otimes E^*$ と同一視する．滑らかな写像 $g : S \to Gr_{s,n}$ に対して，$g(x) = E$ とすれば $dg_x \in E^\perp \otimes E^* \otimes T^*_x$ であり，特に，g が部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の Gauss 写像 $\gamma : S \to Gr_{s,n}$ のとき，$x \in S$ に対して $\gamma(x) = T_x S = E$ とおけば，$d\gamma_x \in E^\perp \otimes \mathrm{Sym}^2(E^*)$ となる．これは部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の $x \in S$ における第

二基本テンソルを表す.

今，$\Sigma \subset Gr_{s,n}$ に対して，$A = T_E\Sigma \subset E^{\perp} \otimes E^*$, $(E \in \Sigma)$ とおく．このとき A の prolongation $A^{(1)} = (A \otimes E^*) \cap (E^{\perp} \otimes \mathrm{Sym}^2 E^*)$ は, $T_x = E$ を満たす Σ-部分多様体の x での第二基本テンソルの候補からなる空間と考えられる．極小部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の第二基本テンソルは，平均曲率 0 だから traceless である．従って次が成立する：

$\forall E \in \Sigma$ に対して $(T_E\Sigma)^{(1)}$ が traceless ならば，Σ は m-subset となる，
すなわち，すべての接空間が m-tableaux ならば，Σ は m-subset である.

また，m-subset はそのすべての m-tableaux が involutive のとき **involutive** であるという. calibrated 幾何の説明で挙げられた典型的な calibrations (1) 〜 (4) の faces は involutive m-subsets になる．さて, $T_E(Gr_{s,n}) = E^{\perp} \otimes E^*$ に自然に $L = GL(E^{\perp}) \times SO(E^*)$ を作用させ, A, $A' \subset E^{\perp} \otimes E^*$ に対して $\exists g \in L$： $A' = g \cdot A$ のとき，A と A' は同値と考える．論文の後半では，前半で考察された典型的な m-tableau A を１つ固定して，$\forall E \in \Sigma$ に対して $T_E\Sigma \sim A$ となるような m-subsets Σ の分類・構成等が考察される.

さて，この解説では，リーマン等質空間の等質部分多様体をモデルとするグラスマン幾何の枠組みを考える．M を連結等質リーマン多様体とし, その等長変換群の単位元連結成分 G をグラスマン束 $Gr^s(TM)$ に等長変換の微分を通して作用させる．この作用の G-軌道 $\mathcal{O} \subset Gr^s(TM)$ を１つ固定する．G は M に推移的に作用するから, $\mathcal{O}$ は M 上の等質束となる．$\Sigma = \mathcal{O}$ とするときのグラスマン幾何を $\mathcal{O}$-幾何といい，M の (s 次元) Σ-部分多様体を $\mathcal{O}$-部分多様体という．また，このようなグラスマン幾何を**軌道型グラスマン幾何** という. 等質リーマン多様体 M の任意の連結等質部分多様体は，$\exists$ 軌道 $\mathcal{O}$ に対する $\mathcal{O}$-部分多様体になる．ここで M の連結部分多様体 S が**等質部分多様体** であるとは，S の任意の２点 p, q に対して，$g(S) = S$, $g(p) = q$ となる $g \in G$ が存在するときにいう．軌道型グラスマン幾何の**基本的な課題**として先ず挙げられるのが, (1) $\mathcal{O}$-部分多様体が存在する軌道 $\mathcal{O}$ の決定, 次に，このような $\mathcal{O}$-幾何に対する (2) 部分多様体論の構築である. 課題 (1) の $\mathcal{O}$-部分多様体の存在問題は，グラスマン幾何が接空間に制約条件を課することから，局所的には準線形 PDE の解の存在問題に帰する．また，課題 (2) においては，全測地的，定曲率，極小，平均曲率一定など典型的な $\mathcal{O}$-部分多様体の存在・構築の問題が挙げられる．特に，等質 $\mathcal{O}$-部分多様体を許容する軌道 $\mathcal{O}$ の決定は，軌道空間におけるそのような軌道の分布状況を知ることになり，等質部分多様体の分類に対する最初のアプローチと考えられる．等質リーマン多様体がリーマン対称空間の場合，その等質部分多様体の分類問題への最初のアプローチは，Dynkin [3] の複素半単純リー代数の複素半単純リー部分代数の分類理論 (1959) から得られる単連結

コンパクト半単純リー群（これは両側不変計量によってリーマン対称空間になる）の閉リー部分群（全測地的等質部分多様体）の分類と考えられる．その後，D.S.P. Leung [4] [5] によるリーマン対称空間の鏡映 (reflective) 部分多様体の分類理論 (1979) と考えられる．これはリーマン対称空間の対合 (involution) の固定点集合を分類するもので，そのような集合は特別な全測地的等質部分多様体になる．この分類は，また，M. Berger [6] による半単純アフィン対称空間の分類理論 (1957) とも密接に関連している．また，これらに関連する最近の結果として，井川 [7] による対称三対と Hermann 作用の研究がある．そのほか，複素射影空間の等質ケーラー部分多様体の分類（高木-竹内 [8]) など個別の等質リーマン多様体における等質部分多様体の分類や平行部分多様体や対称部分多様体など適切な条件下での等質部分多様体の分類が知られている．これらの結果における等質リーマン多様体はリーマン対称空間であり，一般に，部分多様体の幾何は，m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$, m 次元球面 S^m, m 次元実双曲空間 $\mathbb{R}H^m$ などの定曲率空間の部分多様体論に始まり，荻上, B.Y. Chen [9][10] による複素空間形のケーラー部分多様体や全実部分多様体の研究 (1974) を経て，階数 1 リーマン対称空間の部分多様体論とへ拡がってきた．近年では，より一般のリーマン対称空間の部分多様体論の研究も活発に行われている．以下は，ユークリッド空間及び階数 1 リーマン対称空間における $\mathcal{O}$-幾何の例である．

例 1．(実空間形) M を単連結定曲率空間 $\mathbb{R}^m$ $(c=0)$, S^m $(c>0)$, $\mathbb{R}H^m$ $(c<0)$ の 1 つとする．c は曲率の値を表す．これらは**実空間形**と呼ばれ，$\mathbb{R}^m$ を除いて階数 1 リーマン対称空間である．M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ, $SO(m)\cdot\mathbb{R}^m$, $SO(m)$, $SL(m,\mathbb{R})$ となり, G は M 上のグラスマン束 $Gr^s(TM)$ に推移的に作用する．従って，$\mathcal{O}$-幾何は唯 1 つとなり，その $\mathcal{O}$-部分多様体 S は，単なる s 次元部分多様体に他ならない．

例 2．(複素空間形) M を正則断面曲率 $c>0$ の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ $(m=2n)$, $c<0$ の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ $(m=2n)$ のどちらかとする．これらは，また階数 1 リーマン対称空間で, $c=0$ のユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ を含め**複素空間形**と呼ばれる．M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ, $SU(n+1)$, $SU(1,n)$ で，G の $Gr^s(TM)$ への作用の軌道 $\mathcal{O}$ は，$s=1$ の時が唯 1 つ，$2\leq s<m$ の時が無数になる．例えば，次のような代表的な軌道 $\mathcal{O}_C$, $\mathcal{O}_T$ がある：J を M の複素構造とする．このとき

(C) **複素型** $\mathcal{O}_C$：$s=2r$ とする．$\forall p\in M$ に対して

$$\mathcal{O}_C\cap Gr^{2r}(T_pM)=\{V\in Gr^{2r}(T_pM)|\ JV=V\}$$

と置く．このとき $\mathcal{O}_C$-幾何は，r-次元ケーラー部分多様体の族となる．

(T) **全実型** $\mathcal{O}_T$：$s=n$ とする．$\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_T \cap Gr^n(T_pM) = \{V \in Gr^n(T_pM) |\ JV = V^{\perp}\}$$

と置く．このとき $\mathcal{O}_T$-幾何は，n-次元全実部分多様体の族となる．

例３．(四元数空間形) M を四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ $(m=4n)$, 四元数双曲空間 $\mathbb{H}H^n$ $(m=4n)$ のどちらかとする．これらも，また階数１リーマン対称空間で，四元数ユークリッド空間 $\mathbb{H}^n$ を含め**四元数空間形**と呼ばれる．M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ, $Sp(n+1)$, $Sp(1,n)$ で，G の $Gr^s(TM)$ への作用の軌道 $\mathcal{O}$ は，$s=1$ の時が唯１つ，$2 \leq s < m$ の時が無数になる．例えば，次のような代表的な軌道 $\mathcal{O}_{TC}$: $Sp(1)$ を M の四元数構造とする．このとき

(TC) **全複素型** $\mathcal{O}_{TC}$：$s=2n$ とする．$\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_{TC} \cap Gr^{2n}(T_pM) = \{V \in Gr^{2n}(T_pM) |\ \exists I, J, K \in Sp(1):\ IV = V, JV \subset V^{\perp}, KV \subset V^{\perp}\}$$

と置く．ここで，$\{I, J, K\}$ は局所四元数構造とする．このとき $\mathcal{O}_{TC}$-幾何は，$2n$-次元全複素部分多様体の族となる．

以下の解説では，第二講でリーマン対称空間の “対称性” に着目して等質部分多様体を考察し，次の第三講では，必ずしもリーマン対称空間ではないが，様々な具体の計算や検証が可能な 3 次元リー群の曲面 $(s=2)$ に関する $\mathcal{O}$-幾何に対して，軌道型グラスマン幾何の基本的課題 (1), (2) を考察する．さらに，第四講では，第三講で考察された方針に沿って，リーマン対称空間の曲面に関する $\mathcal{O}$-幾何に対して，基本的課題 (1) を考察する．最終目標は，リーマン対称空間の軌道型グラスマン幾何 (s が一般の場合）を考察し，等質部分多様体の分布を知り分類問題に対するアプローチ方法に関する知見を得ることである．例えば,「個別具体的表示を求める」「分類のアルゴリズムを構成する」「存在に対する判定条件を与える」などが考えられる．

第二講.　グラスマン幾何と対称部分多様体 (13:00-14:00)

対称部分多様体に係る基本事項のほか，リーマン対称空間の対称部分多様体の分類問題の解決にグラスマン幾何の枠組みがどのように関わっているかを解説する.（cf. 内藤-塚田 [22], 内藤-竹内 [12]）

この節では, M はリーマン対称空間，i.e., $\forall p \in M$ に対して点対称変換 s_p が存在するリーマン多様体と仮定する．ここで，点対称変換 s_p は，$s_p(p) = p$, $d(s_p)_p = -1_{T_pM}$ を満たす M の等長変換を表し，このような点対称変換は存在すれば一意に定まる．

定義. M の (正則) 連結部分多様体 S は $\forall p \in M$ で外的点対称変換 t_p を持つとき**対称部分多様体** という．ここで点 p の外的点対称変換は

$$t_p(p) = p, \quad t_p(S) = S, \quad (dt_p)_p v = -v \ (v \in T_pS), \quad (dt_p)_p v = -v \ (v \in T_pS)$$

を満たす M の等長変換 t_p で，このような変換は存在すれば一意である．

対称部分多様体 S は, 周辺空間であるリーマン対称空間 M の“ 対称性 ”を受け継ぐ部分多様体で, リーマン対称空間の部分多様体論として自然な概念である．M の等質部分多様体の分類問題は M をリーマン対称空間というより等質リーマン多様体と見なしている．M は「リーマン対称空間」，さらに「等質リーマン多様体」，より一般に「リーマン多様体」であるから，それぞれの状況で，その部分多様体論を位置づけることも重要と考えられる．M の“ 対称性 ”の類似性という観点から，対称部分多様体 S は次のような性質を持つ．

(1) S は**リーマン対称空間**：対称部分多様体の定義から，外的点対称変換 t_p を S 上に制限すれば，$t_p|_S$ は S の点対称変換を与える．この事実は，S が M の**等質部分多様体**であることも導く．

(2) 第二基本形式 α が平行, i.e., $\nabla\alpha = 0$：リーマン対称空間 M は曲率テンソル R が平行, i.e., $\nabla R = 0$ を満たす．$\nabla\alpha = 0$ はこの性質に類似している．証明は t_p の存在とテンソル $\nabla\alpha$ が法空間 $T^{\perp}S$ に値を持つ奇数次 (３次) テンソルであることを使う．$\nabla R = 0$ の証明も ∇R が奇数次 (５次) テンソルであることを使う点で類似的である．一般に $\nabla\alpha = 0$ を満たす部分多様体を **平行部分多様体**という．

(3) S の接空間 T_pS 及び法空間 $T_p^{\perp}S$ は**曲率不変空間**：すなわち，各点 $p \in M$ において, $R(T_pS, T_pS)T_pS \subset T_pS$, $R(T_p^{\perp}S, T_p^{\perp}S)T_p^{\perp}S \subset T_p^{\perp}S$ を満たす．この事実も t_p の存在と R が T_pM に値を持つ３次テンソルであることを使う．一般に, リーマン対称空間の接空間 T_pM の部分空間 V が曲率不変ならば，$N \ni p$, $T_pN = V$ となる M の完備全測地的部分多様体 N が一意に存在することが知られている．T_pS, $T_p^{\perp}S$ に付随する**完備全測地的部分多様体** N, $N^{\perp}$ は, また M の対称部分多様体になる．また，M が**単連結**リーマン対称空間の場合，この T_pS 及び $T_p^{\perp}S$ の曲率不変の性質と単連結リーマン対称空間における等長線形変換の拡張定理によって，M の完備平行部分多様体 S は対称部分多様体になる．この事実は，$\nabla R = 0$ を満たす単連結完備リーマン多様体はリーマン対称空間であることに対比される．

(4) $(S \subset M)$ は**局所代数構造**を持つ：M を単連結半単純リーマン対称空間と S はプロパー, i.e., M のプロパーな直積因子を含まないし，またそのような直積因子に含まれないとする．G のリー代数を $\mathfrak{g}$ とし，対称変換 s_p, t_p によって誘導される G の内部自己同型及び $\mathfrak{g}$ 上のその微分を，それぞれ, σ, τ と置く．このとき，σ, τ は，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の可換な対合

で，それぞれの $(+1)$-固有空間 ($\mathfrak{g}$ のリー部分代数) が (-1)-固有空間 ($\mathfrak{g}$ の線形部分空間) に忠実に作用する．但し，$\mathfrak{g}$ がノンコンパクト型のときは σ はカルタン対合である．このような対合の組 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ を **二重対称リー代数** といい，逆に，この局所代数構造から単連結半単純リーマン対称空間のプロパーな全測地的対称部分多様体 $(N \subset M)$ が構成できる．$(N \subset M)$ は $(S \subset M)$ に**付随する** という．$(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ と $(N \subset M)$ は適切な同値関係の下で１対１に対応している．ここで単連結半単純リーマン対称空間 M は対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ と対応している．この対応の下で，対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ (従って，M) の“ コンパクト型 ”と“ ノンコンパクト型 ”の双対性は自然に，二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ (従って，$(N \subset M)$) の双対性を誘導する．
(5) 単連結半単純リーマン対称空間のプロパー対称部分多様体 $(S \subset M)$ に付随する二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ の**既約直和分解**は $(S \subset M)$ の**既約直積分解**を誘導する：二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ の既約直和分解を $\sum_i^r (\mathfrak{g}_i, \sigma_i, \tau_i)$ とするとき，各 $(\mathfrak{g}_i, \sigma_i, \tau_i)$ を付随する二重対称リー代数とする既約 $(S_i \subset M_i)$ が一意に存在して $(S \subset M) = (S_1 \subset M_1) \times \cdots \times (S_r \subset M_r)$ となる．これは対称リー代数の直和分解が de Rham の分解定理を誘導することに類似し，二重対称リー代数の場合は J.D. Moore [13] の等長はめ込みの分解定理を誘導する．このプロパー対称部分多様体の既約直積分解は，ユークリッド因子を含む一般の単連結リーマン対称空間の場合に拡張できる．この分解定理によって，単連結リーマン対称空間のプロパー対称部分多様体の**分類問題**は, (i) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のプロパー対称部分多様体の分類及び (ii) 既約プロパー対称部分多様体 $(S \subset M)$ の分類に帰着する．

さて，軌道型グラスマン幾何の観点から，単連結リーマン対称空間 M のプロパー対称部分多様体 S の分類問題を考える．対称部分多様体の性質 (1) より S は等質部分多様体だから，$\dim S = s$ とするとき，S のすべての接空間は $Gr^s(TM)$ の１つの軌道 $\mathcal{O}$ に含まれる，i.e., S は $\mathcal{O}$-部分多様体である．また，性質 (3) により，$(S \subset M)$ に付随する全測地的対称部分多様体 $(N \subset M)$ は唯一の全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体である．従って，分類問題は次のステップに分かれる：(A) $\mathbb{R}^d$ のプロパー対称部分多様体; (B) 既約 $(N \subset M)$, i.e., 既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$; (C) 既約 $(N \subset M)$ の属する $\mathcal{O}$-幾何の全ての対称 $\mathcal{O}$-部分多様体.

ステップ (A)： $\mathbb{R}^d$ のプロパー対称部分多様体は,“ 対称 R-空間 ”の超球面 S^{d-1} への標準的な埋め込みとして実現できることが D. Ferus [14] によって知られている．対称 R-空間は次のように構成される：G/K を半単純ノンコンパクト型リーマン対称空間，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を カルタン分解とし，$Z \in \mathfrak{p}$ を $\mathrm{ad}(Z)^3$ - $\mathrm{ad}(Z) = 0$ を満たす元とする．このとき，$S = K(Z)$ は $\mathfrak{p}$ の原点を中心とする半径 $r = \|Z\|$ の超球面 $S(\mathfrak{p})$ に含まれる．この S を**対称 R-空間**という．G/K が既約のとき，S は**既約**であるという．任意の対称 R-空間 $S \subset S(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ は，埋め込

みも込めて，有限個の既約対称 R-空間 $S_i \subset S(\mathfrak{p}_i) \subset \mathfrak{p}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ の直積に分解される．ここで $S_i \subset S(\mathfrak{p}_i)$ は極小埋め込みになる．組 $(G/K, Z)$ は ジョルダン代数や三項対から対称階別リー代数 $(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{+1}, \sigma)$ を経由して具体に構成される (cf. 佐竹 [30]).

ステップ (B)： 既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ の分類の概略は次のとおり．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を σ による $\mathfrak{g}$ の (± 1)-固有空間への分解，$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ をさらに τ による $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ の (± 1)-固有空間への分解とする．$\mathfrak{k}_+^{\mathbb{C}}$ の Dynkin 図形をとり，$\mathfrak{k}_+$-表現空間 $\mathfrak{k}_-^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}_\pm^{\mathbb{C}}$ の支配的重みを表現空間を区別するラベルをつけて Dynkin 図形に付加した図形（Släfli 図形の１種で **P 図形**と呼ぶ) をつくる．このとき 既約二重対称リー代数の同値類は P 図形によって決定され，その種類は 100 種類以上で対応する既約全測地的プロパー対称部分多様体 (N, M) も具体に知られている (内藤 [17][18][20])．同様の方法で，既約対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ は $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ の Dynkin 図形に $\mathfrak{k}$-表現空間 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ の支配的重みを付加した図形 (S 図形）によって決定され，これがコンパクト型（あるいはノンコンパクト型) 既約対称空間の局所分類を与えることが知られている (村上 [21])．また，第一項で説明したように，二重対称リー代数の分類は，半単純アフィン対称空間の局所分類 (M. Berger [6]) やコンパクト型半単純リーマン対称空間の鏡映部分多様体の分類（D.S.P. Leung [4] [5]) と対応している．

さて，ステップ (C) について説明する前に，全測地的でないプロパー対称部分多様体 $(S \subset M)$ の例を挙げる．

例１． (実空間形; Ferus [14], 竹内 [15]) n 次元実空間形の r 次元全測地的対称部分多様体は，それぞれ 標準的埋込 $\mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^r \subset \mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}H^r \subset \mathbb{R}H^n$ である．実空間形の部分多様体が全臍的超曲面に含まれないとき“ 本質的 ”という．n 次元実空間形の全臍的超曲面は，また $\mathbb{R}^{n-1}$，S^{n-1}, $\mathbb{R}H^{n-1}$ のどれかである．従って，実空間形の対称部分多様体の分類は“ 本質的 ”なものを考えればよい．$\mathbb{R}^n$ 及び S^n の“ 本質的 ”対称部分多様体 S はステップ (A) で述べた対称 R-空間の埋め込みである．また，$\mathbb{R}H^n$ の“ 本質的 ”対称部分多様体 S は，$\mathbb{R}H^n$ を $(n+1)$ 次元ローレンツ空間 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ の疑球面と見なした時

$$S = \mathbb{R}H^{n_0} \times S_1 \times \cdots \times S_r \subset \mathbb{R}H^{n_0} \times S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_r} \subset \mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}_1^{n_0+1} \times \mathbb{R}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_r+1}$$

ここで，$S_i \subset S^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i+1}$ $(1 \leq i \leq r)$ は対称 R-空間の埋め込みとする．

例２． (複素空間形) 初めに複素型 $\mathcal{O}_C$-幾何の場合 (C；中川‐高木 [22]) を考える．$M = \mathbb{C}P^n$ の場合，$\mathcal{O}_C$-部分多様体は $\mathbb{C}P^n$ のケーラー部分多様体で，全測地的対称ケーラー部分多様体は 標準的埋込 $\mathbb{C}P^r \subset \mathbb{C}P^n$ で与えられる．$\mathbb{C}P^n$ のケーラー部分多様体が全測地的ケーラー超曲面 $\mathbb{C}P^{n-1}$ に含まれないときに“ 充満 ”であるという．従って，$\mathbb{C}P^n$ の対称ケーラー部分多様体の分類は“ 充満 ”なものを考えればよい．“ 充満 ”な対称 $\mathcal{O}_C$-部分多様体は，コンパ

クトエルミート対称空間の $\mathbb{C}P^n$ への“ 充満 ”等質ケーラー埋入となる．一般に，$\mathbb{C}P^n$ へのコンパクトエルミート対称空間 S の“ 充満 ”ケーラー埋入 f は等質埋め込みとなり，高木 - 竹内 [8] によって決定されている．“ 充満 ”な対称部分多様体 $S \subset \mathbb{C}P^n$ の決定は，S が平行部分多様体であることを使って，次数 $\mathrm{d}(f) \leq 2$, 言い換えると S の定義多項式の次数 ≤ 2, を満たすものを探せばよい．結果としてそのようなものは以下の 7 種類である：

(1) $S = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$: 恒等写像,

(2) $S = \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$: Veronese 埋込　(ここで $n = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - 1$),

(3) $S = \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q \to \mathbb{C}P^n$: Segre 埋込　(ここで $n = pq + p + q$),

(4) $S = \mathbb{C}Q^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$: 複素 2 次曲面の包含写像,

(5) $S = Gr^2(\mathbb{C}^{2+m}) \to \mathbb{C}P^n$: Plücker 埋込　(ここで $n = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - 1$),

(6) $S = SO(10)/U(5) \to \mathbb{C}P^{15}$: 第 1 標準埋込,

(7) $S = E_6/T \cdot Spin(10) \to \mathbb{C}P^{26}$: 第 1 標準埋込.

$M = \mathbb{C}H^n$ の場合，対称 $\mathcal{O}_C$-部分多様体は，全測地的対称部分多様体 $S = \mathbb{C}H^r \subset \mathbb{C}H^n$ のみとなり，全測地的でないものは存在しない (昆 [23]).

次に， 全実型 $\mathcal{O}_T$-幾何の場合 (T; 内藤，竹内 [24][25]) を考える．最初に $M = \mathbb{C}P^n$ の場合，$\mathcal{O}_T$-部分多様体は $\mathbb{C}P^n$ の n 次元全実部分多様体である．$\mathbb{C}^{n+1}$ の原点中心の単位超球面 S^{2n+1} をとり，Hopf 束化写像 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ を考える．n 次元全実対称部分多様体 $S \subset \mathbb{C}P^n$ に対して，$\hat{S} = \pi^{-1}(S)$ $(\subset S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1})$ は，$\dim \hat{S} = n+1$ で $\mathbb{C}^{n+1}$ の全実対称 R-空間となる．従って，対称 R-空間の分類からこのような条件を満たす $\hat{S}$ をとり，これを S^1- 作用で商をとることで S が得られる．例えば，既約な $\hat{S}$ は環状既約対称有界領域の Harish-Chandra 埋込の Shilov 境界として実現され，次の 5 種類につきる：

$$U(n), \quad U(2n)/Sp(n), \quad U(n)/O(n), \quad T \cdot S^{n-1}, \quad T \cdot E_6/F_4.$$

次に $M = \mathbb{C}H^n$ の場合を考える．$\mathcal{O}_T$-部分多様体は $\mathbb{C}H^n$ の n 次元全実部分多様体である．$\mathbb{C}P^n$ の場合と同様に，疑エルミート空間 $\mathbb{C}^n_1$ の原点中心の疑球面 S^{2n}_1 をとり，Hopf 束化写像 $\pi : S^{2n}_1 \to \mathbb{C}H^n$ を考える．n 次元全実対称部分多様体 $S \subset \mathbb{C}H^n$ に対して，$\mathbb{C}P^n$ の場合と同様に，$\hat{S}$ を定める．このとき，$\hat{S}$ は $\dim \hat{S} = n+1$ を満たすローレンツ多様体で $\mathbb{C}^n_1$ の全実部分多様体となる．対称 R-空間のアナロジーとして，ローレンツ型の疑対称 R-空間を構成し，その中から上記 $\hat{S}$ の条件を満たすローレンツ型の既約疑対称 R-空間 $\hat{S}_0$ を求める．$\hat{S}_1$ を $\mathbb{C}P^n$ の場合に構成された対称 R-空間とし，$\hat{S} = \hat{S}_0 \times \hat{S}_1$ と置く．$\hat{S}$ を Hopf 束化写像 π の $\mathbb{R}$-作用で割ったものが，$\mathbb{C}H^n$ の n 次元全実対称部分多様体 S である．ここで $S_0 = \pi(\hat{S}_0)$ と置くと，$S_0 \subset \mathbb{C}H^d$ は，$S_0 = \mathbb{R}H^d \subset \mathbb{C}H^d$ (全測地的)，$S_0 \subset \mathbb{C}H^d$ (ホロ球面型の d-次元

平坦部分多様体)，$S_0 \subset \mathbb{C}H^1$ (測地線と円), $S_0 = \{p\} \subset \mathbb{C}H^0$ (１点）のどれかになる．

例３．(四元数空間形) 初めに全複素型 $\mathcal{O}_{TC}$-幾何の場合 (TC; 塚田 [26]) を考える．$\mathcal{O}_{TC}$-部分多様体は $\mathbb{H}P^n$ の $2n$ 次元全複素部分多様体で, 全測地的対称全複素部分多様体は，標準埋込 $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{H}P^n$ である．Hopf 束化写像 $\pi : \mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n$ を考え，$\mathbb{H}P^n$ の全測地的でない $2n$ 次元全複素対称部分多様体を S とする．このとき S はコンパクトエルミート対称空間で，$S \subset \mathbb{H}P^n$ の水平リフト $f : S \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ はシンプレクティック同変充満ケーラー埋込になる．例２, (C) の場合の類似の議論によって，$S \to \mathbb{H}P^n$ が対称全複素部分多様体になるための必要十分条件は，次数 $d(f) = 3$ であることが分かる．この条件を満たすものをリストアップすれば次の５種類に尽きる：

(1) $S = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}Q^m \to \mathbb{C}P^{2m+3} \to \mathbb{H}P^{m+1}$: テンソル積埋込,

(2) $S = Gr^3(\mathbb{C}^6) \to \mathbb{C}P^{19} \to \mathbb{H}P^9$: Pl{ucker 埋込,

(3) $S = Sp(3)/U(3) \to \mathbb{C}P^{13} \to \mathbb{H}P^6$: 第１標準埋込,

(4) $S = SO(12)/U(6) \to \mathbb{C}P^{31} \to \mathbb{H}P^{15}$: 第１標準埋込,

(5) $S = E_7/T \cdot E_6 \to \mathbb{C}P^{55} \to \mathbb{H}P^{27}$: 第１標準埋込.

$M = \mathbb{H}H^n$ の場合，対称 $\mathcal{O}_{TC}$-部分多様体は，全測地的対称部分多様体 $S = \mathbb{H}H^r \subset \mathbb{H}H^n$ のみとなり，全測地的でないものは存在しない (塚田 [26]).

例４．(高階数 (≥ 2) リーマン対称空間) 初めに全測地的でない対称部分多様体を許容する $\mathcal{O}$-幾何について説明する．最初にコンパクト型の場合を考える．M^* をコンパクト型既約エルミート空間かそのような空間の２コピーとし，N^* を M^* の実形, i.e., 半分次元完備全測地的全実部分多様体とする．但し，２コピーの場合はそれぞれの複素構造を反対に取る．そのような N^* は M^* の全測地的対称部分多様体で，既約対称 R-空間で実現される (竹内 [27]). 今, $(N^* \subset M^*)$ に対応する二重対称リー代数を $(\mathfrak{g}, \tau, \sigma)$ とおく．このとき，このファミリーである二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ を考え，これに対応する全測地的対称部分多様体を $(N \subset M)$ とする．このような組 $(N \subset M)$ に対して，N を含む M の $\mathcal{O}$-幾何が全測地的でない対称 $\mathcal{O}$-部分多様体を許容する．実際，そのような $\mathcal{O}$-部分多様体は次のように構成する．$(\mathfrak{g}, \sigma)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とし，さらに τ で分解し $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{p}_+$ とする．M^* に対応する対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \tau)$ の標準分解は $\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+) \oplus (\mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{k}_-)$ で，N, N^* の基点 o, o^* における接空間は $\mathfrak{p}_-$ と同一視できる．ここで M, M^* の等長変換の連結成分 G, G^* によって，等質空間 $M = G/K$, $M^* = G^*/K^*$ として表示し，o, o^* はその基点とする．N^* が M^* の実形であることから，o^* における $T_{o^*}M^*$ の複素構造 J^* は $^\exists H \in \mathfrak{p}_+$ が存在して $J^* = \mathrm{ad}(H)$ と書ける．$\mathbb{R} \cdot H$ は $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+$ の１次元中心として特徴づけられる．今 $c \geq 0$ に

対して　$\mathfrak{m}_c=\{x+\mathrm{ad}(cH)x\in\mathfrak{g}|\ x\in\mathfrak{p}_-\}\subset\mathfrak{p}_-\oplus\mathfrak{k}_-$，$\mathfrak{h}_c=[\mathfrak{m}_c,\mathfrak{m}_c]\subset\mathfrak{k}_+$，$\mathfrak{k}_c=\mathfrak{h}_c\oplus\mathfrak{m}_c$ とおく．このとき $[\mathfrak{h}_c,\mathfrak{m}_c]\subset\mathfrak{m}_c$ となり，$\mathfrak{k}_c=\mathfrak{h}_{\oplus}\mathfrak{m}_c$ は対称リー代数を定める．今 K_c を $\mathfrak{k}_c$ をリー部分代数にもつ G のコンパクト連結リー部分群とし，軌道 $S_c=K_c(o)\subset G/K=M$ をとる．このとき，$T_oS_c=\mathfrak{p}_-$ となり，τ は $\mathfrak{k}_c$ を不変にするから，τ は S_c の等長対合を引き起こす．また，$\tau|\mathfrak{p}$ は，$\tau|\mathfrak{p}_-=-1$, $\tau|\mathfrak{p}_+=+1$ だから，基点 o における S_c の外的点対称変換を引き起こす．従って，S_c は $(N\subset M)$ の定める $\mathcal{O}$-幾何の**対称 $\mathcal{O}$-部分多様体**になる．また，S_c の 点 o における第二基本形式 α_c は $\alpha_c(x,y)=[\mathrm{ad}(cH)x,y]$, $(x,y\mathfrak{p}_-)$, によって与えられる．従って, $c=0$ のとき $S_c=N$, そして $S_c(c>0)$ は N と**相似同型**ではあるが，互いに**合同でない** 1 パラメータ族で，各 S_c は**全測地的でない疑薺的部分多様体**になる．

次にノンコンパクト型の場合を考える．上記のコンパクト型 $(N\subset M)$ のノンコンパクト双対を $(\bar{M},\bar{N})$ とし，対応する二重対称リー代数を $(\bar{\mathfrak{g}},\bar{\sigma},\bar{\tau})$ とする．すなわち，$\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{k}_+\oplus\mathfrak{k}_-\oplus\sqrt{-1}\mathfrak{p}_+\oplus\sqrt{-1}\mathfrak{p}_-$ と分解し，$c\geq 0$ に対して

$$\bar{\mathfrak{m}}_c=\{\sqrt{-1}x+\mathrm{ad}(c\sqrt{-1}H)\sqrt{-1}x\in\bar{\mathfrak{g}}|\ x\in\mathfrak{p}_-\}\subset\sqrt{-1}\mathfrak{p}_-\oplus\mathfrak{k}_-,\ \mathfrak{h}_c=[\bar{\mathfrak{m}}_c,\bar{\mathfrak{m}}_c]\subset\mathfrak{k}_+,$$
$$\bar{\mathfrak{k}}_c=\mathfrak{h}_c\oplus\bar{\mathfrak{m}}_c$$

とおく．コンパクト $(N\subset M)$ の場合と同様に，$\bar{K}_c$, $\bar{S}_c=\bar{K}_c(\bar{o})\subset\bar{G}/\bar{K}=\bar{M}$ を定めれば，$\bar{S}_c$ $(c>0)$ は，$\bar{N}$ を含む $\bar{M}$ 上の $\bar{\mathcal{O}}$-幾何の**全測地的でない対称 $\bar{\mathcal{O}}$-部分多様体**であることが分かる．また，$c=0$ のとき $\bar{S}_c=\bar{N}$ で，$\bar{S}_c$ $(c>0)$ は $\bar{M}$ の**疑薺的部分多様体**となる．さらに $\bar{S}_c$ は，$0<c<1$ のとき $\bar{N}$ に**相似同型**，$1<c$ のとき N に**相似同型**，$c=1$ のとき，ユークリッド空間に**等長同型**であることが分かる ($\bar{S}_c$ と $\bar{N}$ の曲率テンソルを比較).

具体例として，$(N^*\subset M^*)=(\mathbb{C}Q^n\subset S^n)$ をとれば，対応するコンパクト $(N\subset M)=(S^n\subset S^{n+1})$, $(\bar{N}\subset\bar{M})=(\mathbb{R}H^n\subset\mathbb{R}H^{n+1})$ となる．このとき, $c>0$ に対して，$S_c\subset S^{n+1}$, $\bar{S}_c\subset\mathbb{R}H^{n+1}$ は全薺的部分多様体となる．この例は，rank M =rank $\bar{M}=1$ となる唯一の例である．その他はすべて rank≥ 2 となる．

ステップ (C)：さて，単連結半単純リーマン対称空間の対称部分多様体の分類を完成させるために，次の定理を述べる．

定理. (cf. J. Berndt-J. H. Eschenburg-H. Naitoh-K.Tsukada [28], 内藤-塚田 [22]) $(N\subset M)$ 及びそのノンコンパクト双対 $(\bar{N}\subset\bar{M})$ を既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g},\sigma,\tau)$ 及び $(\bar{\mathfrak{g}},\bar{\sigma},\bar{\tau})$ に付随するプロパー全測地的対称部分多様体とする．これらから定まる軌道型グラスマン幾何をそれぞれ $\mathcal{O}$-幾何，$\bar{\mathcal{O}}$-幾何と記する．このとき，$(N\subset M)$, $(\bar{N}\subset\bar{M})$ が次の例でなければ，$\mathcal{O}$-部分多様体，$\bar{\mathcal{O}}$-部分多様体は全測地的なものに限る：

(1) $(N\subset M)=(S^r\subset S^n)$ または $(\bar{N}\subset\bar{M})=(\mathbb{R}H^r\subset\mathbb{R}H^n)$ $(1\leq r<n)$　(例１),

(2) $(N \subset M) = (\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n)$ または $(\bar{N} \subset \bar{M}) = (\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{C}H^n)$ $(1 \leq n)$ (例２),

(3) $(N \subset M) = (\mathbb{C}P^r \subset \mathbb{C}P^n)$ $(1 \leq r < n)$ (例２),

(4) $(N \subset M) = (\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{H}P^n)$ $(1 \leq n)$ (例３),

(5) １８種類の既約対称 R-空間から構成された $(N \subset M)$ 及びその双対 $(\bar{N} \subset \bar{M})$ (例４).

(II) 上の (5) の１８種類の場合について, rank M, rank $\bar{M} \geq 2$ とすれば，$\mathcal{O}$-部分多様体及び $\bar{\mathcal{O}}$-部分多様体は，それぞれ S_c, $\bar{S}_c$ $(c \geq 0)$ の開集合に限る．

(証明の概略) (I) $(N \subset M)$ に対応する二重対称リー代数を $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ とし，$\mathfrak{g}$ の σ, さらに τ による固有分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ とする．S を任意の $\mathcal{O}$-部分多様体とし，$o \in S$, $T_oS = \mathfrak{p}_-$, $T_o^\perp S = \mathfrak{p}_+$ と仮定する．ここで，o は $M = G/K$ の基点である．S の第二基本形式を α, その型作用素を A_ξ $(\xi \in \mathfrak{p}_+)$ とし，$x \in \mathfrak{p}_-$ に対して $\hat{\alpha}(x) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$ を $\hat{\alpha}(x)y = \alpha(x, y)$, $\hat{\alpha}(x)\xi = -A_\xi(x)$ $(x, y \in \mathfrak{p}_-, \xi \in \mathfrak{p}_+)$ によって定める．このとき S が $\mathcal{O}$-部分多様体であることを用いて，$\hat{\alpha}(x) \in \mathfrak{k}_-$，すなわち，$\hat{\alpha} \in \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_-$ であることを示すことができる．さらに第二基本形式 α の対称性より $[\hat{\alpha}(x), y] + [x, \hat{\alpha}(y)] = 0$ $(x, y \in \mathfrak{p}_-)$ が従う．今，$\mathfrak{k}_+$-準同型 $\rho : \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_- \to \Lambda^2(\mathfrak{p}_-^*) \otimes \mathfrak{p}_+$ を

$$\rho(\lambda)(x, y) = [\lambda(x), y] + [x, \lambda(y)] \qquad \lambda \in \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_-, \quad x, y \in \mathfrak{p}_-$$

と定めれば，$\hat{\alpha}$ の条件は $\rho(\hat{\alpha}) = 0$ である．従って ρ が単射ならば，$\hat{\alpha} = 0$, i.e., $\alpha = 0$ となる．基点 o の取り方を替えれば S 上で第二基本形式が 0 となり, $S \subset M$ は全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体となる．従って，各二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に対して ρ の単射性を調べる．(双対ノンコンパクト二重対称リー代数 $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})$ に対する単射性はコンパクトと同じことに注意.) 実際，各既約コンパクト二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に対して $\mathfrak{k}_+$-表現空間 $\mathfrak{k}_-^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}_{\pm 1}^{\mathbb{C}}$ の重み分解を求め，$\mathfrak{k}_+$-準同型 ρ の単射条件を重みの言葉で書き単射性を判定する (0 でない各重み空間の次元が 1 であることに注意)．その結果，定理 (I) で挙げた (1) 〜 (5) 以外の既約コンパクト二重対称リー代数に対して ρ の単射性が確認できる．□

(II) 次に，(5) の既約コンパクト二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ で rank $M \geq 2$ となるものに対して，Ker ρ を調べると Ker $\rho = \{\mathrm{ad}(cH) : \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_- |\ c \in \mathbb{R}\}$ が分かる．$\mathrm{ad}(H)|_{\mathfrak{p}_-} = J^*$ と置けば，J^* は $\mathfrak{k}_+$-不変だから，$\mathfrak{p}_+$ に値をとる $\mathfrak{p}_-$ 上の対称双一次形式 $[J^*(x), y]$ $(x, y \in \mathfrak{p}_-)$ は法束 NS に値をとる S 上の平行テンソルに拡張される．これをまた J^* で記せば，S 上の第二基本形式 α は，ある S 上の関数 $c(p)$ $(p \in S)$ によって $\alpha = cJ^*$ とかける．さらに Codazzi 方程式によって c が定数であることが分かり，その結果 α は S 上で平行, すなわち，S は平行部分多様体となる．従って，基点 $o \in M$ において S と S_c の接空間と第二基本形式が一致するので S は S_c の開部分となる (平行部分多様体の初期値に関する一意性: W.

Strübing [30]). □

課題. 単連結リーマン対称空間の全測地的でない対称部分多様体の分類において，対称 R-空間は重要な役割を果たしている．実際，上記の定理 (I) の５つの例のうち (1),(2),(5) はその構成に対称 R-空間あるいは疑対称 R-空間が直接的に使われている．また，等質ケーラー埋込の分類を使う (3) についても，ある階別リー代数を使って，対称 R-空間の構成に類似の直接的構成理論が得られている (竹内 [31])．しかし, (4) については，(3) 同様の等質ケーラー埋込の分類理論を使う方法のみが知られている．(4) についても，対称 R-空間の場合に類似の直接的構成理論があることが期待できるのではないか.

課題. 定理の (I) の結果から，既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に付随する $\mathcal{O}$-幾何は，多くの場合，全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体のみからなる．このことから，Landsberg 流に次の問題が考えられる．

「一般に，全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体を許容する $\mathcal{O}$-幾何の中で，すべての $\mathcal{O}$-部分多様体が全測地的になる軌道 $\mathcal{O}$ を求めよ.」

ここで，全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体を許容する $\mathcal{O}$-幾何の軌道 $\mathcal{O} \subset Gr^s(TM)$ は，$V \in \mathfrak{O}$ が M の曲率テンソル R で不変, i.e., $R(V,V)V \subset V$ を満たすことと特徴づけることができる．また，リーマン対称空間の平行部分多様体の接空間は曲率不変になるので，類似の問題

「一般に，全測地的 $\mathcal{O}$-部分多様体を許容する $\mathcal{O}$-幾何の中で，すべての $\mathcal{O}$-部分多様体が平行部分多様体になる軌道 $\mathcal{O}$ を求めよ.」

が考えられる．

第三講．三次元リー群のグラスマン幾何的曲面論 (14:15-15:15)

三次元リー群は J. Milnor の研究によって，様々な具体的検証が可能な空間である．この空間の曲面論について，グラスマン幾何の問題 (1), (2) を考察することによって，グラスマン幾何的曲面論に対するアプローチ方法を検証する．(cf. J. Inoguchi, H. Naitoh，K. Kuwabara [32], [33],[34],[35], J. Milnor [13])

M を左不変計量 g を持つ ３次元単連結リー群 U とし，U が unimodular の場合と non-unimodular の場合に分けて考察する．一般に，リー群 U あるいはそのリー代数 $\mathfrak{u}$ が **unimodular** とは，$\mathfrak{u}$ の随伴写像 $\mathrm{ad}(X)$ $(X \in \mathfrak{u})$ のトレースが 0 になるときにいい，そうでないとき non-unimodular という．

最初に, U が unimodular の場合を考察する．一般に，３次元リー代数 $\mathfrak{u}$ 上に向きと内積

をとれば，外積 $\times$ が一意に定まり，

$$[X,Y]=L(X\times Y) \quad (X,Y\in\mathfrak{u})$$

を満たす $\mathfrak{u}$ 上一意的な線型変換 L が存在する．$\mathfrak{u}$ が unimodular であることは，L が対称変換であることで特徴付けられる．L の固有値 λ_i とその単位固有ベクトル E_i を用いて，ブラケット積 $[\ ,\ ]$ を

$$[E_2,E_3]=\lambda_1E_1, \quad [E_3,E_1]=\lambda_2E_2, \quad [E_1,E_2]=\lambda_3E_3$$

と表示することによって，J. Milnor [36] は次の 3 次元 unimodular リー群の分類表を得た．

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の符号	Unimodular リー代数	備考
(+,+,+)	$\mathfrak{su}(2)$	コンパクト, 単純
(−,+,+)	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	ノンコンパクト, 単純
(+,+, 0)	$\mathfrak{e}(2)$	可解
(−,+, 0)	$\mathfrak{e}(1,1)$	可解
(0, 0,+)	$\mathfrak{h}_3$	べき零
(0, 0, 0)	$\mathbb{R}^3$	可換

(∗) ここで, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(1,1)$ はそれぞれユークリッド平面, ミンコフスキー平面の運動群の リー代数, $\mathfrak{h}_3$ は Heisenberg 群の リー代数を表す.

また，V. Patrangenaru [37] によって，上記６つの単連結 unimodular リー群上の左不変計量の等長類とその等長変換群及び イソトロピー部分群が次のように決定されている．

$\mathfrak{u}$	g の等長類	等長変換群の次元	$I_o(U,g)$ における イソトロピー型	対称 空間	No.
$\mathfrak{su}(2)$	$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3$	$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\Rightarrow 3$	$\{e\}$		(1)
		$\lambda_1=\lambda_2$ or $\lambda_2=\lambda_3\Rightarrow 4$	$SO(2)$		(2)
		$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\Rightarrow 6$	$SO(3)$	$\mathbb{S}^3$	(3)
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\lambda_1<0<\lambda_2\leq\lambda_3$	$\lambda_2<\lambda_3\Rightarrow 3$	$\{e\}$		(4)
		$\lambda_2=\lambda_3\Rightarrow 4$	$SO(2)$		(5)
$\mathfrak{e}(2)$	$0<\lambda_1<\lambda_2$ or	$\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow 3$	$\{e\}$		(6)
	$\lambda_1=\lambda_2=1$	$\lambda_1=\lambda_2=1\Rightarrow 6$	$SO(3)$	$\mathbb{E}^3$	(7)
$\mathfrak{e}(1,1)$	$-\lambda_2\leq\lambda_1<0<\lambda_2$	3	$\{e\}$		(8)
$\mathfrak{h}_3$	$0<\lambda_1$	4	$SO(2)$		(9)
$\mathbb{R}^3$	unique	6	$SO(3)$	$\mathbb{E}^3$	(10)

I. [単位元型] イソトロピー群が $\{e\}$ の場合の $\mathcal{O}$-幾何 (1), (4), (6), (8)

この場合 (U,g) の等長変換群の単位元連結成分 G は U の左不変作用だから，グラスマン束 $Gr^2(TU)$ の G-軌道は２次元左不変線型分布で, $\mathcal{O}$-幾何 $\neq\emptyset$ であるための必要十分条件は, 線型分布が involutive になることである．軌道空間は グラスマン多様体 $Gr^2(\mathfrak{u})\cong\mathbb{R}P^2(\mathfrak{u})$ と同型になる．$\mathcal{O}$-幾何の性質は以下のとおり。

Cases	$\mathcal{O}$-幾何の存在	$\mathcal{O}$-曲面の特徴	全測地的曲面の存在
$\mathfrak{su}(2)$, (1)	非存在	—	—
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, (4)	$\mathbb{R}P^2$ の２次曲線 $\lambda_1w_1^2+\lambda_2w_2^2+\lambda_3w_3^2=0$	正定数ガウス曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2$ の場合に限り２軌道
$\mathfrak{e}(2)$, (6)	1 軌道	平坦極小曲面	非存在
$\mathfrak{e}(1,1)$, (8)	$\mathbb{R}P^2$ の２本の射影直線 $\lambda_1w_1^2+\lambda_2w_2^2=0$	非正定数ガウス曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1+\lambda_2=0$ の場合に限り２軌道

(∗) (w_1,w_2,w_3) は $\{E_1,E_2,E_3\}$ に関する $\mathfrak{u}$ の座標で $w_1^2+w_2^2+w_3^2=1$ とする.

II. [SO(2) 型] イソトロピー群が $SO(2)$ の場合の $\mathcal{O}$-幾何 (2), (5), (9)

この場合 (U,g) の等長変換群の単位元連結成分 $G\cong SO(2)\cdot U$ であり，またグラスマン多様体 $Gr^2(\mathfrak{u})$ の $SO(2)$-軌道空間は $SO(2)\backslash\mathbb{R}P^2(\mathfrak{u})$ と同型になる．$SO(2)$ の $\mathfrak{u}$ への作用は,

$\lambda_i = \lambda_j$ となる E_iE_j-平面の回転となり，各軌道は，残りの E_k 方向に垂直な小円の集合と同一視される．軌道のパラメータ付けは、E_iE_j-平面から軌道小円 $C(h)$ までの高さ h $(0 \leq h \leq 1)$ で与えられ，$Gr^2(TU)$ の G-軌道 $\mathcal{O}$ で $\mathcal{O} \cap Gr^2(\mathfrak{u}) = C(h)$ を満たすものを $\mathcal{O}(h)$ で表す．このとき，$\mathcal{O}(h)$ は，U 上の左普遍 S^1-束となる．

h を固定し，軌道小円 $C(h)$ の基点を取り，$C(h)$ の他の点を E_iE_j-平面の回転角 θ によって表し，θ を U 上の角度関数とみなす．このような角度関数 θ に対して，$\mathcal{O}(h)$ の局所断面，従って，$\mathcal{O}(h)$ に属する U 上の線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ を次のように定義する：$(\mathcal{D}^\theta)_u = (L_u)_*(P(u))$, ここで，$P(u) \in Gr^2(\mathfrak{u})$ は，$C(h)$ の基点から各 $\theta(u)$-回転して得られる $C(h)$ のベクトルと垂直な平面とする．

このとき，$\mathcal{O}(h)$-**幾何が空でないための必要十分条件**は，このような線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ で involutive なものが存在することである．この条件は，$\mathcal{D}^\theta$ に属する単位直交ベクトル場 X, Y とそれらに直交するベクトル場 N をとれば，$g([X,Y],N) = 0$ と表される．未知関数 θ と定数 h を用いて 1 組の正規直交枠 $\{X, Y, N\}$ を構成し，存在条件を偏微分方程式で表せば次のようになる：

$$\text{(A)} \quad h\sqrt{1-h^2}\sin\theta(E_i\theta) - h\sqrt{1-h^2}\cos\theta(E_j\theta) + (1-h^2)(E_k\theta) + \lambda(1-h^2) + \lambda_k h^2 = 0.$$

ここで $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$ とおく．$\mathcal{O}(h)$-曲面は, (A) の解 θ から得られる線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ の積分曲面として特徴付けられる．また，$\mathcal{O}(h)$-曲面が存在するとき，それが**平均曲率一定曲面になるための必要十分条件**は，さらに，

$$\text{(B)} \qquad \cos\theta(E_i\theta) + \sin\theta(E_j\theta) = -k/2$$

を満たすことである．ここで，k は任意定数で, 平均曲率は $H^\theta = k\sqrt{1-h^2}/4$ となる．例えば，$G = SU(2)$ の場合，さらに，方程式 (A), (B) を $SU(2) \cong S^3$ とみなし $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ の標準局所座標 $(x; y, z, w)$ を用いて記述すると,

$$\begin{aligned}
\text{(A')} \qquad & \{\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}x\sin\theta + \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}w\cos\theta + (1-h^2)z\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \\
& + \{\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}w\sin\theta - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}x\cos\theta - (1-h^2)y\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \\
& + \{-\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}z\sin\theta - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}y\cos\theta + (1-h^2)x\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) \\
& \qquad + 2(1-h^2) + 2\frac{\lambda_k}{\lambda}h^2 \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

$$\text{(B')}\qquad (x\cos\theta - w\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + (w\cos\theta + x\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + (-z\cos\theta + y\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) + \frac{k}{\sqrt{\lambda\lambda_k}} = 0.$$

のような準線型方程式になる．

$\mathcal{O}(h)$**-曲面の存在問題**, i.e., (A') の解の存在問題を解くために，単独変数 θ に関する準線型方程式の解の存在定理を使う．すなわち，存在のための必要十分条件は (A') において一階偏微分項の係数が同時に 0 にならないことで，この場合 $h \neq 1$ である．

次に，**平均曲率一定** $\mathcal{O}(h)$**-曲面の存在問題**を扱うために，この条件下で，(A') を実際に解くことを考える．そのために，関係式 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を用いて，(A') の特性線型常微分方程式系を変数 x を含めた線型常微分方程式系に拡張する．この拡大線型常微分方程式系を適切な初期曲面と初期値関数で解く．このとき，解と初期曲面の 3 つのパラメータの組 (t, a, b) が，逆関数定理によって，座標 (y, z, w) に変数変換できるように初期値関数を選ぶ．その上で，上記 (A') の拡大線型常微分方程式系の解を (B') へ代入して θ の初期値関数 $\varphi(a, b)$ に関する, パラメータ (t, a, b) を含む非線形偏微分方程式を導き，その解の存在を吟味する．

(A') の拡大線型常微分方程式系は**定数係数線型常微分方程式系**に変数変換でき，その係数行列の Jordan 標準形 (h, λ_i に依存）によって $\mathcal{O}(h)$-幾何の状況が異なる．得られた結果は次のとおり．

Cases	$\mathcal{O}$-幾何の存在	$\mathcal{O}$-曲面 の特徴	CMC 曲面の存在
$\mathfrak{su}(2)$, (2); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}P^1$ 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<1)$	存在		非存在
$(h=1)$	非存在	—	—
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, (5); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}H^1$ 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)})$	存在		h 依存の平均曲率の 非極小 CMC が存在
$(h=\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)})$	存在		常に極小で 負一定ガウス曲率
$(\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)}<h<1)$	存在		非存在
$(h=1)$	非存在	—	—
$\mathfrak{h}_3$, (9); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}$ 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<1)$	存在	負一定ガウス曲率	非存在
$(h=1)$	非存在	—	—

（∗）全てのケースにおいて，全測地的曲面は存在しない．

注意 (1) 結果的に, CMC $\mathcal{O}(h)$-曲面の存在・非存在については，存在のための h の条件をガウス方程式から抽出できる．(平均曲率が一定のとき ガウス曲率も一定となるため)
(2) $SL(2,\mathbb{R})$, $0<h<\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_1}}$ の場合の CMC 曲面の存在に関しては，他の場合と異なり，$SL(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解 $SL(2,\mathbb{R})=NKA$ に即した座標系を選び，KA 内の曲線の N-軌道 (N-invariant 曲面という) の中から，h が定数で平均曲率一定のものを具体的に構成することによって，その存在を示すことができる．(方程式 (B') よりこちらの方が解の存在を示すのが容易.)

次に U が左不変計量 g をもつ non-unimodular 3次元単連結リー群の場合を考察する．このとき，g を適切に相似変形すれば，U のリー代数 $\mathfrak{u}$ 上の正規直交基底 $\{E_1,E_2,E_3\}$ と非負数 $\xi,\eta\geq 0$ が存在して

$$[E_1,E_2]=(1+\xi)\{E_2+\eta E_3\},\quad [E_2,E_3]=0,\quad [E_3,E_1]=(1-\xi)\{\eta E_2-E_3\}$$

とできる．特に U は可解リー群である．また，$\mathfrak{u}$ 上に $\{E_1,E_2,E_3\}$ を正の座標系とする向き

を入れ外積 $\times$ を定めれば，unimodular の場合のように，$[X,Y]=L(X\times Y)$ $(X,Y\in\mathfrak{u})$ を満たす $\mathfrak{u}$ の線形変換 L は次のように表せる：

$$L(E_1)=0,\quad L(E_2)=(1-\xi)\eta E_2+(\xi-1)E_3,\quad L(E_3)=(1+\xi)E_2+(1+\xi)\eta E_3.$$

$\mathfrak{u}$ は non-unimodular だから L は対称変換でないことが確認できる．ここで，組 (ξ,η) を non-unimodular リー群 $\mathfrak{u}$ の**構造定数**といい，$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ と表す．また，$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ に対して $\mathcal{D}=\det L|_{\{E_2,E_3\}_{\mathbb{R}}}=(1-\xi^2)(1+\eta^2)$ とおき，$\mathcal{D}$ を u の **Milnor 不変量**という．このとき次が成り立つ：

命題. (ξ,η), $(\xi'\eta')\neq(0,0)$ とする．このとき $\mathfrak{u}(\xi,\eta)$, $\mathfrak{u}'(\xi',\eta')$ がリー代数として同型であるための必要十分条件はそれらの Milnor 不変量 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ が一致することである.

次に $\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ は，正規直交基 $\{E_1,E_2,E_3\}$ とそのブラケット積を使って，そのリーマン幾何的性質を具体的に知ることができる．以下 U を $\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ をそのリー代数とする左不変計量 g をもつ単連結リー群として，そのリーマン幾何的特徴について記する：

(1) U がリーマン対称空間であるための必要十分条件は, $\xi=0$ あるいは $(\xi,\eta)=(1,0)$ である．ここで，$\xi=0$ の場合は, $\mathcal{D}=1+\eta^2\geq 1$ であり，また任意の $\eta\geq 0$ に対して, U は負曲率 (-1) をもつ 3 次元実双曲空間 $\mathbb{R}H^3(-1)$ に等長同型である．つぎに $\eta=0$ の場合, $\mathcal{D}=1-\xi^2\leq 1$ であり，さらに， $\xi=0$ ならば $\mathbb{R}H^3(-1)$ に等長同型で，$\xi=1$ ならば $\mathbb{R}H^2(-4)\times\mathbb{R}$ に等長同型である.

(2) つぎに $\xi=1$ とする．この場合 $\mathcal{D}=0$ となり，任意の整数 $\eta>0$ に対して，U は, unimodular の場合に現れた $SL(2,\mathbb{R})$ 上の Bianchi-Cartan-Vranceanu metric (Patrangenaru の表の No.5, イソトロピー型 $SO(2)$) に等長同型である (リー群としては同型でない).

これらの状況から，$\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ の幾何学的状況が Milnor 不変量 $\mathcal{D}$ の値 1 を境にして変わることが予想される．随伴写像の制限 $\mathrm{ad}(E_1)|_{\{E_2,E_3\}_{\mathbb{R}}}$ の固有方程式 $\lambda^2-2\lambda+\mathcal{D}=0$ の判別式が $1-\mathcal{D}$ であるので，この状況の変化は，この判別式の値の符号変化とも考えることができる.

同様に，$\mathcal{O}$-幾何の状況も $\mathcal{D}$ の値 1 を境にして変化することが分かる. 先ず, 上の (1) より $\xi\neq\{0,1\}$ ならば，U はリーマン対称空間でないことに注意する．このとき：

命題. 条件 $\xi\neq 0,1$ を満たす全ての $\mathfrak{u}(\xi,\eta)$ は，[単位元型] のイソトロピーをもつ．従って，この場合，軌道 $\mathcal{O}$ のなす軌道空間は $Gr^2(\mathfrak{u})\cong\mathbb{R}P^2$ に微分同型である.

定理. U を左不変計量をもつ 3 次元 non-unimodular 単連結リー群で, 構造定数 (ξ,η) が $\xi\neq 0,1$ を満たすとする．このとき次が成り立つ：

(1) Milnor 不変量 $\mathcal{D}>1$ ならば，$\mathcal{O}$-幾何が空でない軌道 $\mathcal{O}$ は唯 1 つである；

(2) Milnor 不変量 $\mathcal{D}=1$ ならば，$\mathcal{O}$-幾何が空でない軌道 $\mathcal{O}$ の集合は軌道空間 $\mathbb{R}P^2(\mathfrak{u})$ の

１つの大円である；

(3) Milnor 不変量 $\mathcal{D} < 1$ ならば，$\mathcal{O}$-幾何が空でない軌道 $\mathcal{O}$ の集合は軌道空間 $\mathbb{R}P^2(\mathfrak{u})$ の２つの大円である．

注意 ３次元単連結リーマン等質空間は，リーマン対称空間か左不変計量を持つリー群であることが知られている (関川 [38])．また，一般に，リーマン対称空間の超曲面に関する任意の $\mathcal{O}$-幾何は空でないことも知られている (内藤 [39])．これらのことと第３講の結果から,「３次元単連結リーマン等質空間の曲面に関する空でない $\mathcal{O}$-幾何が分類された」と言える．

第四講．対称空間のグラスマン幾何的曲面論-現状と課題 - (15:30-17:00)

上記三次元リー群の場合のアプローチ方法を踏襲しながら，リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面論に対する問題 (1) の解決を目指す．現在の進展状況と今後の課題について説明する (ノート).

M を単連結リーマン対称空間，$o \in M$ とし，等長変換群の単位元連結成分 G の等質空間 G/K と表す．K は基点 o の連結なイソトロピー部分群である．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の 標準分解とし，接空間 T_oM を線形空間 $\mathfrak{p}$ と同一視する．また，K の T_oM への微分作用を $\mathfrak{p}$ への随伴作用 $\mathrm{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ で表す.

s を固定して，M の s 次元連結部分多様体 S に関する $\mathcal{O}$-幾何を考える．M はG-等質空間だから，軌道 $\mathcal{O}$ 全体がなす G-軌道空間 $G \setminus G^s(TM)$ は, s 次元接空間の基点 o への平行移動によって $K \setminus G^s(\mathfrak{p})$ と同一視される．同一視対応の定義可能は K が基点 o におけるホロノミー群に等しいことによる．今後，$K \setminus G^s(\mathfrak{p})$ を $G \setminus G^s(TM)$ の**パラメータ空間**と考える.

以下，$\mathcal{O} \in G \setminus Gr^s(TM)$ を固定し，M の $\mathcal{O}$-部分多様体の存在問題（軌道型グラスマン幾何の基本的問題 (1)) を考える．そのために，$\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる M 上の局所線形分布 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ を構成し，$\mathcal{D}$ が包含的であることを示せば，その積分多様体は $\mathcal{O}$-部分多様体になる．逆に，$\mathcal{O}$-部分多様体 S が与えられれば，M がリーマン等質空間だから，S の任意の点 p の周りに S と局所合同となるリーフを持つ局所葉層構造 $\mathcal{F}$ を定めることができる．$\mathcal{F}$ の接空間からなる局所線形分布 $\mathcal{D}'$ は包含的となる．従って，先ず，基点 o の周りに，$\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる局所線形分布 $\mathcal{D}$ を構成することから始める (構成方法は，第三講 unimodular ケース II [SO(2) 型] の場合を踏襲する).

$M \ni p$ に対して, $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \cap G^s(T_pM)$ とおく．基点 o から周りの点 p への測地線に沿った平行移動を P_{op} とする．M はリーマン対称空間だから，P_{op} はある等長変換の微分として実現される．従って, $P_{op}(\mathcal{O}_o) = \mathcal{O}_p$ である．軌道 $\mathcal{O}$ のパラメータを $Q = \mathcal{O}_o \in K \setminus G^s(\mathfrak{p})$ とおくとき，基点 o の周りの s 次元局所線形分布 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ に対して，局所写像 $Q^{\mathcal{D}}$:

$M \ni p \to (T_{op})^{-1}(\mathcal{D}_p) \in \mathcal{Q}$ が定まる．$\mathcal{Q}$ は K-軌道だから，$V_o = \mathcal{D}_o \in \mathcal{Q}$ と置くとき，$\Theta(o) = 0$ を満たす基点 o の周りの局所関数 $\Theta\colon\ M \to \mathfrak{k}$ が存在して，o の周りの点 p に対して $Q^{\mathcal{D}}(p) = \mathrm{Ad}(\exp\Theta(p))(V_o)$ を満たす．局所線形分布 $\mathcal{D}$ が包含的であるための条件は，$\Theta\colon\ M \to \mathfrak{k}$ を未知関数とする準線形１階偏微分方程式系で記述することができる．

今，この準線形１階偏微分方程式系を具体的に記述することを考える．基準部分空間 $V_o \in \mathcal{Q} \subset Gr^s(\mathfrak{p})$ を任意に１つ固定し，o の周りの $\Theta(o) = 0$ を満たす局所関数 $\Theta\colon\ M \to \mathfrak{k}$ に対して局所線形分布 $\mathcal{D}^\Theta = \{\mathcal{D}^\Theta_p\}$ を $\mathcal{D}^\Theta_p = P_{op}(\mathrm{Ad}(\exp\Theta(p))V_o)$ と定める．$\{e_1, \cdots, e_s\}$ を V_o の基底とし、これに付け加えて $\{e_1, \cdots, e_m\}$ を $\mathfrak{p}$ の基底とする．さらに，M 上の局所ベクトル場 E_i, X^Θ_i $(1 \le i \le m)$ を $(E_i)_p = P_{op}(e_i)$, $(X^\Theta_i)_p = P_{op}(\mathrm{Ad}(\exp\Theta(p))e_i)$ とおく．このとき, ベクトル場 $\{X^\Theta_1, \cdots, X^\Theta_s\}$ は，線形分布 $\mathcal{D}^\Theta$ の基底をなす.

【包含的線形分布 $\mathcal{D}$ の存在】 さて，一旦 $\mathcal{D}^\Theta$ から離れて，M 上，一般の s 次元線形分布 D について考える．

補題. $\mathcal{D}$ を M 上の基点 o の周りの s 次元線形分布，$\{X_1, \cdots, X_s\}$ を $\mathcal{D}$ の基底とする．このとき　$\mathcal{D}$ が包含的, i.e., $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ であるための必要十分条件は $X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = 0$ $(1 \le i, j \le s)$ である．

ここで，$\{E_1, \cdots, E_m\}$ を M の局所基底場とし，$[E_i, E_j] = \sum c^k_{ij} E_k$ $(1 \le i, j \le m)$, $X_i = \sum a^j_i E_j$ $(1 \le i \le s)$ と置く．このとき $X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a^{j_1}_1 \cdots a^{j_s}_s E_{j_1} \wedge \cdots \wedge E_{j_s} \wedge [X_i, X_j]$. さらに
$[X_i, X_j] = [\sum_k a^k_i E_k, \sum_\ell a^\ell_j E_\ell] = \sum a^k_i a^\ell_j c^h_{k\ell} E_h + \sum a^k_i (E_k a^\ell_j) E_\ell - \sum a^\ell_j (E_\ell a^k_i) E_k$ より
$X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a^{j_1}_1 \cdots a^{j_s}_s \{a^k_i a^\ell_j c^h_{k\ell} + a^k_i (E_k a^h_j) - a^\ell_j (E_\ell a^h_i)\} E_{j_1} \wedge \cdots \wedge E_{j_s} \wedge E_h$.
ここで，$a^h_{ij} = \sum a^k_i a^\ell_j c^h_{k\ell} + a^k_i (E_k a^h_j) - a^\ell_j (E_\ell a^h_i)$ と置き，さらに各 $\{i, j\}$ ことに $a^h_{ij} = a^h_{s+1}$ と見なせば，$X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a^{j_1}_1 \cdots a^{j_s}_s a^{j_{s+1}}_{s+1} E_{j_1} \wedge \cdots \wedge E_{j_s} \wedge E_{j_{s+1}}$．ここで $(s+1) \times m$ 行列 $A^{(ij)} = (a^\ell_k)$ と置けば

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \textstyle\sum_{1 \le h_1 < \cdots < h_{s+1} \le m}\ \det(a^{h_j}_i) E_{h_1} \wedge \cdots \wedge E_{h_{s+1}}.$$

従って $X_1 \wedge \cdots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = 0$ は rank $A^{(ij)} \le s$ を意味する．ここで $X_1, \cdots, X_s$ は１次独立だから rank $A^{(ij)} = s$ が従う．従って, 補題より，線形分布 $\mathcal{D}$ が包含的てある必要十分条件は，rank $A^{(i,j)} = s$ である．□

今，基点 o で次の**仮定** *1 を置く:

$$(X_k)_o = (E_k)_o\ (1 \le k \le s),\ \text{i.e.,}\ a^h_k(o) = \delta^h_k\ (1 \le k \le s,\ 1 \le h \le m)$$

このとき $A^(i, j)(o)$ の第１～s 列は１次独立となるので，基点 o の周りで $A^{(i,j)}$ の第１～s 列は１次独立としてよい．よって，$A^{(i,j)} = (\mathbf{a}^1 \cdots \mathbf{a}^m)$ と列ベクトルで表示すれば $\mathbf{a}^h = \sum_{r=1}^s \lambda^h_r \mathbf{a}^r$

を満たす o の周りの関数 λ_r^h $(1 \le r \le s,\ s+1 \le h \le m)$ が存在する．従って次の関係式が成立する．

補題. $1 \le i < j \le s,\ s+1 \le h \le m$ に対して (1) $a_\ell^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_\ell^r$ $(1 \le \ell \le s)$ 及び (2) $a_{s+1}^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_{s+1}^r$, i.e.,

$$\sum c_{k\ell}^h a_i^k a_j^\ell + a_i^k(E_k a_j^h) - \sum a_j^\ell(E_\ell a_i^h) = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h \{\sum c_{k\ell}^r a_i^k a_j^\ell + a_i^k(E_k a_j^r) - a_j^\ell(E_\ell a_i^r)\}$$

今から $s=2$ と**仮定** *2 する．このとき，上の補題は $3 \le h \le m$ に対して

(1)' $\quad a_\ell^h = \sum_{r=1}^2 \lambda_r^h a_\ell^r$ $(1 \le \ell \le 2)$ 及び

(2)' $\quad \sum c_{k\ell}^h a_1^k a_2^\ell + a_1^k(E_k a_2^h) - \sum a_2^\ell(E_\ell a_1^h) = \sum_{r=1}^2 \lambda_r^h \{\sum c_{k\ell}^r a_1^k a_2^\ell + a_1^k(E_k a_2^r) - a_2^\ell(E_\ell a_1^r)\}$

となる．(1)' を (2)' に代入して整理すれば, $3 \le h \le m$ に対して

$(a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1)\{c_{12}^h + \sum_{3\le r\le m}(c_{1r}^h\lambda_2^r - c_{2r}^h\lambda_1^r) + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^h \lambda_1^k \lambda_2^\ell + E_1(\lambda_2^h) - E_2(\lambda_1^h)$
$+ \sum_{3\le k\le m} \lambda_1^k E_k(\lambda_2^h) - \sum_{3\le \ell\le m} \lambda_2^\ell E_\ell(\lambda_1^h)\} = (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1)\times$
$\{\lambda_1^h(-\sum_{3\le r\le m} c_{2r}^1 \lambda_1^r + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^1 \lambda_1^k \lambda_2^\ell) + \lambda_2^h(\sum_{3\le r\le m} c_{1r}^2 \lambda_2^r + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^2 \lambda_1^k \lambda_2^\ell)\}$.

従って，先の**仮定** *1 より $(a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) \ne 0$ としてよいから次が成立する：

$c_{12}^h + \sum_{3\le r\le m}(c_{1r}^h\lambda_2^r - c_{2r}^h\lambda_1^r) + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^h \lambda_1^k \lambda_2^\ell + E_1(\lambda_2^h) - E_2(\lambda_1^h)$
$+ \sum_{3\le k\le m} \lambda_1^k E_k(\lambda_2^h) - \sum_{3\le \ell\le m} \lambda_2^\ell E_\ell(\lambda_1^h) =$
$\lambda_1^h(-\sum_{3\le r\le m} c_{2r}^1 \lambda_1^r + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^1 \lambda_1^k \lambda_2^\ell) + \lambda_2^h(\sum_{3\le r\le m} c_{1r}^2 \lambda_2^r + \sum_{3\le k,\ell\le m} c_{k\ell}^2 \lambda_1^k \lambda_2^\ell)$.

さらに次のように整理することができる：

命題. ($s=2$ の場合) $3 \le h \le m$ とする．このとき，$\alpha_{ij}^h = c_{ij}^h - \lambda_1^h c_{ij}^1 - \lambda_2^h c_{ij}^2$ $(1 \le i,j \le m)$, $\beta^h = \lambda_1^h \sum_{3\le j\le m} c_{1j}^1 \lambda_2^j + \lambda_2^h \sum_{3\le i\le m} c_{i2}^2 \lambda_1^i$, $\lambda_i^j = \delta_i^j$ $(i,j=1,2)$ と置けば,

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^m \{\lambda_1^i E_i(\lambda_2^h) - \lambda_2^i E_i(\lambda_1^h)\} + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij}^h \lambda_1^i \lambda_2^j + \beta^h = 0$$

が成り立つ．

注意 ここで，$\{c_{ij}^k\}$ が任意の 2 つの添え字の交換によって符号が変わるならば $\beta^h = 0$ が従う．このような例として，M がコンパクトリー群で，$E_1, \cdots, E_m$ が左不変ベクトル場の場合がある．このとき c_{ij}^k は定数である．

定理. ($s=2$ の場合)（$*$）を満たす λ_1^h, λ_2^h $(3 \le h \le m)$ をとり，$a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 \ne 0$ を満たす a_ℓ^r $(\ell, r = 1,2)$ を用いて $a_\ell^h = \sum_{r=1}^2 \lambda_r^h a_\ell^r$ $(\ell = 1,2)$ と置く．さらに，$X_\ell = a_\ell^1 E_1 + a_\ell^2 E_2 + \sum_{3\le h\le m} a_\ell^h E_h$ $(\ell = 1,2)$，$\mathcal{D} = < X_1, X_2 >_{\mathbb{R}}$ と置けば, 線形分布 $\mathcal{D}$ は包含的となる．

注意. 方程式（$*$）において，未知関数は λ_1^h, λ_2^h $(3 \le h \le m)$ の $2(m-2)$ 個である．この数は $\dim Gr^2(\mathfrak{p})$ に等しい．実際，これらの未知関数の値の組は，グラスマン多様体のある局所座標の値と考えることができる．

注意.（$*$）の解の存在について考える．o の周りの局所関数 λ_2^h $(3 \le h \le m)$ を任意関数

とし, 方程式（$\ast$）を λ_1^h $(3 \le h \le m)$ を未知関数とする準線形１階偏微分方程式系と見なす. o の周りの局所座標 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ $(x(o) = 0)$ をとり，局所座標で表せば,

$$(\ast)_{loc} \quad \sum_{i,j=1}^m \{\lambda_1^i(x)(E_i x^j)\frac{\partial \lambda_2^h}{\partial x^j} - \lambda_2^i(x)(E_i x^j)\frac{\partial \lambda_1^h}{\partial x^j}\} + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij}^h(x)\lambda_1^i(x)\lambda_2^j(x) + \beta^h = 0$$

と書ける．今, $\Lambda_i = (\lambda_i^h)_{h=3}^m$ $(i = 1, 2)$ とベクトル表示し, $a^j(x, \Lambda_2)$ $(1 \le j \le m)$, $b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ $(3 \le h \le m)$, $B(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ を次のように置く：

$$a^j(x, \Lambda_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)(E_i x^j),$$

$$b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{i,j=1}^m \lambda_1^i(x)(E_i x^j)\frac{\partial \lambda_2^h}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij}^h(x)\lambda_1^i(x)\lambda_2^j(x) + \beta^h,$$

$$B(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = (b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2)).$$

このとき，方程式 $(\ast)_{loc}$ は

$$(\ast)_{vect.} \qquad \sum_{j=1}^m a^j(x, \Lambda_2)\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x^j} - B(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = 0$$

と表せる．$B(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ は Λ_1 に関しては，高々２次の多項式である．この方程式のタイプは，**主部の等しい準線形１階偏微分方程式系**なので単独方程式系と同じように扱える．実際, 解 $\Lambda_1(x)$ の**存在条件**は

$(a^1(x, \Lambda_2), \cdots, a^m(x, \Lambda_2)) \ne 0$ である．もし，$1 \le^\forall j \le m$ に対して $a^j(x, \Lambda_2) = 0$ と仮定すれば，$\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)(E_i x^j) = 0$,i.e., $(\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)E_i)x^j = 0$. よって $\sum_{i=1}^m \lambda_2^i E_i = 0$. $\{E_1, \cdots, E_m\}$ は基底だから $\lambda_2^i = 0$ $(1 \le i \le m)$. これは $\lambda_2^2 = 1$ に矛盾する．従って，解は常に存在する．$\square$

次に，方程式 $(\ast)_{vect.}$ の**初期値関数に対する解の一意性**について記す．$s = (s_1, \cdots, s_{m-1})$ をパラメータとし, M の基点 o を含む超曲面 (**初期曲面**) $\Gamma : x = \gamma(s) = (\gamma_1(s), \cdots, \gamma_m(s))$, $\gamma(0) = x(o) = 0$ をとり，Γ 上の任意関数（**初期値関数**) を $\Phi(s) = (\phi^h(s))$ $(3 \le h \le m)$ とする．このとき，m 次行列式

$$(\bigstar) = \det(A(\gamma(0), \Lambda_2(\gamma(0))), \cdots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_k}(0), \cdots) = \det(A(0, \Lambda_2(0)), \cdots \frac{\partial \gamma}{\partial s_k}(0), \cdots) \ne 0$$

（ここで $A(\ast) = (a^j(\ast))$ とおき, $A(\ast)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s_k}$ は m 次列ベクトルとみなす)

ならば, Γ 上で $\Lambda_1(\gamma(s)) = \Phi(s)$ (s は 0 の近傍) を満たす方程式 $(\ast)_{vect.}$ の解 Λ_1 が一意に存在する．今，局所座標 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ を $x(o) = 0$, $(E_i)_o = (\partial/\partial x^i)_o$ $(1 \le i \le m)$) を満たすようにとる．また，初期曲面 Γ を $\gamma^1(s) = s_1$, $\gamma^2(s) = 0$, $\gamma^3(s) = s_2, \cdots, \gamma^m(s) = s_{m-1}$ によって定める．このとき，条件 $(\bigstar)$ が満たされる．実際，$a^j(0, \Lambda_2(0)) = \sum_{i=1}^m \lambda_2^i(0)(E_i x^j)(0) = \lambda_2^j(0) = \delta_2^j$ だから，行列式 $(\bigstar)$ は,

$$(\bigstar) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_{m-1}}(0) \\ 1 & \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_{m-1}}(0) \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial\alpha_m}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial\alpha_m}{\partial s_{m-1}}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

となる.

以上の議論は, Λ_1 を任意に与え，Λ_2 を未知関数としても同様である.

注意. 方程式 $(*)$ が $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ を満たすならば, $c_{ij}^h = 0$ $(1 \leq i, j \leq m,\ 3 \leq m)$ でなければならない．これは局所基底場 $\{E_1, \cdots, E_m\}$ が座標場 $\{(\partial/\partial x^1), \cdots, (\partial/\partial x^m)\}$ ならば成り立つ.

【グラスマン多様体の局所座標】次に未知関数 Λ_1, Λ_2, より一般に $(m-s) \times s$-行列 $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_s) = (\lambda_r^h)$ の幾何学的意味について考える．$\mathfrak{p}$ の (線形) 基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ を固定する．$Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V$ に対して V の基底 $\{v_1, \cdots, v_s\}$ をとり，$(v_1, \cdots, v_s) = (e_1, \cdots, e_m)P$ とおく．ここで $m \times s$ 行列 P を $P = (p_1, \cdots, p_s)$ と表せば，列ベクトル $p_1, \cdots, p_s \in \mathbb{R}^m$ は１次独立となる．今，$\hat{V} =< p_1, \cdots, p_s >_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ とおく．このとき, $\iota : Gr^s(\mathfrak{p}) \in V \to \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ は定義可能写像になる．今, s-ベクトルの空間 $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)$ を $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) = \{F = (f_1, \cdots, f_s) \mid f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{R}^m$は１次独立 $\}$ とし，$F, F' \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)$ に対して ${}^\exists g \in GL(s, \mathbb{R})$ が存在して $F' = Fg$ となるとき, F と F' は同値, i.e., $F \sim F'$ と記し, その同値類を $[F]$ で表す．このとき $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)/\sim \ni [F] \to V =< f_1, \cdots, f_s >_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ によって，$Gr^s(\mathbb{R}^m)$ は $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)/\sim$ と同一視される．今，$1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq m$ となる組 $(i_1, \cdots, i_s)$ に対して，$Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の開集合 $U^{(i_1, \cdots, i_s)}$ を $U^{(i_1, \cdots, i_s)} = \{F \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) \mid ({}^tF)_{(i_1, \cdots, i_s)}$が正則行列$\}$，写像 $\varphi^{(i_1, \cdots, i_s)} : U^{(i_1, \cdots, i_s)} \to M(s, m-s; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{s(m-s)}$ を $\varphi^{(i_1, \cdots, i_s)}(F) = \{({}^tF)_{(i_1, \cdots, i_s)}\}^{-1}({}^tF)_{\overline{(i_1, \cdots, i_s)}}$ とおく．ここで，$({}^tF)_{(i_1, \cdots, i_s)}$ は $({}^tF)$ の第 $i_1, \cdots, i_s$ 列の作る s 次小行列，$({}^tF)_{\overline{(i_1, \cdots, i_s)}}$ は $({}^tF)$ から第 $i_1, \cdots, i_s$ 列を取り除いてできる $s \times (m-s)$ 小行列とする．このとき，組 $(U^{(i_1, \cdots, i_s)}, \varphi^{(i_1, \cdots, i_s)})$ はグラスマン多様体 $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の局所座標を与える.

注意. $s = 1$ の場合は, $Gr^1(\mathbb{R}^m)$ は $(m-1)$ 次元実射影空間となり, $(U^{(i)}, \varphi^{(i)})$ はよく知られた斉次座標である.

さて，s 次元線形分布 $\mathcal{D}$ の場合に話を戻そう．まず, λ_r^h $(1 \leq r \leq s, s+1 \leq h \leq m)$ の定義を思い出す．$\{X_1, \cdots, X_s\}$ を $\mathcal{D}$ の基底とし, $(X_1, \cdots, X_s) = (E_1, \cdots, E_m)A$ と置き，さらに $({}^tA) = (\mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^m)$ と列ベクトル表示する．ここで $({}^tA)_{(1,2,\cdots,s)}$ は正則として良かっ

た．このとき $\mathbf{a}^h = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r^h \mathbf{a}^r$, i.e., $(\mathbf{a}^{s+1}, \cdots, \mathbf{a}^m) = (\mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^s)(\lambda_r^h)$, i.e., $({}^tA)_{\overline{(1,2,\cdots,s)}} = ({}^tA)_{(1,2,\cdots,s)}(\lambda_r^h)$. 従って，$A \in U^{(1,2,\cdots,s)}$ で，$(\lambda_r^h) = (({}^tA)_{(1,2,\cdots,s)})^{-1}({}^tA)_{\overline{(1,2,\cdots,s)}} = \varphi^{(1,2,\cdots,s)}(A)$ となる．従って $(\lambda_r^h) \in \mathbb{R}^{s(m-s)}$ は $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の斉次座標である．特に，$s = 2$ の場合，Λ_1, Λ_2 が斉次座標である．

注意. 線形分布 $\mathcal{D}$ の基底 $\{X_1, \cdots, X_s\}$ を別の基底 $\{X_1', \cdots, X_s'\}$ に取り換えたとき，それぞれ対応する $\Lambda = (\lambda_r^h)$, $\Lambda' = (\lambda'{}_r^h)$ は等しい．実際, 局所基底場 $\{E_1, \cdots, E_m\}$ を固定し，$< X_1, \cdots, X_s >_{\mathbb{R}} = < X_1', \cdots, X_s' >_{\mathbb{R}}$ とすれば，$(X_1', \cdots, X_s') = (X_1, \cdots, X_s)\ {}^tP$ となる s 次正則行列 P がとれる．$(X_1, \cdots, X_s) = (E_1, \cdots, E_m)A$, $(X_1', \cdots, X_s') = (E_1, \cdots, E_m)A'$ とおく．このとき $A' = A^tP$. 従って $[A'] = [A]$, よって，$\varphi^{(1,\cdots,s)}(A') = \varphi^{(1,\cdots,s)}(A)$. これは $\Lambda' = \Lambda$ を意味する．

次に局所基底場 $\{E_1, \cdots, E_m\}$ を別の局所基底場 $\{E_1', \cdots, E_m'\}$ に換える, i.e., $(E_1', \cdots, E_s') = (E_1, \cdots, E_s)D_1$, $(E_{s+1}', \cdots, E_m') = (E_{s+1}, \cdots, E_m)D_2$ $(D_1 \in GL(s, \mathbb{R}), D_2 \in GL(m-s, \mathbb{R}))$ とする．$\mathcal{D} = < X_1, \cdots, X_s >_{\mathbb{R}}$ とし，$(X_1, \cdots, X_s) = (E_1, \cdots, E_m)A = (E_1', \cdots, E_m')B$ とおく．このとき $A = DB$，よって $({}^tA) = ({}^tB)^tD$. ここで $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$ である．従って $({}^tA)_{(1,\cdots,s)} = ({}^tB)_{(1,\cdots,s)}\ {}^tD_1$, $({}^tA)_{\overline{(1,\cdots,s)}} = ({}^tB)_{\overline{(1,\cdots,s)}}\ {}^tD_2$, さらに，$({}^tD_1)\Lambda = \Lambda'({}^tD_2)$.

【Ad(K)-軌道 $\subset Gr^s(\mathfrak{p})$ の斉次座標表現】 $Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V_o$ を固定し，$V_o = < e_1, \cdots, e_s >_{\mathbb{R}}$ となる $\mathfrak{p}$ の正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ をとり，$\iota : Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V \to \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ によって $Gr^s(\mathfrak{p})$ を $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ と同一視する．このとき K-軌道 $\mathrm{Ad}(K)V_o \subset Gr^s(\mathfrak{p})$ を $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の中の軌道として表す．$k \in K$ に対して，$\mathrm{Ad}(k)e_j = \sum_{i=1}^m O_i^j(k)e_i$, $O(k) = (O_i^j(k)) \in SO(m)$, i.e., $(\mathrm{Ad}(k)e_1, \cdots, \mathrm{Ad}(k)e_m) = (e_1, \cdots, e_m)O(k)$ とする．$\rho : K \ni k \to O(k) \in SO(m)$ は忠実表現, i.e., $\rho : K \cong O(K)$ である．また, $O(k) = (O_1(k), \cdots, O_m(k))$ と列ベクトル表示する．このとき, $V = \mathrm{Ad}(k)V_o$ と置けば，$V = < \mathrm{Ad}(k)e_1, \cdots, \mathrm{Ad}(k)e_s >_{\mathbb{R}}$ だから $\hat{V} = < O_1(k), \cdots, O_s(k) >_{\mathbb{R}}$ となる．特に，e を K の単位元, 1_m を m 次単位行列, $1_m = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$ とすれば，$O(e) = 1_m$ で $\hat{V}_o = < O_1(e), \cdots, O_s(e) >_{\mathbb{R}} = < \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s >_{\mathbb{R}}$ となる. 次に, $F = O^{[1,\cdots,s]}(k) = (O_1(k), \cdots, O_s(k))$ と置く．F は $m \times s$ 行列である．このとき $\varphi^{(1,\cdots,s)}(F) = \{({}^tF)_{(1,\cdots,s)}\}^{-1}({}^tF)_{\overline{(1,\cdots,s)}} = \{({}^tO^{[1,\cdots,s]}(k))_{(1,\cdots,s)}\}^{-1}\ ({}^tO^{[1,\cdots,s]}(k))_{\overline{(1,\cdots,s)}} = (\lambda_\ell^h(k))$ となる．ここで，$\Lambda(k) = (\lambda_\ell^h(k))$ は $s \times (m-s)$ 行列である．従って，次のように整理される：

命題. Ad(K)-軌道 $\subset Gr^s(\mathfrak{p})$ の，斉次座標による局所表現は

$$\varphi^{(1,\cdots,s)}(\mathrm{Ad}(K)V_0 \cap U^{(1,\cdots,s)}) = \{\Lambda(k) \in M(s, m-s; \mathbb{R}) |\ k \in K;\ \det[({}^tO^{[1,\cdots,s]}(k))_{(1,\cdots,s)}] \neq 0\}$$

で与えられる．特に $\varphi^{(1,\cdots,s)}(V_o) = \Lambda(e) = 0 \in M(s, m-s; \mathbb{R})$ である．

注意. $\varphi^{(1,\cdots,s)}(\mathrm{Ad}(K)V_0\cap U^{(1,\cdots,s)})$ の局所表示を K のリー代数 $\mathfrak{k}$ を使って表示する．$\{t_1,\cdots,t_\ell\}$ を $\mathfrak{k}$ の基底とし，$\mathrm{ad}(t_\alpha)e_j=\sum_{i=1}^m(t_\alpha)^i_je_i$ $(1\leq\alpha\leq\ell,\ 1\leq j\leq m)$, i.e., $(\mathrm{ad}(t_\alpha)e_1,\cdots,\mathrm{ad}(t_\alpha)e_m)=(e_1,\cdots,e_m)T_\alpha$ ($T_\alpha=((t_\alpha)^i_j)$) とおく．また，$\{y^1,\cdots,y^\ell\}$ を基底 $\{t_1,\cdots,t_\ell\}$ に付随する座標関数とし，$\mathfrak{k}\ni y$ を $y=\sum_{\alpha=1}^\ell y^\alpha t_\alpha$ と表す．このとき $(\mathrm{ad}(y)e_1,\cdots,\mathrm{ad}(y)e_m)=(e_1,\cdots,e_m)(\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha)$．従って $\mathrm{ad}(y)$ の表現行列は $\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha$ である．$\mathrm{Ad}(\exp y)=e^{\mathrm{ad}(y)}$ だから，$(\mathrm{Ad}(\exp y)e_1,\cdots,\mathrm{Ad}(\exp y)e_m)$ $=(e_1,\cdots,e_m)(e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})$, i.e., $\mathrm{Ad}(\exp y)$ の表現行列は $e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha}$ となる．従って $O(\exp y)=e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha}$ となり，K が連結であることに注意すれば,

$$\varphi^{(1,\cdots,s)}(\mathrm{Ad}(K)V_0\cap U^{(1,\cdots,s)})=\{\Lambda(e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})\in M(s,m-s;\mathbb{R})|\ (y^\alpha)\in\mathbb{R}^\ell;\ \det[({}^t((e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})^{[1,\cdots,s]}))_{(1,\cdots,s)}]\neq 0\}$$

と表せる．ここで，各 T_α は歪対称行列である．

次に，軌道 $\varphi^{(1,\cdots,s)}(\mathrm{Ad}(K)V_0\cap U^{(1,\cdots,s)})$ を $y=0$ の周りで y に関してパラメータ表示することを考える．先ず $y=0$ において,

$$\det[({}^t((e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})^{[1,\cdots,s]}))_{(1,\cdots,s)}]|_{y=0}=\det[{}^t(\varepsilon^{[1,\cdots,s]})_{(1,\cdots,s)}]=1\neq 0$$

だから，条件 $\det[({}^t((e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})^{[1,\cdots,s]})_{(1,\cdots,s)}]\neq 0$ は $y=0$ の近傍で成立しているとしてよい．このとき，m 次正方行列 $E_{[s,0]}, E_{[0,m-s]}$ を $E_{[s,0]}=\begin{bmatrix}1_s&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{[0,m-s]}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1_{m-s}\end{bmatrix}$, 射影 Π を $\Pi:M(m;\mathbb{R})\ni X=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}\to X_{12}\in M(s,m-s;\mathbb{R})$ とおけば, $\Lambda(y)=\Lambda(e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})$ は

$$(\sharp)\quad \begin{aligned}\Lambda(y)&=\Pi\big(\{E_{[s,0]}\cdot{}^t(e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha}\cdot E_{[s,0]})+E_{[0,m-s]}\}^{-1}\cdot{}^t(e^{\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha}\cdot E_{[s,0]})\big)\\&=\Pi\big(\{E_{[s,0]}\cdot(e^{-\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})+E_{[0,m-s]}\}^{-1}\cdot E_{[s,0]}\cdot(e^{-\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})\big)\end{aligned}$$

と表される．

注意. 軌道 $\mathrm{Ad}(K)V_0$ の V_0 における接空間 $T_{V_0}(\mathrm{Ad}(K)V_0)$ を調べてみる．これは，$\Lambda|_{y=0}=V_0$ だから微分写像 $\Lambda_*(0)$ を調べればよい．実際，軌道のパラメータ表示 Λ を微分して $(\partial\Lambda/\partial y^\alpha)(0)=-\Pi(E_{[s,0]}T_\alpha E_{[0,m-s]})$ を得る．ここで，Π は線形だから $\Pi_*=\Pi$, 一般に正則行列 $A(t)$ に対して逆行列の微分 $(A^{-1})'(t)=-A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$, $(\partial/\partial y^\alpha)|_{y=0}(e^{-\sum_{1\leq\alpha\leq\ell}y^\alpha T_\alpha})=-T_\alpha$ が使われる．従って $(\Lambda_*)_0(\partial/\partial y^\alpha)=-((T_\alpha)^i_j)^{i=1,\cdots,s}_{j=s+1,\cdots,m}=-(\mathrm{ad}(t_\alpha)|_{V_0})^{V_0^\perp}$．ここで，$(\mathrm{ad}(t_\alpha)|_{V_0})^{V_0^\perp}$ は随伴写像 $\mathrm{ad}(t_\alpha)$ を V_0 に制限した写像 $\mathrm{ad}(t_\alpha)|_{V_0}$ の値の, V_0 の直交補空間 $V_0^\perp$ の成分をとる線形写像を表す. 従って $\mathrm{Ker}\,(\Lambda_*)_0=\{t\in\mathfrak{k}:\ \mathrm{ad}(t)(V_0)\subset V_0,\ \mathrm{ad}(t)(V_0^\perp)\subset V_0^\perp\}$. これを $\mathfrak{k}_{V_0}$ と置けば，$T_{V_0}(\mathrm{Ad}(K)V_0)=\mathrm{Im}\,(\Lambda_*)_0\cong\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{V_0}$ である．

さて，$s=2$ の場合に話を戻して，方程式 $(*)$ を軌道 $\mathrm{Ad}(K)V_0$ と関連付けることを考え

る．この講の最初で，$o \in M$ の近傍から $0 \in \mathfrak{k}$ の近傍への関数 Θ を考え，o の近くの点 p で $\mathcal{D}^{\Theta}_p = P_{op}(\mathrm{Ad}(\exp \Theta(p))V_0)$ と定義することによって局所線形分布 $\mathcal{D}^{\Theta}$ を定めた．これは線形分布 $\mathcal{D}^{\Theta}$ の定義が軌道 $\mathrm{Ad}(\exp \mathfrak{k})V_0$ を経由していることを意味する．これまで同様に，$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ を $V_0 =< e_1, e_2 >$ を満たす $\mathfrak{p} = T_oM$ の正規直交基底とし，$x = (x^1, \cdots, x^m)$ をこの基底に付随する, i.e., $x(o) = 0$, $(\partial/\partial x^i)_o = e_i$ $(1 \le i \le m)$ を満たす正規座標とする．また，$\mathfrak{k}$ の正規直交基底 $\{t_1, \cdots, t_\ell\}$ をとり，それに関する座標を $y = (y^1, \cdots, y^\ell)$ とする．o の周りの局所関数 Θ を $y = \Theta(x)$, i.e., $\Theta(x) = (y^1(x), \cdots, y^\ell(x))$ と考え, また，方程式 $(\ast)$ の未知関数 $\Lambda(x) = (\lambda^j_i(x))^{j=3,\cdots,m}_{i=1,2}$ を $\Lambda(y(x))$ と見なし新しい未知関数を $\Theta(x)$, i.e., $y(x)$ とする．このとき，方程式 $(\ast)$ は次のように書き換えられる：

$$(\ast)_{loc} \quad \sum_{i,j=1}^m \{\lambda^i_1(x)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_2}{\partial x^j} - \lambda^i_2(x)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_1}{\partial x^j}\} + \sum_{i,j=1}^m \alpha^h_{ij}(x)\lambda^i_1(x)\lambda^j_2(x) + \beta^h = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\ast\ast)_{loc} \quad \sum_{\alpha,j=1}^{\ell,m} \sum_{i=1}^m \{\lambda^i_1(y)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_2}{\partial y^\alpha} - \lambda^i_2(y)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_1}{\partial y^\alpha}\}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_j}$$
$$+ \sum_{i,j=1}^m \alpha^h_{ij}(x, \Lambda(y))\lambda^i_1(y)\lambda^j_2(y) + \beta^h(x, \Lambda(y)) = 0,$$

さらに，$(q^h)^j_\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^m \{\lambda^i_1(y)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_2}{\partial y^\alpha} - \lambda^i_2(y)(E_ix^j)\frac{\partial \lambda^h_1}{\partial y^\alpha}\}$, $Q^h(x, y) = (q^j_\alpha)$ $(m \times \ell$ 行列), $Dy/Dx = (\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j})$ $(\ell \times m$ 行列)，$R^h(x, y) = \sum_{i,j=1}^m \alpha^h_{ij}(x, \Lambda(y))\lambda^i_1(y)\lambda^j_2(y) + \beta^h(x, \Lambda(y))$ と置けば,

$$(\ast\ast)_{vec} \qquad \mathrm{Tr}\ (Q^h(x, y) \cdot Dy/Dx) + R^h(x, y) = 0 \qquad (3 \le h \le m)$$

と書ける．ここで，未知関数 $y = y(x)$ に対する初期条件は $y(0) = 0$ である．

課題. ($s = 2$ の場合) 以上の議論から，局所線形分布 $\mathcal{D}^{\Theta}$ が包含的となるような基点 $o \in M$ の周りの局所関数 $\Theta : M \to \mathfrak{k}$ が存在するための必要十分条件は，初期条件 $y(0) = 0$ で次の (1), (2) を満たす関数 $y = y(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ が存在することである (ここで $p \in M$ に対して, $\Theta(p) = \sum_{\alpha=1}^\ell y^\alpha(x(p))t_\alpha \in \mathfrak{k}$ と考えている)：

(1) (微分方程式の条件) 関数 $y = y(x)$ は準線形１階偏微分方程式系 $(\ast\ast)$ を満たす.

(2) (関数関係の条件) さらに, $a^j_i(0) = \delta^j_i$ $(i, j = 1, 2)$ を満たす $y = 0 \in \mathbb{R}^\ell$ の周りの４つの関数 $a^j_i(y)$ が存在して次の関数関係が満たされる： $a^h_i(y) = \sum_{j=1,2} \lambda^h_j(y)a^j_i(y)$ $(3 \le h \le m)$ と置けば, $\mathrm{Ad}(\exp(\sum_{\alpha=1}^\ell y^\alpha(x)t_\alpha))e_i = \sum_{j=1}^m a^j_i(y(x))e_j$ $\quad (i = 1, 2)$ を満たす.

これらの条件を満たす局所関数 $y = y(x)$ 及び $a^j_i(y)$ $(i, j = 1, 2)$ の存在が問題になる．方程式系 $(\ast\ast)$ は未知関数が ℓ 個の $y^j(x)$ であるが，このうち $(\ell - 1)$ 個の関数を既知とすれば，主部の同じ単独未知関数の方程式系と見なせる．

参考文献

[1] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math., 148(1982), 47-157.

[2] J. M. Landsberg, Minimal submanifolds defined by first-order systems of PDE, J. Diff. Geom., 36(1992), 369-415.

[3] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, Mat. Sb., 30(1952), 349-462.

[4] D. S. P. Leung, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, Indiana Univ. Math. J., 24(1974), 327-339, Errata: *ibid.*, 24(1975), 1199.

[5] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds, J. Diff. Geom., 5(1971), 159-168.

[6] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 74(1957), 85-177.

[7] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 79-136.

[8] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14(1977), 501-518.

[9] K. Ogiue, Differential Geometry of Kaehler Submanifolds, Adv. in Math., 13(1974), 73-114.

[10] B. Y. Chen and K. Ogiue, On totally real submanifolds, Trans. of the Amer. Math. Soc., 193 (1974), 257-266.

[11] 内藤博夫，塚田和美, 対称空間の対称部分多様体の分類，数学 55(3)(2003), 42-57.

[12] 内藤博夫，竹内勝, 対称空間の対称部分多様体，数学 36(2)(1984), 137-156.

[13] J. D. Moore, Isometric immersions of riemannian products, J. Diff. Geom., 14(1979), 167-177.

[14] D. Ferus, Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math. Ann., 247(1980), 81-93.

[15] M. Takeuchi, Parallel submanifolds of space forms, Manifolds and Lie groups, in honor of Yozô Matsushima (J. Hano et al., eds.), Birkhäuser, Boston, 1981, 429-447.

[16] I. Satake, Algebraic structures of Symmetric domains, Iwanami Shoten, Tokyo and Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[17] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of general type, J. Math. Soc. Japan, 50(1998), 557-592.

[18] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of exceptional type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(1)(2000), 157-206.

[19] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of classical type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(2)(2000), 219-319.

[20] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of classical type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(2)(2000), 219-319.

[21] S. Murakami, Sur la classification des algèbres de Lie réelles et simples, Osaka J. Math., 2(1965), 291-307.

[22] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.

[23] M. Kon, On some complex submanifolds in Kähler manifolds, Canad. J. Math., 26(1974), 1442-1449.

[24] H. Naitoh and M. Takeuchi, Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, Osaka J. Math., 19(1982), 717-731.

[25] H. Naitoh, Parallel submanifolds of complex space forms I,II, Nagoya Math. J., 90(1983), 85-117 and 91(1983), 119-149.

[26] K. Tsukada, Parallel submanifolds in a quaternion projective space, Osaka J. Math., 22(1985), 187-241.

[27] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J. (2), 36(1984), 293-314.

[28] J. Berndt, J. H. Eschenburg, H. Naitoh, K. Tsukada,Symmetric submanifolds associated with the irreducible symmetric R-spaces, Math. Ann., 332(2005), 721-737.

[29] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J. (2), 36(1984), 293-314.

[30] W. Strübing, Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds, Math. Ann., 245(1979), 37-44.

[31] M. Takeuchi, Parallel projective manifolds and symmetric bounded domains, Osaka J. Math. J., 21(1984), 507-544.

[32] J. Inoguchi, K. Kuwabara, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional Heisenberg group, Hokkaido Math. J., 34(2005), 375-391.

[33] K. Kuwabara, Grassmann geometry on the groups of rigid motions on the Euclidean and Minkowski planes, Tsukuba J. Math., 30(2006), 49-59.

[34] J. Inoguchi, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I,II, Hokkaido Math. J., 38(2009), 375-391 and 40(2011), 411-429.

[35] J. Inoguchi, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional non-unimodular Lie groups, Hokkaido Math. J., (to appear).

[36] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Advances in Math. 21 (1976), 293-329.

[37] V. Patrangenaru, Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples, Pacific J. of Math. 173-2 (1996), 511-532.

[38] K. Sekigawa, On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces, Tensor (N. S.), 31(1977), 87-97.

[39] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces, in: The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996), Monogr. Geom. Topology 25, International Press, 1998, 211-222.

[40] I. Kath and M. Olbrich, On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces, Transformation Groups, 14-4(2009), 847-885.