

対称空間とグラスマン幾何

内藤博夫

秋葉原セミナー 平成30年2月10日

予 定

第一講 . グラスマン幾何と部分多様体論 インTRODクシヨN

この講の主な内容は、グラスマン幾何に係る基本事項のほか、キャリブレーションの幾何、 \mathbb{R}^n の極小部分多様体に関する J. M. Landsberg の結果、及び等質部分多様体をモデルとするグラスマン幾何の枠組みについて解説する。

第二講 . グラスマン幾何と対称部分多様体

リーマン対称空間の対称部分多様体の分類問題の解決にグラスマン幾何の枠組みがどのように関わっているかを解説する。

第三講 . 三次元リー群のグラスマン幾何的曲面論

三次元リー群は J. Milnor 等の研究によって、様々な具体的検証が可能な空間である。この空間で、グラスマン幾何的曲面論を考察し、そのアプローチ方法を解説する。

第四講 . 対称空間のグラスマン幾何的曲面論-現状と課題

三次元リー群の場合のアプローチ方法を踏襲しながら、リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面論（特に存在問題）について、現在の進展状況と今後の課題について解説する。

第一講 . グラスマン幾何と部分多様体論 イン트로ダクション

定義. (**Grassmann 幾何**) M を滑らかな m 次元多様体, s を $1 \leq s < m$ を満たす自然数とし, $Gr^s(TM) = \cup_{p \in M} Gr^s(T_pM)$ を M 上のグラスマン束とする. ここで, $Gr^s(T_pM)$ は, 接空間 T_pM の s 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体とする. $Gr^s(TM)$ の部分集合 Σ を与える. M の s 次元連結部分多様体 S が Σ -部分多様体であるとは, S のすべての接空間 T_pS が Σ に属するときいい, そのような Σ -部分多様体の族を Σ -幾何という. Harvey-Lawson が導入したグラスマン幾何の枠組みは, このような Σ -幾何の総称である.

Σ -部分多様体はその接空間が Σ によって制約を受けていることから, その局所的存在条件は Σ によって定まる準線形 1 階偏微分方程式系 の解の存在に他ならない.

定義.(Calibrated 幾何) リーマン多様体 M 上で, M に接する全ての向き付けられた s 次元線形部分空間 ξ に対して $\varphi|_{\xi} \leq \text{vol}_{\xi}$ を満たす s 次閉微分形式 φ を M 上の **Calibration** といい, (M, φ) を **Calibrated 多様体** という. $G_p(\varphi) = \{\xi \in \text{Gr}^s(T_p M) \mid \varphi|_{\xi} = \text{vol}_{\xi}\}$ とし, $G(\varphi) = \cup_{p \in M} G_p(\varphi) \subset \text{Gr}^s(TM)$ とおく. M の $G(\varphi)$ -部分多様体 S を, 総称して **Calibrated 部分多様体** といい, $G(\varphi)$ -幾何を **Calibrated 幾何** という. $G(\varphi)$ は **face** と呼ばれる.

Calibrated 多様体 (M, φ) の向き付けられたコンパクト s 次元連結部分多様体 S' は不等式 $\int_{S'} \varphi \leq \text{vol}(S')$ を満たし, 等号成立は S' が $G(\varphi)$ -部分多様体である. さらに, Stokes の定理によって

$G(\varphi)$ -部分多様体 S は, $[S'] = [S] \in H_s(M, \mathbb{R})$ となる部分多様体 S' の族の中で, 体積最小になる; $\int_S \text{vol}_S = \int_S \varphi = \int_{S'} \varphi \leq \int_{S'} \text{vol}_{S'}$.

Calibrated 部分多様体の典型例として, (1) Kähler 多様体 M の complex 部分多様体 S の族, (2) Calabi-Yau 多様体 M の special Lagrangian 部分多様体 S の族, (3) G_2 -多様体 M の associative 部分多様体 S の族および coassociative 部分多様体 S の族, (4) $Spin(7)$ -多様体 M の Cayley 部分多様体 S の族などが知られている.

【Landsberg の考察】 M を \mathbb{R}^{s+n} とし, グラスマン多様体 $Gr^s(\mathbb{R}^{s+n})$ の部分多様体 Σ で, \mathbb{R}^{s+n} の任意の Σ -部分多様体 S (言い換えれば, S の Gauss 写像の像 $\subset \Sigma$) が極小部分多様体という性質を満たすもの (**m-subset**) を 1 階 PDE の立場から考察する .

線形バージョン ($T_E\Sigma$ の候補) V を内積を持った s 次元ベクトル空間, W を n 次元ベクトル空間, $C^\infty(V, W)$ を V 上の W -値 C^∞ 関数のなす空間とする .

$C^\infty(V, W)$ の接空間 $\text{Hom}(V, W)$ の線形部分空間 A を与えると, $f \in C^\infty(V, W)$ に対して, $x \in V$ での f の Jacobians が A に属すると考えれば, A は 1 つの 1 階線形斉次 PDE を定めると考えることができる . このように見なした A を **tabuleau** と呼ぶ . 同様に, 2-jets の空間 $W \otimes \text{Sym}^2 V^*$ の線形部分空間 \tilde{A} を 2 階線形斉次 PDE とみなし, \tilde{A} を **tabuleau of order 2** と呼ぶ . $f \in C^\infty(V, W)$ に対する Laplace 方程式は, $\tilde{A} = \{P \in W \otimes \text{Sym}^2 V^* \mid \text{trace}(P) = 0\}$ で記述される .

次に tableau $A \subset \text{Hom}(V, W)$ の **prolongation** $A^{(1)}$ を

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \{P \in W \otimes \text{Sym}^2 V^* \mid \partial P / \partial x \in A \text{ for } \forall x \in V^*\} \\ &= (A \otimes V^*) \cap (W \otimes \text{Sym}^2 V^*) \end{aligned}$$

とする． $A^{(1)}$ は A によって定義される 1 階線形斉次 PDE のべき級数解の 2 階の偏微分係数のなす空間と考えられる．考察の線形バージョンは， $Df = 0 \Rightarrow$ Laplace 方程式 $\Delta f = 0$ を満たす 1 次線形微分作用素 D を見つけることと考えられるから， $A^{(1)}$ が traceless になる tableau A を見つけることに他ならない．このような A を **m-tableau** という．また，tableau A が **involutive** であるとは， A の定義方程式を微分しても新しい方程式が得られない，すなわち， A は解空間をできるだけ大きくした 1 階線形斉次 PDE であるときにいう．

論文では，Cauchy-Riemann, associative, coassociative, Cayley, Dirac, special Lagrangian と呼ばれる involutive m -tableaux が与えられ，また， m -tableau A の特徴付け，存在条件，特別な場合の m -tableaux の分類などが議論される．

m-subset Σ 以下, $Gr^s(\mathbb{R}^{s+n}) =: Gr_{s,n}$ と記し, $\Sigma \subset Gr_{s,n}$ は部分多様体と仮定する.

$E \in Gr_{s,n}$ とし, E での接空間 $T_E(Gr_{s,n})$ を $E^\perp \otimes E^*$ と同一視する. 多様体 S からの滑らかな写像 $g: S \rightarrow Gr_{s,n}$ に対して, $g(x) = E$ とすれば $(dg)_x \in E^\perp \otimes E^* \otimes T_x^*$ であり, 特に, g が部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の Gauss 写像 $\gamma: S \rightarrow Gr_{s,n}$ のとき, $x \in S$ に対して $\gamma(x) = T_x S = E$ とおけば, $(d\gamma)_x$ は部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の $x \in S$ における第二基本テンソルだから, $(d\gamma)_x \in E^\perp \otimes \text{Sym}^2(E^*)$ となる.

$\Sigma \subset Gr_{s,n}$ に対して, $A = T_E \Sigma \subset E^\perp \otimes E^*$, ($E \in \Sigma$) とおけば, A の prolongation $A^{(1)} = (A \otimes E^*) \cap (E^\perp \otimes \text{Sym}^2 E^*)$ は, $T_x = E$ を満たす Σ -部分多様体の x での第二基本テンソルの候補からなる空間と考えられる. 極小部分多様体 $S \subset \mathbb{R}^{s+n}$ の第二基本テンソルは, 平均曲率 0 だから $A^{(1)}$ は traceless である. 従って次が成立する:

命題. $\forall E \in \Sigma$ に対して $(T_E \Sigma)^{(1)}$ が traceless, i.e., $T_E \Sigma$ が m-tableaux ならば, Σ は m-subset である.

m-subset Σ は, そのすべての m-tableaux $T_E \Sigma$ が involutive のとき, また **involutive** であるという. 論文では, $T_E(Gr_{s,n}) = E^\perp \otimes E^*$ に自然に $L = GL(E^\perp) \times SO(E^*)$ を作用させ, $A, A' \subset E^\perp \otimes E^*$ に対して $\exists g \in L : A' = g \cdot A$ が成立つとき $A \sim A'$ (同値) と考え, 典型的な involutive m-tableau A を固定して, $\forall E \in \Sigma$ に対して $T_E \Sigma \sim A$ となるような m-subsets Σ の分類・構成等が議論される. Calibrated 幾何で挙げられた (1) ~ (4) の faces は *m-subset* の例である.

定義.(軌道型グラスマン幾何) M を連結等質リーマン多様体とし, その等長変換群の単位元連結成分 G を $Gr^s(TM)$ に等長変換の微分を通して作用させる. G は M に推移的に作用するから, G -軌道 $\mathcal{O} \subset Gr^s(TM)$ は M 上の等質束となる. $\Sigma = \mathcal{O}$ とし, M の (s 次元) Σ -部分多様体を \mathcal{O} -部分多様体という. このようなグラスマン幾何を軌道型グラスマン幾何 という.

等質リーマン多様体 M の任意の連結等質部分多様体 S は, \exists 軌道 \mathcal{O} に対する \mathcal{O} -部分多様体になる. ここで S が等質部分多様体 であるとは, $\forall p, q \in S$ に対して, $g(S) = S, g(p) = q$ となる $g \in G$ が存在することである.

軌道型グラスマン幾何の基本的な課題として

- (1) \mathcal{O} -部分多様体が存在する軌道 \mathcal{O} の決定 (局所的には準線形 PDE の解の存在問題),
- (2) 部分多様体論の構築 (全測地的, 定曲率, 極小, 平均曲率一定, 特に, 等質 など典型的な \mathcal{O} -部分多様体の存在・構築など)

等質部分多様体の分類問題 等質 \mathcal{O} -部分多様体の存在問題は, G -軌道空間の中で, そのような部分多様体を許容する軌道 \mathcal{O} の分布を知ることに関わり, 等質部分多様体の分類問題に対する最初のアプローチと考えられる. 以下, リーマン対称空間 M の場合に, 等質部分多様体 S の分類問題に対する知られている主な結果を挙げる:

最初のアプローチは, Dynkin の複素半単純リー代数の複素半単純リー部分代数の分類理論 (1959) から得られる単連結コンパクト半単純リー群 (両側不変計量によってリーマン対称空間 M) の閉リー部分群 (全測地的等質部分多様体 S) の分類.

その後, D.S.P. Leung によるリーマン対称空間 M の鏡映部分多様体 (全測地的等質部分多様体 S) の分類理論 (1979). S は M の等長対合の固定点集合の連結成分として定義され, その分類は, M. Berger による半単純アフィン対称空間の分類理論 (1957) や井川による対称三対の研究 (2011) とも密接に関連している.

そのほか, 個別リーマン対称空間の等質部分多様体の分類や対称部分多様体・平行部分多様体など特別な等質部分多様体の分類が知られている.

部分多様体論の変遷 一般に，部分多様体の幾何は，

m 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^m ， m 次元球面 S^m ， m 次元実双曲空間 $\mathbb{R}H^m$ などの定曲率空間の部分多様体論に始まり，

荻上，B.Y. Chen による複素空間形のケーラー部分多様体や全実部分多様体の研究 (1974) を経て，

階数 1 リーマン対称空間の部分多様体論とへ広がってきた．近年では，より一般のリーマン対称空間の部分多様体論の研究も活発に行われている．以下は，ユークリッド空間及び階数 1 リーマン対称空間における \mathcal{O} -幾何の例である．

例 1. (実空間形) M を単連結定曲率空間 \mathbb{R}^m ($c = 0$)， S^m ($c > 0$)， $\mathbb{R}H^m$ ($c < 0$) の 1 つとする． c は曲率の値を表す．これらは実空間形と呼ばれ， \mathbb{R}^m を除いて階数 1 リーマン対称空間である． M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ， $SO(m) \cdot \mathbb{R}^m$ ， $SO(m)$ ， $SL(m, \mathbb{R})$ となり， G は M 上のグラスマン束 $Gr^s(TM)$ に推移的に作用する．従って， \mathcal{O} -幾何は唯 1 つとなり，その \mathcal{O} -部分多様体 S は，単なる s 次元部分多様体に他ならない．

例 2. (複素空間形) M を正則断面曲率 $c > 0$ の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ ($m = 2n$), あるいは, $c < 0$ の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ ($m = 2n$) とする. これらは, 階数 1 リーマン対称空間で, $c = 0$ のユニタリ空間 \mathbb{C}^n を含め複素空間形と呼ばれる. M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ, $SU(n+1)$, $SU(1, n)$ で, G の $Gr^s(TM)$ への作用の軌道 \mathcal{O} は, $s = 1$ の時が唯一つ, $2 \leq s < m$ の時が無数になる. 例えば, 次のような代表的な軌道 \mathcal{O}_C , \mathcal{O}_T がある: J を M の複素構造とする. このとき

(C) 複素型 $\mathcal{O}_C : s = 2r$ とする. $\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_C \cap Gr^{2r}(T_pM) = \{V \in Gr^{2r}(T_pM) \mid JV = V\}$$

と置く. このとき \mathcal{O}_C -幾何は, r -次元ケーラー部分多様体の族となる.

(T) 全実型 $\mathcal{O}_T : s = n$ とする. $\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_T \cap Gr^n(T_pM) = \{V \in Gr^n(T_pM) \mid JV = V^\perp\}$$

と置く. このとき \mathcal{O}_T -幾何は, n -次元全実部分多様体の族となる.

例 3. (四元数空間形) M を四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ ($m = 4n$), あるいは, 四元数双曲空間 $\mathbb{H}H^n$ ($m = 4n$) とする. これらも階数 1 リーマン対称空間で, 四元数ユークリッド空間 \mathbb{H}^n を含め四元数空間形と呼ばれる. M の等長変換群の単位元連結成分 G はそれぞれ, $Sp(n+1)$, $Sp(1, n)$ で, G の $Gr^s(TM)$ への作用の軌道 \mathcal{O} は, $s = 1$ の時が唯 1 つ, $2 \leq s < m$ の時が無数になる. 例えば, 次のような代表的な軌道 $\mathcal{O}_{TC}: Sp(1)$ を M の四元数構造とする. このとき

(TC) 全複素型 $\mathcal{O}_{TC}: s = 2n$ とする. $\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_{TC} \cap Gr^{2n}(T_p M) = \{V \in Gr^{2n}(T_p M) \mid \exists I, J, K \in Sp(1): IV = V, JV \subset V^\perp, KV \subset V^\perp\}$$

と置く. ここで, $\{I, J, K\}$ は局所四元数構造とする. このとき \mathcal{O}_{TC} -幾何は, $2n$ -次元全複素部分多様体の族となる.

対称空間とグラスマン幾何

内藤博夫

秋葉原セミナー 平成30年2月10日

第二講 . グラスマン幾何と対称部分多様体

以下, M はリーマン対称空間, i.e., $\forall p \in M$ に対して, 点対称変換 s_p , i.e., $s_p(p) = p, d(s_p)_p = -1_{T_p M}$ を満たす M の等長変換が存在すると仮定する.

定義.(対称部分多様体) M の(正則)連結部分多様体 S は, $\forall p \in M$ で外的点対称変換 t_p , i.e., $t_p(p) = p, t_p(S) = S, (dt_p)_p v = -v$ ($v \in T_p S$), $= v$ ($v \in T_p^\perp S$) を満たす M の等長変換を持つとき対称部分多様体という.

【リーマン対称空間と対称部分多様体の類似】対称部分多様体 S は, 周辺空間 M の“対称性”を受け継ぐ等質部分多様体で, 再びリーマン対称空間になり, さらに次のような類似の特徴を持っている:

(1) S の第二基本形式 α は平行 ($\nabla \alpha = 0$). このような S を平行部分多様体という. これは M の曲率テンソル R が平行 ($\nabla R = 0$) に類似.

(2) S の接空間 $T_p S$ 及び法空間 $T_p^\perp S$ は曲率不変空間;

$$R(T_p S, T_p S)T_p S \subset T_p S, \quad R(T_p^\perp S, T_p^\perp S)T_p^\perp S \subset T_p^\perp S$$

○ 一般に, M の接部分空間 $V \subset T_p M$ が曲率不変ならば, $N \ni p$, $T_p N = V$ となる M の完備全測地的部分多様体 N が一意に存在する. $T_p S$, $T_p^\perp S$ に付随する完備全測地的部分多様体 N , N^\perp は, また M の対称部分多様体になる.

○ M が単連結リーマン対称空間の場合, この $T_p S$ 及び $T_p^\perp S$ の曲率不変の性質と単連結リーマン対称空間における等長線形変換の拡張定理によって, M の完備平行部分多様体 S は対称部分多様体になる. これは, $\nabla R = 0$ を満たす単連結完備リーマン多様体がリーマン対称空間であることに対比される.

以下, M は単連結リーマン対称空間と仮定する.

(3) 対称部分多様体 ($S \subset M$) は局所代数構造を持つ : 組 (S, M) は , 単連結半単純リーマン対称空間 M とプロパーな対称部分多様体 S (M のプロパーな直積因子を含まないし含まれない) とする . G のリー代数を \mathfrak{g} とし , 対称変換 s_p, t_p により誘導される G の内部自己同型及び \mathfrak{g} 上のその微分を , それぞれ, σ, τ と置く .

○ σ, τ は , 半単純リー代数 \mathfrak{g} 上の可換な対合で , それぞれの $(+1)$ -固有空間 (リー部分代数) が (-1) -固有空間 (線形部分空間) に忠実に作用する . 但し, \mathfrak{g} がノンコンパクト型のときは σ はカルタン対合である . このような対合の組 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ を 二重対称リー代数 と呼ぶ . 逆に , この局所代数構造から, S に接する全測地的対称部分多様体 ($N \subset M$) が構成できる . ($N \subset M$) は ($S \subset M$) に付随する という .

○ $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ と ($N \subset M$) は適切な同値関係の下で 1 対 1 に対応している . この対応は , 単連結半単純リーマン対称空間 M と対称リー代数 (\mathfrak{g}, σ) の類似である . この対応の下で , 対称リー代数 (\mathfrak{g}, σ) , (従って, M) の “コンパクト型・ノンコンパクト型 ” の双対性は自然に , 二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$, 従って, ($N \subset M$) の双対性を誘導する .

(4) 対称部分多様体 $(S \subset M)$ の既約直積分解：二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ の既約直和分解は (S, M) の既約直積分解を誘導する, i.e., $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ を $\sum_i^r (\mathfrak{g}_i, \sigma_i, \tau_i)$ ($1 \leq i \leq r$) の和に既約直和分解するとき, 各 $(\mathfrak{g}_i, \sigma_i, \tau_i)$ に付随する既約対称部分多様体 $(S_i \subset M_i)$ により, 既約直積分解 $(S \subset M) = (S_1 \subset M_1) \times \cdots \times (S_r \subset M_r)$ を得る. これは対称リー代数の直和分解が de Rham の分解定理を誘導するのに対し, 二重対称リー代数の直和分解が J.D. Moore の等長はめ込みの分解定理を誘導することに対比できる.

○ この既約直積分解は, ユークリッド因子を含む一般の単連結リーマン対称空間の場合に拡張でき, 単連結リーマン対称空間 M の対称部分多様体 S の分類問題は, (A) ユークリッド空間 \mathbb{R}^d のプロパー対称部分多様体 S の分類, 及び (B, C) 既約プロパー対称部分多様体 $(S \subset M)$ の分類の2つの場合に帰着する. 軌道型グラスマン幾何の観点から, $(S \subset M)$ は, 等質部分多様体だから, ある軌道 \mathcal{O} の \mathcal{O} -部分多様体で, 接する $(N \subset M)$ は唯1つの全測地的 \mathcal{O} -部分多様体である.

【対称部分多様体の分類問題】分類問題は，**[A]** \mathbb{R}^d のプロパー対称部分多様体 S の分類; **[B]** 既約全測地的 ($N \subset M$) (既約 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$) の分類 (軌道 \mathcal{O} の分類); **[C]** ($N \subset M$) の属する \mathcal{O} -幾何の全ての対称 \mathcal{O} -部分多様体 ($S \subset M$) の分類 の3つのステップに分かれる．

ステップ A \mathbb{R}^d のプロパー対称部分多様体は，“対称 R-空間”の超球面 S^{d-1} への標準的な埋め込みとして実現できる (D.Ferus). 対称 R-空間 S は次のように構成される: G/K を半単純ノンコンパクト型リーマン対称空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とし, $Z \in \mathfrak{p}$ を $\text{ad}(Z)^3 - \text{ad}(Z) = 0$ を満たす元とする．このとき, 対称 R-空間 $S = K(Z)$ は \mathfrak{p} の原点を中心とする半径 $r = \|Z\|$ の超球面 $S(\mathfrak{p})$ に含まれる．

○ G/K が既約のとき, 対称 R-空間 S は既約であるという．任意の対称 R-空間 $S \subset S(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ は, 埋め込みも込めて, 有限個の既約対称 R-空間 $S_i \subset S(\mathfrak{p}_i) \subset \mathfrak{p}_i$ ($1 \leq i \leq r$) の直積に分解され, 既約 $S_i \subset S(\mathfrak{p}_i)$ は極小埋め込みになる．

○ 組 $(G/K, Z)$ は ジョルダン代数・三項対から対称階別リー代数 $(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{+1}, \sigma)$ を経由して具体的に構成される (cf. 佐竹).

ステップ B 既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ の分類は次のように行う：
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を σ による \mathfrak{g} の (± 1) -固有空間分解, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ をさらに τ による \mathfrak{k} と \mathfrak{p} の (± 1) -固有空間分解とする. $\mathfrak{k}_+^{\mathbb{C}}$ の Dynkin 図形をとり, \mathfrak{k}_+ -表現空間 $\mathfrak{k}_-^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}_{\pm}^{\mathbb{C}}$ の支配的重みを表現空間を区別するラベルをつけて Dynkin 図形に付加した P-図形をつくる. このとき 既約二重対称リー代数の同値類は P-図形によって決定され, その種類は 100 種類以上ある. また, 対応する既約全測地的 (N, M) も局所的に分かる (内藤).

○ これに対比して, 既約対称リー代数 (\mathfrak{g}, σ) は, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ の Dynkin 図形に \mathfrak{k} -表現空間 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ の支配的重みを付加した S-図形によって決定される (村上). これは (コンパクトあるいはノンコンパクト型) 既約対称空間の局所分類を与える.

○ (第一講で説明したように) 二重対称リー代数の分類は, 半単純アフィン対称空間の局所分類 (M. Berger) やコンパクト型半単純リーマン対称空間の鏡映部分多様体の分類 (D.S.P. Leung) と 1 対 1 対応している.

例 1. (実空間形; Ferus, 竹内) n 次元実空間形の r 次元 全測地的対称部分多様体は, それぞれ 標準的埋込 $\mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n, S^r \subset S^n, \mathbb{R}H^r \subset \mathbb{R}H^n$ である. 実空間形の部分多様体が全齊的超曲面に含まれないとき“本質的”という. n 次元実空間形の全齊的超曲面は, また $\mathbb{R}^{n-1}, S^{n-1}, \mathbb{R}H^{n-1}$ のどれかである. 従って, 実空間形の対称部分多様体の分類は“本質的”なものを考えればよい.

○ \mathbb{R}^n 及び S^n の“本質的”対称部分多様体 S はステップ (A) で述べた対称 R-空間の埋め込みである. また, $\mathbb{R}H^n$ の“本質的”対称部分多様体 S は, $\mathbb{R}H^n$ を $(n+1)$ 次元ローレンツ空間 \mathbb{R}_1^{n+1} の疑球面と見なした時

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{R}H^{n_0} \times S_1 \times \cdots \times S_r \subset \mathbb{R}H^{n_0} \times S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_r} \\ &\subset \mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}_1^{n_0+1} \times \mathbb{R}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_r+1}. \end{aligned}$$

である. ここで, $S_i \subset S^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i+1}$ ($1 \leq i \leq r$) は既約対称 R-空間の埋め込みとする.

例 2 (C). (複素空間形:複素型 \mathcal{O}_C -幾何)

($M = \mathbb{C}P^n$ の場合, 高木-中川) \mathcal{O}_C -部分多様体は $\mathbb{C}P^n$ のケーラー部分多様体で, 全測地的対称ケーラー部分多様体は 標準的埋込 $\mathbb{C}P^r \subset \mathbb{C}P^n$ である. 一般に, $\mathbb{C}P^n$ のケーラー部分多様体が全測地的ケーラー超曲面 $\mathbb{C}P^{n-1}$ に含まれないときに“ 充満 ”という. 従って, $\mathbb{C}P^n$ の対称ケーラー部分多様体の分類は“ 充満 ”なものを考えればよい.

○“ 充満 ”な対称 \mathcal{O}_C -部分多様体は, コンパクトエルミート対称空間の $\mathbb{C}P^n$ への等質埋入となり, 一般に, $\mathbb{C}P^n$ へのコンパクトエルミート対称空間 S の“ 充満 ”ケーラー埋入 f は等質埋め込みとなり, 高木 竹内によって分類されている, “ 充満 ”対称部分多様体 $f : S \subset \mathbb{C}P^n$ を求めるためには, そのような分類の中から, 埋入の次数 $d(f) \leq 2$ (平行部分多様体の次数), 言い換えると, S の定義多項式の次数 ≤ 2 , を満たすものを探せばよい. 結果は次の 7 種類である:

- (1) 恒等写像 $f : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$;
- (2) Veronese 埋込 $f : \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^{\frac{(m+2)(m+1)}{2}-1}$;
- (3) Segre 埋込 $f : \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q \rightarrow \mathbb{C}P^{pq+p+q}$;
- (4) 包含写像 $f : \mathbb{C}Q^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$;
- (5) Plücker 埋込 $f : Gr^2(\mathbb{C}^{2+m}) \rightarrow \mathbb{C}P^{\frac{(m+2)(m+1)}{2}-1}$;
- (6) 第1標準埋込 $f : SO(10)/U(5) \rightarrow \mathbb{C}P^{15}$;
- (7) 第1標準埋込 $f : E_6/T \cdot Spin(10) \rightarrow \mathbb{C}P^{26}$.

($M = \mathbb{C}H^n$ の場合, 昆), 対称 \mathcal{O}_C -部分多様体は, 全測地的対称部分多様体 $S = \mathbb{C}H^r \subset \mathbb{C}H^n$ のみとなり, 全測地的でないものは存在しない.

例 2 (T). (複素空間形:全実型 O_T -幾何)

($M = \mathbb{C}P^n$ の場合, 内藤, 竹内) O_T -部分多様体は $\mathbb{C}P^n$ の n 次元全実部分多様体で, 全測地的なものは標準埋込 $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ である. \mathbb{C}^{n+1} の原点中心の単位超球面 S^{2n+1} をとり, Hopf 束化写像 $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ を考える. n 次元全実対称部分多様体 $S \subset \mathbb{C}P^n$ に対して, $\hat{S} = \pi^{-1}(S)$ ($\subset S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) は, $\dim \hat{S} = n + 1$ で \mathbb{C}^{n+1} の全実対称 \mathbf{R} -空間となる. 従って, 対称 \mathbf{R} -空間の分類からこのような条件を満たす \hat{S} をとり, これを S^1 -作用で商をとることで, $\mathbb{C}P^n$ の n 次元全実対称部分多様体 S が得られる.

○ 既約な \hat{S} は, 環状既約対称有界領域の Harish-Chandra 埋込の Shilov 境界として実現され, 次の5種類につきる:

$$U(n), U(2n)/Sp(n), U(n)/O(n), T \cdot S^{n-1}, T \cdot E_6/F_4.$$

($M = \mathbb{C}H^n$ の場合, 内藤) \mathcal{O}_T -部分多様体は $\mathbb{C}H^n$ の n 次元全実部分多様体で, 全測地的なものは標準埋込 $\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{C}H^n$ である. 疑エルミート空間 \mathbb{C}_1^n の原点中心の疑球面 S_1^{2n} をとり, Hopf 束化写像 $\pi : S_1^{2n} \rightarrow \mathbb{C}H^n$ を考え, $\mathbb{C}P^n$ の場合と同様に, n 次元全実対称部分多様体 $S \subset \mathbb{C}H^n$ に対して, $\hat{S} = \pi^{-1}(S)$ を定める. このとき, \hat{S} は $\dim \hat{S} = n + 1$ を満たすローレンツ多様体で \mathbb{C}_1^n の全実部分多様体となる. 対称 \mathbb{R} -空間のアナロジーとして, ローレンツ型の疑対称 \mathbb{R} -空間を構成し, その中から上記 \hat{S} の条件を満たす既約疑対称 \mathbb{R} -空間 \hat{S}_0 を求める. 次に \hat{S}_1 を $\mathbb{C}P^n$ の場合に構成された対称 \mathbb{R} -空間 \hat{S}_1 をとり, $\hat{S} = \hat{S}_0 \times \hat{S}_1$ と置く. \hat{S} を Hopf 束化写像 π の \mathbb{R} -作用で割ったものが, $\mathbb{C}H^n$ の n 次元全実対称部分多様体 S である.

○ $S_0 = \pi(\hat{S}_0)$ と置くと, $S_0 \subset \mathbb{C}H^d$ は, $S_0 = \mathbb{R}H^d \subset \mathbb{C}H^d$ (全測地的), $S_0 \subset \mathbb{C}H^d$ (ホ口球面型の d -次元平坦部分多様体), $S_0 \subset \mathbb{C}H^1$ (測地線と円), $S_0 = \{p\} \subset \mathbb{C}H^0$ (1点) のどれかになる.

例 3. (四元数空間形:全複素型 O_{TC} -幾何, 塚田) O_{TC} -部分多様体は $\mathbb{H}P^n$ の $2n$ 次元全複素部分多様体で, 全測地的対称全複素部分多様体は, 標準埋込 $\mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{H}P^n$ である. Hopf 束化写像 $\pi : \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ を考え, $\mathbb{H}P^n$ の全測地的でない $2n$ 次元全複素対称部分多様体を S とする. このとき S はコンパクトエルミート対称空間で, $S \subset \mathbb{H}P^n$ の水平リフト $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1}$ はシンプレクティック同変充満ケーラー埋込になる. 例 2 (C) の場合の類似の議論によって, $S \rightarrow \mathbb{H}P^n$ が対称全複素部分多様体になるための必要十分条件は, 次数 $d(f) = 3$ でシンプレクティック同変なものであることが分かる. この条件を満たすものをリストアップすれば次の 5 種類に尽きる:

- (1) テンソル積埋込 $f : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}Q^m \rightarrow \mathbb{C}P^{2m+3} \rightarrow \mathbb{H}P^{m+1}$;
- (2) Plücker 埋込 $f : Gr^3(\mathbb{C}^6) \rightarrow \mathbb{C}P^{19} \rightarrow \mathbb{H}P^9$;
- (3) 第 1 標準埋込 $f : Sp(3)/U(3) \rightarrow \mathbb{C}P^{13} \rightarrow \mathbb{H}P^6$;
- (4) 第 1 標準埋込 $f : SO(12)/U(6) \rightarrow \mathbb{C}P^{31} \rightarrow \mathbb{H}P^{15}$;
- (5) 第 1 標準埋込 $f : E_7/T \cdot E_6 \rightarrow \mathbb{C}P^{55} \rightarrow \mathbb{H}P^{27}$.

ノンコンパクト型 ($\mathbb{C}H^n \subset \mathbb{H}H^n$) は全測地的なものに限る.

例 4. (高階数 (≥ 2) リーマン対称空間) 初めに全測地的でない対称部分多様体を許容する既約 \mathcal{O} -幾何について説明する.

(M :コンパクト型の場合) M^* をコンパクト型既約エルミート空間かその空間の 2 コピーとし, N^* を M^* の実形とする. 但し, 2 コピーの場合はそれぞれの複素構造を反対に取る. N^* は M^* の全測地的対称部分多様体で, 既約対称 \mathbb{R} -空間で実現される (竹内).

○ ($N^* \subset M^*$) に対応する既約二重対称リー代数を $(\mathfrak{g}, \tau, \sigma)$ とし, 対合を取り換えた $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に対応する全測地的対称部分多様体を $(N \subset M)$ とする. N を含む \mathcal{O} -幾何が M の全測地的でない対称 \mathcal{O} -部分多様体を許容する.

○ σ による \mathfrak{g} の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, さらに τ による分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{p}_+$ とする. M, N (M^*, N^*) が基点 o (o^*) を含み, $T_o M = \mathfrak{p}$, $T_o N = \mathfrak{p}_-$ ($T_{o^*} M^* = \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_-$, $T_{o^*} N^* = \mathfrak{p}_-$) と同一視されるとしてよい. このとき, N^* が M^* の実形であることから, $T_{o^*} M^*$ の複素構造 J^* は, $J^* = \text{ad}(H)$ ($H \in \mathfrak{p}_+$) と一意に書ける. 従って $\text{ad}(H)\mathfrak{p}_- = \mathfrak{k}_-$, $\text{ad}(H)\mathfrak{k}_- = \mathfrak{p}_-$ が成立つ. $\mathbb{R} \cdot H$ は $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+$ の 1 次元中心である.

○ 任意の $c \geq 0$ に対して, $\mathfrak{m}_c = \{x + \text{ad}(cH)x \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathfrak{p}_-\} \subset \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{k}_-$, $\mathfrak{h}_c = [\mathfrak{m}_c, \mathfrak{m}_c] \subset \mathfrak{k}_+$, $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{m}_c$ とおく. このとき $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{m}_c$ は対称リー代数を定める. K_c を \mathfrak{k}_c をリー部分代数にもつ G のコンパクト連結リー部分群とし, 軌道 $S_c = K_c(o) \subset G/K = M$ をとる. このとき, $T_o S_c = \mathfrak{p}_-$ となり, τ は \mathfrak{k}_c を不変にし S_c の等長対合を引き起こす. その結果, S_c は対称 \mathcal{O} -部分多様体になる.

○ S_c の点 o における第二基本形式 α_c は $\alpha_c(x, y) = [\text{ad}(cH)x, y]$, ($x, y \in \mathfrak{p}_-$), によって与えられる. 従って, $c = 0$ のとき $S_c = N$, そして S_c ($c > 0$) は N と相似同型ではあるが, 互いに合同でない1パラメータ族で, 各 S_c は全測地的でない疑齊的部分多様体になる.

(M : ノンコンパクト型の場合) 上記のコンパクト型 ($N \subset M$) のノンコンパクト双対を (\bar{M}, \bar{N}) とし, 対応する二重対称リー代数を $(\bar{g}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})$ とする. コンパクト型と同様に, $c \geq 0$ に対して $\bar{m}_c, \bar{h}_c, \bar{k}_c$ を定め, さらに $\bar{K}_c, \bar{S}_c = \bar{K}_c(\bar{o}) \subset \bar{G}/\bar{K} = \bar{M}$ を定める. このとき, \bar{S}_c ($c > 0$) は, \bar{N} を含む \bar{M} 上の \bar{O} -幾何の全測地的でない対称 \bar{O} -部分多様体であることが分かる.

○ コンパクト型の場合と同様に, 第二基本形式の形から, $c = 0$ のとき $\bar{S}_c = \bar{N}$ で, \bar{S}_c ($c > 0$) は \bar{M} の疑齊的部分多様体となる. さらに \bar{S}_c は, $0 < c < 1$ のとき \bar{N} に相似同型, $1 < c$ のとき N に相似同型, $c = 1$ のとき, ユークリッド空間に等長同型であることが分かる (\bar{S}_c と \bar{N} の曲率テンソルを比較).

例. $(N^* \subset M^*) = (S^n \subset \mathbb{C}Q^n)$ をとれば, 対応するコンパクト ($N \subset M$) = $(S^n \subset S^{n+1})$, $(\bar{N} \subset \bar{M}) = (\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}H^{n+1})$ となる. このとき, $c > 0$ に対して, $S_c \subset S^{n+1}$, $\bar{S}_c \subset \mathbb{R}H^{n+1}$ は全齊的部分多様体となる. この例は, $\text{rank } M = \text{rank } \bar{M} = 1$ となる唯一の例である. その他はすべて $\text{rank} \geq 2$ となる.

ステップ C 単連結半単純リーマン対称空間 M の対称部分多様体 S の分類を完成させる次の定理を述べる .

定理. (J. Berndt, J. H. Eschenburg, 内藤, 塚田) コンパクト ($N \subset M$) 及びそのノンコンパクト双対 ($\bar{N} \subset \bar{M}$) を既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ 及び $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})$ に付随するプロパー全測地的対称部分多様体とし, それらから定まる軌道型グラスマン幾何をそれぞれ \mathcal{O} -幾何, $\bar{\mathcal{O}}$ -幾何と記す. このとき, $(N \subset M), (\bar{N} \subset \bar{M})$ が次の例でなければ, \mathcal{O} -部分多様体, $\bar{\mathcal{O}}$ -部分多様体は全測地的なものに限る :

(1) 例 1 (実空間形) ($S^r \subset S^n$), $(\mathbb{R}H^r \subset \mathbb{R}H^n)$ の場合 ; (2) 例 2 (複素空間形全実型) ($\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$), $(\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{C}H^n)$ の場合 ; (3) 例 2 (複素空間形複素型) ($\mathbb{C}P^r \subset \mathbb{C}P^n$) の場合 ; (4) 例 3 (四元数空間形全複素型) ($\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{H}P^n$) の場合 ; (5) 例 4 の 18 種類の既約対称 R-空間から構成された $(N \subset M), (\bar{N} \subset \bar{M})$ の場合.

(II) 上の (5) の 18 種類の場合について, $\text{rank } M, \text{rank } \bar{M} \geq 2$ とすれば, \mathcal{O} -部分多様体及び $\bar{\mathcal{O}}$ -部分多様体は, それぞれ S_c, \bar{S}_c ($c \geq 0$) の開集合に限る .

【証明の概略】(I) 双対性より, コンパクト型 ($N \subset M$) の場合を考えればよい. 対応する二重対称リー代数を $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ とし, \mathfrak{g} の σ, τ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ とする. S を任意の \mathcal{O} -部分多様体とし, 基点 $o \in S$, $T_o S = \mathfrak{p}_-$, $T_o^\perp S = \mathfrak{p}_+$ と仮定する. 基点 o において, S の第二基本形式を α , その型作用素を A_ξ ($\xi \in \mathfrak{p}_+$) と記す.

○ $x, y \in \mathfrak{p}_-$, $\xi \in \mathfrak{p}_+$ に対して $\hat{\alpha}(x) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$ を

$$\hat{\alpha}(x)y = \alpha(x, y), \quad \hat{\alpha}(x)\xi = -A_\xi(x)$$

によって定める. S が \mathcal{O} -部分多様体であることを用いて, $\hat{\alpha}(x) \in \mathfrak{k}_-$, よって, $\hat{\alpha} \in \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_-$ が分かる.

○第二基本形式 α の対称性より, $[\hat{\alpha}(x), y] + [x, \hat{\alpha}(y)] = 0$ が従う. 今, \mathfrak{k}_+ -準同型 $\rho: \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_- \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{p}_-^*) \otimes \mathfrak{p}_+$ を $\rho(\lambda)(x, y) = [\lambda(x), y] + [x, \lambda(y)]$ と定めれば, 上記の $\hat{\alpha}$ の条件は $\rho(\hat{\alpha}) = 0$ である.

○ ρ が単射ならば, $\hat{\alpha} = 0$, i.e., $\alpha = 0$ となる. 従って S は全測地的となる. 各二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に対して ρ の単射性を調べると. 定理 (I) (1) ~ (5) 以外の $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に対して ρ が単射になる.

(II) 定理の主張は, '(5) の 18 種類の場合について, $\text{rank } M, \bar{M} \geq 2$ とすれば, $\mathcal{O}, \bar{\mathcal{O}}$ -部分多様体は, S_c, \bar{S}_c ($c \geq 0$) の開集合に限る' である.

○ (5) の (g, σ, τ) で $\text{rank } M \geq 2$ となるものに対して, $\text{Ker } \rho$ を調べると $\text{Ker } \rho = \{\text{ad}(cH) : \mathfrak{p}_-^* \otimes \mathfrak{k}_- \mid c \in \mathbb{R}\}$ が分かる.

○ $\text{ad}(H)|_{\mathfrak{p}_-} = J^*$ と置けば, J^* は \mathfrak{k}_+ -不変だから, \mathfrak{p}_+ に値をとる \mathfrak{p}_- 上の対称双一次形式 $[J^*(x), y]$ ($x, y \in \mathfrak{p}_-$) は法束 NS に値をとる S 上の平行テンソルに拡張される. これをまた J^* で記す.

○ S 上の第二基本形式 α は, ある S 上の関数 $c(p)$ ($p \in S$) によって $\alpha = cJ^*$ とかける. さらに Codazzi 方程式によって c が定数であることが分かり, その結果, α は S 上で平行, よって, S は平行部分多様体となる.

○ 基点 $o \in M$ において S と S_c の接空間と第二基本形式が一致するので, 平行部分多様体の初期値に対する一意性定理 (W. Strübing) によって, S は S_c の開部分となる.

課題 1. 単連結リーマン対称空間の全測地的でない対称部分多様体の分類において, 対称 R -空間は重要な役割を果たしている. 実際, 上記の定理 (I) の 5 つの例のうち (1), (2), (5) はその構成に対称 R -空間あるいは疑対称 R -空間が直接的に使われている. また, 等質ケーラー埋込の分類を使う (3) についても, ‘エルミート階別リー代数’ を使って, 対称 R -空間の構成に類似の直接的構成理論が得られている (竹内). しかし, (4) については, (3) 同様の等質ケーラー埋込の分類理論を使う方法のみが知られている. (4) についても, 対称 R -空間の場合に類似の直接的構成理論があることが期待できるのではないか.

課題 2. 定理の (I) の結果から, 既約二重対称リー代数 $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ に付随する \mathcal{O} -幾何は, 多くの場合, 全測地的 \mathcal{O} -部分多様体のみからなる. このことから, Landsberg 流に次の問題が考えられる.

「一般に, 全測地的 \mathcal{O} -部分多様体を許容する \mathcal{O} -幾何の中で, すべての \mathcal{O} -部分多様体が全測地的になる軌道 \mathcal{O} を求めよ .」

ここで, 全測地的 \mathcal{O} -部分多様体を許容する \mathcal{O} -幾何の軌道 $\mathcal{O} \subset Gr^s(TM)$ は, $V \in \mathcal{O}$ が M の曲率テンソル R で不変, i.e., $R(V, V)V \subset V$ を満たすことで特徴づけられる.

また, リーマン対称空間の平行部分多様体の接空間は曲率不変になるので, 類似の問題

「一般に, 全測地的 \mathcal{O} -部分多様体を許容する \mathcal{O} -幾何の中で, すべての \mathcal{O} -部分多様体が平行部分多様体になる軌道 \mathcal{O} を求めよ .」

が考えられる .

対称空間とグラスマン幾何

内藤博夫

秋葉原セミナー 平成30年2月10日

第三講 . 三次元リー群のグラスマン幾何的曲面論

M を左不変計量 g を持つ 3次元単連結リー群 U とし, U が unimodular の場合と non-unimodular の場合に分けて考察する .

定義 . 一般に, リー群 U あるいはそのリー代数 \mathfrak{u} が unimodular とは, \mathfrak{u} の随伴写像 $\text{ad}(X)$ ($X \in \mathfrak{u}$) のトレースが 0 になるときにいい, そうでないとき non-unimodular という .

○ 一般に, 3次元リー代数 \mathfrak{u} 上に向きと内積をとれば, 外積 \times が一意に定まり, $[X, Y] = L(X \times Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{u}$) を満たす \mathfrak{u} 上一意的な線型変換 L が存在する . \mathfrak{u} が unimodular であることは, L が対称変換であることで特徴付けられる .

【Unimodular Case】 L の固有値 λ_i とその単位固有ベクトル E_i を用いて, ブラケット積 $[,]$ を

$$[E_2, E_3] = \lambda_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2, \quad [E_1, E_2] = \lambda_3 E_3$$

と表す . J. Milnor は, λ_i の符号により, 次の 3次元 unimodular リー代数の分類表を得た .

【3次元 unimodular リー代数の分類表】

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の符号	Unimodular リー代数	備考
(+, +, +)	$su(2)$	コンパクト, 単純
(-, +, +)	$sl(2, \mathbb{R})$	ノンコンパクト, 単純
(+, +, 0)	$e(2)$	可解
(-, +, 0)	$e(1, 1)$	可解
(0, 0, +)	\mathfrak{h}_3	べき零
(0, 0, 0)	\mathbb{R}^3	可換

ここで, $e(2)$, $e(1, 1)$ はそれぞれユークリッド平面, ミンコフスキー平面の運動群のリー代数, \mathfrak{h}_3 は Heisenberg 群のリー代数を表す.

○ さらに, V. Patrangenaru により, 上記 6 つの単連結 unimodular リー群 U 上の左不変計量 g の等長類とその等長変換群及び イソトロピー部分群の単位元連結成分が次のように決定されている.

【左不変計量 (U, g) の等長類とその特徴】

u	g の等長類	等長変換群の次元	イソトロピー型	対称空間	No.
$\mathfrak{su}(2)$	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$	$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(1)
		$\lambda_1 = \lambda_2$ or $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 4$	$SO(2)$		(2)
		$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 6$	$SO(3)$	\mathbb{S}^3	(3)
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3$	$\lambda_2 < \lambda_3 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(4)
		$\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 4$	$SO(2)$		(5)
$\mathfrak{e}(2)$	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ or $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(6)
		$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow 6$	$SO(3)$	\mathbb{E}^3	(7)
$\mathfrak{e}(1, 1)$	$-\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	3	$\{e\}$		(8)
\mathfrak{h}_3	$0 < \lambda_1$	4	$SO(2)$		(9)
\mathbb{R}^3	unique	6	$SO(3)$	\mathbb{E}^3	(10)

I. 連結イソトロピー群が[単位元型] の場合 ((1),(4),(6),(8))

この場合 (U, g) の等長変換群の単位元連結成分 G は U の左不変作用だから, グラスマン束 $Gr^2(TU)$ の G -軌道は 2 次元左不変線型分布で, \mathcal{O} -幾何 $\neq \emptyset$ であるための必要十分条件は, 線型分布が **involutive** になることである. 軌道空間は グラスマン多様体 $Gr^2(u) \cong \mathbb{R}P^2(u)$ と同型になる. \mathcal{O} -曲面は, 存在すれば, 等質となりその性質は以下のとおり.

【 \mathcal{O} -曲面の存在とその特徴】

Cases	\mathcal{O} -幾何の存在	\mathcal{O} -曲面の特徴	全測地的曲面の存在
(1) $su(2)$	非存在		
(4) $sl(2, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}P^2$ の 2 次曲線	正定数ガウス曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2$ の場合に限り 2 軌道
(6) $e(2)$	1 軌道	平坦極小曲面	非存在
(8) $e(1, 1)$	$\mathbb{R}P^2$ の 2 本の 射影直線	非正定数ガウス曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ の場合に限り 2 軌道

II. 連結イソトロピー群が[SO(2)型]の場合((2), (5), (9))

○ この場合, (U, g) の等張変換群の単位元連結成分は $G \cong SO(2) \cdot U$ であり, またグラスマン多様体 $Gr^2(u)$ の $SO(2)$ -軌道空間は $SO(2) \backslash \mathbb{R}P^2(u) \cong SO(2) \backslash S^2(1) / \sim$ と同型になる. $SO(2)$ の u への作用は, $\lambda_i = \lambda_j$ となる $E_i E_j$ -平面の回転となり, 各軌道は, 残りの E_k 方向に垂直な小円の集合と同一視される. 軌道のパラメータ付けは, $E_i E_j$ -平面から軌道小円 $C(h)$ までの高さ h ($0 \leq h \leq 1$) で与えられる.

○ $Gr^2(TU)$ の G -軌道 \mathcal{O} で $\mathcal{O} \cap Gr^2(u) = C(h)$ を満たすものを $\mathcal{O}(h)$ で表せば, $\mathcal{O}(h)$ は, U 上の左普遍 S^1 -束となる.

○ h を固定し, 軌道小円 $C(h)$ の基点を取り, $C(h)$ の他の点を $E_i E_j$ -平面の回転角 θ によって表し, U 上の左移動を介して, θ を U 上の角度関数とみなす. このような角度関数 θ に対して, $\mathcal{O}(h)$ の局所断面, 従って, $\mathcal{O}(h)$ に属する U 上の線型分布 \mathcal{D}^θ を次のように定義する: $(\mathcal{D}^\theta)_u = (L_u)_*(P(u))$, ここで, $P(u) \in Gr^2(u)$ は, $C(h)$ の基点から各 $\theta(u)$ -回転して得られる $C(h)$ のベクトルと垂直な平面とする.

○ このとき, $\mathcal{O}(h)$ -幾何が空でないための必要十分条件は, このような線型分布 \mathcal{D}^θ で involutive なものが存在することである. この条件は, \mathcal{D}^θ に属する単位直交ベクトル場 X, Y とそれらに直交するベクトル場 N をとれば, $g([X, Y], N) = 0$ と表される.

○ 未知関数 θ と定数 h を用いて 1 組の正規直交枠 $\{X, Y, N\}$ を構成し, 存在条件を偏微分方程式で表せば次のようになる:

$$(A) \quad h\sqrt{1-h^2}\sin\theta(E_i\theta) - h\sqrt{1-h^2}\cos\theta(E_j\theta) \\ + (1-h^2)(E_k\theta) + \lambda(1-h^2) + \lambda_k h^2 = 0.$$

ここで $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$ とおく. $\mathcal{O}(h)$ -曲面は, (A) の解 θ から得られる線型分布 \mathcal{D}^θ の積分曲面として得られる.

○ また, $\mathcal{O}(h)$ -曲面が存在するとき, それが平均曲率一定曲面になるための必要十分条件は, さらに,

$$(B) \quad \cos\theta(E_i\theta) + \sin\theta(E_j\theta) = -k/2$$

を満たすことである. ここで, k は任意定数で, 平均曲率は $H^\theta = k\sqrt{1-h^2}/4$ となる.

○ 例えば, $G = SU(2)$ の場合, さらに, 方程式 (A), (B) を $SU(2) \cong S^3$ とみなし $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ の標準局所座標 $(x; y, z, w)$ を用いて記述すると,

$$\begin{aligned}
 (A') \quad & \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} x \sin \theta + \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} w \cos \theta + (1 - h^2) z \right\} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\
 & + \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} w \sin \theta - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} x \cos \theta - (1 - h^2) y \right\} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
 & - \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} z \sin \theta + \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}} h \sqrt{1 - h^2} y \cos \theta - (1 - h^2) x \right\} \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right) \\
 & + 2(1 - h^2) + 2 \frac{\lambda_k}{\lambda} h^2 = 0 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (B') \quad & (x \cos \theta - w \sin \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + (w \cos \theta + x \sin \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
 & + (-z \cos \theta + y \sin \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right) + \frac{k}{\sqrt{\lambda \lambda_k}} = 0.
 \end{aligned}$$

のような準線型方程式になる.

○ $\mathcal{O}(h)$ -曲面の存在問題: 単独変数 θ に関する準線型方程式の解の存在定理を使う. (A') の解が存在するための必要十分条件は, すべての一階偏微分項の係数が同時に 0 にならないことで, この場合 $h \neq 1$ である.

○ 平均曲率一定 $\mathcal{O}(h)$ -曲面の存在問題: 先ず, 条件 $h \neq 0$ の下で, (A') を実際に解く. 関係式 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を用いて, (A') の特性線型常微分方程式系を変数 x を含めた拡大線型常微分方程式系に拡張し, これを適切な初期曲面 $\Sigma(a, b)$ と θ の初期値関数 $\varphi(a, b)$ で解く. このとき, 解パラメータ t と初期曲面のパラメータ (a, b) の組 (t, a, b) が, 逆関数定理によって, 座標 (y, z, w) に変数変換できるように初期値関数を選ぶ. その上で, 上記 (A') の拡大線型常微分方程式系の解を (B') へ代入して, $\varphi(a, b)$ に関する非線形偏微分方程式を導き, その解の存在を吟味する.

○ (A') の拡大線型常微分方程式系は定数係数線型常微分方程式系に変数変換でき, その係数行列の **Jordan** 標準形 (h, λ_i に依存) によって $\mathcal{O}(h)$ -幾何の状況が異なる. 得られた結果は次のとおり.

【 \mathcal{O} -曲面の存在とその特徴】

Cases	\mathcal{O} -幾何の存在	\mathcal{O} -曲面の特徴	CMC 曲面の存在
(2) $su(2)$; ($h = 0$)	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}P^1$ 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
($0 < h < 1$)	存在		非存在
($h = 1$)	非存在		
(5) $sl(2, \mathbb{R})$; ($h = 0$)	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}H^1$ 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
($0 < h < \sqrt{\lambda/(\lambda - \lambda_1)}$)	存在		h 依存の平均曲率の 非極小 CMC が存在
($h = \sqrt{\lambda/(\lambda - \lambda_1)}$)	存在		常に極小で 負一定ガウス曲率
($\sqrt{\lambda/(\lambda - \lambda_1)} < h < 1$)	存在		非存在
($h = 1$)	非存在		
(9) \mathfrak{h}_3 ; ($h = 0$)	存在	平坦曲面で \mathbb{C} 上の Hopf 曲面	任意平均曲率の CMC が存在
($0 < h < 1$)	存在	負一定ガウス曲率	非存在
($h = 1$)	非存在		

(*) 全てのケースにおいて, 全測地的曲面は存在しない.

注意. (1) 結果的に, CMC $\mathcal{O}(h)$ -曲面の存在・非存在については, 存在のための h の条件をガウス方程式から抽出できる. (平均曲率が一定のとき ガウス曲率も一定となるため)

(2) $SL(2, \mathbb{R})$, $0 < h < \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1}}$ の場合の CMC 曲面の存在に関しては, 他の場合と異なり, $SL(2, \mathbb{R})$ の岩沢分解 $SL(2, \mathbb{R}) = NKA$ に即した座標系を選び, KA 内の曲線の N -軌道 (N -invariant 曲面という) の中から, h が定数で平均曲率一定のものを具体的に構成することによって, その存在を示すことができる. (方程式 (B') よりこちらの方が解の存在を示すのが容易.)

【Un-unimodular Case】次に U が左不変計量 g をもつ non-unimodular 3次元単連結リー群の場合を考察する .

○ g を適切に相似変形すれば , U のリー代数 \mathfrak{u} 上の正規直交基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ と非負数 $\xi, \eta \geq 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= (1 + \xi)(E_2 + \eta E_3), & [E_2, E_3] &= 0, \\ [E_3, E_1] &= (1 - \xi)(\eta E_2 - E_3) \end{aligned}$$

とできる . 特に U は可解リー群である .

○ \mathfrak{u} 上に $\{E_1, E_2, E_3\}$ を正の座標系とする向きを入れ外積 \times を定めれば , unimodular の場合のように , $[X, Y] = L(X \times Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{u}$) を満たす \mathfrak{u} の線形変換 L は次のようになる :

$$\begin{aligned} L(E_1) &= 0, & L(E_2) &= (1 - \xi)\eta E_2 + (\xi - 1)E_3, \\ L(E_3) &= (1 + \xi)E_2 + (1 + \xi)\eta E_3. \end{aligned}$$

L は対称変換でないことが確認できる . ここで , 組 (ξ, η) を non-unimodular リー群 \mathfrak{u} の構造定数といい , $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\xi, \eta)$ と表す .

定義. $u = u(\xi, \eta)$ に対して $\mathcal{D} = \det L|_{\{E_2, E_3\}_{\mathbb{R}}} = (1 - \xi^2)(1 + \eta^2)$ とおき, \mathcal{D} を u の **Milnor 不変量** という. このとき次が成り立つ:

命題. $(\xi, \eta), (\xi', \eta') \neq (0, 0)$ とする. このとき $u(\xi, \eta), u'(\xi', \eta')$ がリー代数として同型であるための必要十分条件はそれらの Milnor 不変量 $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ が一致することである.

○ U がリーマン対称空間であるための必要十分条件は, $\xi = 0$ あるいは $(\xi, \eta) = (1, 0)$ である. ここで, $\xi = 0$ の場合は, $\mathcal{D} = 1 + \eta^2 \geq 1$ であり, 任意の $\eta \geq 0$ に対して, U は 3次元実双曲空間 $\mathbb{R}H^3(-1)$ に等長同型である. つぎに $\eta = 0$ の場合, $\mathcal{D} = 1 - \xi^2 \leq 1$ であり, さらに, $\xi = 0$ は $\mathbb{R}H^3(-1)$ に等長同型で, $\xi = 1$ ならば $\mathbb{R}H^2(-4) \times \mathbb{R}$ に等長同型である.

○ $\xi = 1$ とする. この場合 $\mathcal{D} = 0$ となり, 任意の整数 $\eta > 0$ に対して, U は, unimodular $SL(2, \mathbb{R})$ 上の **Bianchi-Cartan-Vranceanu metric** (Patrangenaru の表 No.5: $[SO(2)]$ 型) に等長同型である.

命題. 条件 $\xi \neq 0, 1$ を満たす全ての $u(\xi, \eta)$ は, [単位元型] のイソトロピーをもつ. 従って, 軌道 \mathcal{O} の軌道空間は $Gr^2(u) \cong \mathbb{R}P^2$ に微分同型.

定理. U を左不変計量をもつ 3次元 non-unimodular 単連結リー群で, 構造定数 (ξ, η) が $\xi \neq 0, 1$ を満たすとする. このとき次が成り立つ:

- (1) Milnor 不変量 $D > 1$ ならば, \mathcal{O} -幾何が空でない軌道 \mathcal{O} は唯1つ;
- (2) Milnor 不変量 $D = 1$ ならば, \mathcal{O} -幾何が空でない軌道 \mathcal{O} の集合は軌道空間 $\mathbb{R}P^2(u)$ の1つの大円;
- (3) Milnor 不変量 $D < 1$ ならば, \mathcal{O} -幾何が空でない軌道 \mathcal{O} の集合は軌道空間 $\mathbb{R}P^2(u)$ の2つの大円.

注意 3次元単連結リーマン等質空間は, リーマン対称空間か左不変計量を持つリー群(関川). また, リーマン対称空間の超曲面に関する任意の \mathcal{O} -幾何は空でない(内藤). 従って, $\xi = 0, 1$ の場合はリーマン対称空間か $SL(2, \mathbb{R})$ 上の Bianchi-Cartan-Vranceanu metric であるから, “ 3次元単連結リーマン等質空間の曲面に関する空でない \mathcal{O} -幾何が分類された ” と言える.

対称空間とグラスマン幾何

内藤博夫

秋葉原セミナー 平成30年2月10日

第四講 . 対称空間のグラスマン幾何的曲面論-現状と課題

M を単連結リーマン対称空間, $o \in M$ とし, 等長変換群の単位元連結成分 G の等質空間 G/K と表す. K は基点 o の連結なイソトロピー部分群である. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を G のリー代数 \mathfrak{g} の標準分解とし, 接空間 T_oM を線形空間 \mathfrak{p} と同一視する. また, K の T_oM への微分作用を \mathfrak{p} への随伴作用 $\text{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ で表す.

○ M の s 次元連結部分多様体 S に関する \mathcal{O} -幾何を考える. M は G -等質空間だから, 軌道 \mathcal{O} 全体がなす G -軌道空間 $G \setminus G^s(TM)$ は, s 次元接空間の基点 o への平行移動によって $K \setminus G^s(\mathfrak{p})$ と同一視される (対応の定義可能は K が基点 o におけるホロノミー群に等しいことによる). 今後, $K \setminus G^s(\mathfrak{p})$ を $G \setminus G^s(TM)$ のパラメータ空間と考える.

$\circ \mathcal{O} \in G \setminus Gr^s(TM)$ に対し, \mathcal{O} -部分多様体の存在問題 (基本的問題 (1)) を考える. そのために, $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる M 上の局所線形分布 $\mathcal{D} = \{D_p\}$ を構成し, \mathcal{D} が包含的であることを示す. そのとき積分多様体は \mathcal{O} -部分多様体になる. 逆に, \mathcal{O} -部分多様体 S が与えられると, M がリーマン等質空間だから, S の任意の点 p の周りに S と局所合同なリーフを持つ葉層構造 \mathcal{F} を定めることができる. $\{\mathcal{F}\}$ の接束からなる線形分布 \mathcal{D}' は包含的となる.

\circ 第三講 unimodular ケース II[SO(2) 型] のように, 基点 o の周りに, $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる線形分布 \mathcal{D} を構成することから始める. $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \cap G^s(T_pM)$ とし, 基点 o から周りの点 p への測地線に沿った平行移動を P_{op} とする. リーマン対称空間の平行移動は等長写像の微分として得られるので, $P_{op}(\mathcal{O}_o) = \mathcal{O}_p$ ($\mathcal{O}_o \in K \setminus G^s(p)$) である. $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ を満たす基点 o の周りの線形分布 $\mathcal{D} = \{D_p\}$ は, $V(=D_o) \in \mathcal{O}_o$ と $\Theta(o) = 0$ を満たす局所関数 $\Theta: M \rightarrow \mathfrak{k}$ を用いて, 点 p において $D(p) = P_{op}[\text{Ad}(\exp \Theta(p))(V_o)]$ と表すことができる. \mathcal{D} が包含的であるための条件は, $\Theta: M \rightarrow \mathfrak{k}$ を未知関数とする準線形1階偏微分方程式系で記述することができる.

【線形分布 \mathcal{D} の包含性】 先ず, 一般の線形分布について考える.

補題. $\{X_1, \dots, X_s\}$ を M 上の s 次元線形分布 \mathcal{D} の基底とする. このとき, \mathcal{D} が包含的, すなわち, $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ であるための必要十分条件は

$F_{(i,j)} = X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = 0$ ($1 \leq i < j \leq s$) である.

○ここで, $\{E_1, \dots, E_m\}$ を M の局所基底場とし, $[E_k, E_\ell] = \sum_r c_{k\ell}^r E_r$, $X_i = \sum_r a_i^r E_r$ ($1 \leq i \leq s$) と置く. このとき, $1 \leq i < j \leq s$ に対して

$$F_{(i,j)} = \sum_{h_1, \dots, h_s, h=1}^m a_1^{h_1} \dots a_s^{h_s} a_{(i,j)}^h E_{h_1} \wedge \dots \wedge E_{h_s} \wedge E_h.$$

ここで $a_{(i,j)}^h = \sum_{k,\ell=1}^m (a_i^k a_j^\ell c_{k\ell}^h + a_i^k (E_k a_j^h) - a_j^\ell (E_\ell a_i^h))$ と置く. $a_{(i,j)}^h = a_{s+1}^h$ と見なし, $(s+1) \times m$ 行列 $A_{(i,j)}$ を $A_{(i,j)} = (a_k^\ell)$, $A_{(i,j)}^{[h_1, \dots, h_{s+1}]}$

をその $\{h_1 < \dots < h_{s+1}\}$ 列からなる小行列とすれば

$$F_{(i,j)} = \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_{s+1} \leq m} \det A_{(i,j)}^{[h_1, \dots, h_{s+1}]} E_{h_1} \wedge \dots \wedge E_{h_{s+1}}$$

となる. X_1, \dots, X_s は 1 次独立より, $F_{(i,j)} = 0$ は $\text{rank } A_{(i,j)} = s$ を意味する.

○ 今, \mathcal{D} を基点 $o \in M$ の周りの包含的線形分布とし

(仮定 1) $(X_k)_o = (E_k)_o$, i.e., $a_k^h(o) = \delta_k^h$ ($1 \leq k \leq s, 1 \leq h \leq m$)

を置く. このとき $A_{(i,j)}(o)$ の第 1 ~ s 列は 1 次独立となるので, 基点 o の周りで $A_{(i,j)}$ の第 1 ~ s 列は 1 次独立としてよい. 従って, $A_{(i,j)} = (a^1 \cdots a^m)$ と列ベクトル表示すれば, $a^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a^r$ を満たす o の周りの関数 λ_r^h ($1 \leq r \leq s, s+1 \leq h \leq m$) が一意に存在する. 従って次の関係式が成立する.

補題. $1 \leq i < j \leq s, s+1 \leq h \leq m$ に対して

(1) $a_\ell^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_\ell^r$ ($1 \leq \ell \leq s$), さらに

(2) $a_{s+1}^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_{s+1}^r$, 言い換えると,

$$\begin{aligned} \sum c_{k\ell}^h a_i^k a_j^\ell + a_i^k (E_k a_j^h) - \sum a_j^\ell (E_\ell a_i^h) \\ = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h [\sum c_{k\ell}^r a_i^k a_j^\ell + a_i^k (E_k a_j^r) - a_j^\ell (E_\ell a_i^r)]. \end{aligned}$$

(仮定 2) 今から $s = 2$, すなわち, $i = 1, j = 2$ とする.

○ 補題の関係式 (1) を (2) に代入して整理すれば, $3 \leq h \leq m$ に対して

$$\begin{aligned} & (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) [c_{12}^h + \sum_{3 \leq r \leq m} (c_{1r}^h \lambda_2^r - c_{2r}^h \lambda_1^r) + \sum_{3 \leq k, l \leq m} c_{kl}^h \lambda_1^k \lambda_2^l \\ & \quad + E_1(\lambda_2^h) - E_2(\lambda_1^h) + \sum_{3 \leq k \leq m} \lambda_1^k E_k(\lambda_2^h) - \sum_{3 \leq l \leq m} \lambda_2^l E_l(\lambda_1^h)] \\ = & (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) [\lambda_1^h (-\sum_{3 \leq r \leq m} c_{2r}^1 \lambda_1^r + \sum_{3 \leq k, l \leq m} c_{kl}^1 \lambda_1^k \lambda_2^l) \\ & \quad + \lambda_2^h (\sum_{3 \leq r \leq m} c_{1r}^2 \lambda_2^r + \sum_{3 \leq k, l \leq m} c_{kl}^2 \lambda_1^k \lambda_2^l)]. \end{aligned}$$

従って, (仮定 1) より $(a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) \neq 0$ としてよいから, さらに次のように整理することができる:

命題. $3 \leq h \leq m$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \alpha_{kl}^h &= c_{kl}^h - \lambda_1^h c_{kl}^1 - \lambda_2^h c_{kl}^2 \quad (1 \leq k, l \leq m), \quad \lambda_a^b = \delta_a^b \quad (a, b = 1, 2), \\ \beta^h &= \lambda_1^h (\sum_{3 \leq r \leq m} c_{1r}^1 \lambda_2^r) + \lambda_2^h (\sum_{3 \leq r \leq m} c_{r2}^2 \lambda_1^r) \end{aligned}$$

と置けば,

$$(*) \sum_{i=1}^m \{ \lambda_1^i E_i(\lambda_2^h) - \lambda_2^i E_i(\lambda_1^h) \} + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij}^h \lambda_1^i \lambda_2^j + \beta^h = 0$$

が成り立つ.

注意 ここで，係数関数 $\{c_{ij}^k\}$ が任意の2つの添え字の交換によって符号が変わるならば， $\beta^h = 0$ が従う．このような例として M が左不変計量をもつコンパクトリー群で， E_1, \dots, E_m が左不変な基底場ならば成立つ．この場合 c_{ij}^k は定数である．

定理．1階偏微分方程式 (*) を満たす λ_1^h, λ_2^h ($3 \leq h \leq m$) をとり， $a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 \neq 0$ を満たす a_ℓ^r ($r, \ell = 1, 2$) を用いて $a_\ell^h = \sum_{r=1}^2 \lambda_r^h a_\ell^r$ ($\ell = 1, 2$) と置く．さらに， $\ell = 1, 2$ に対して

$$X_\ell = a_\ell^1 E_1 + a_\ell^2 E_2 + \sum_{3 \leq h \leq m} a_\ell^h E_h, \quad \mathcal{D} = \langle X_1, X_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

と置けば，線形分布 \mathcal{D} は包含的となる．逆に，包含的線形分布はこのようにして構成できる．

注意．偏微分方程式 (*) の未知関数 λ_1^h, λ_2^h ($3 \leq h \leq m$) の個数は $2(m-2)$ 個であり，この数は $\dim Gr^2(p)$ に等しい (【グラスマン多様体の斉次座標】).

【方程式 (*) の解の存在】 o の周りの局所関数 λ_2^h ($3 \leq h \leq m$) を任意関数とし, 方程式 (*) を λ_1^h ($3 \leq h \leq m$) を未知関数とする準線形 1 階偏微分方程式系と見なす. o の周りの局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ をとれば, (*) は次のように書ける:

$$\begin{aligned}
 (*)_{\text{loc}} \quad & \sum_{i,j=1}^m [\lambda_1^i(x)(E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial x^j} - \lambda_2^i(x)(E_i x^j) \frac{\partial \lambda_1^h}{\partial x^j}] \\
 & + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij}^h(x) \lambda_1^i(x) \lambda_2^j(x) + \beta^h = 0
 \end{aligned}$$

と書ける. これをベクトル方程式化する: $\Lambda_i = (\lambda_i^h)_{h=3}^m$ ($i = 1, 2$), $a^j(x, \Lambda_2)$ ($1 \leq j \leq m$), $b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ ($3 \leq h \leq m$), $B(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ を次のように置く:

$$a^j(x, \Lambda_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)(E_i x^j), \quad B(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = (b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2))$$

$b^h(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_1^i(x) \sum_{j=1}^m [(E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial x^j} + \alpha_{ij}^h(x) \lambda_2^j(x)] + \beta^h$.
 このとき, 方程式 (*)_{loc} は

$$(*)_{\text{vec}} \quad \sum_{j=1}^m a^j(x, \Lambda_2) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x^j} - B(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = 0$$

と表せる. $B(x, \Lambda_1, \Lambda_2)$ は Λ_1 に関して高々 2 次の多項式である.

注意. ベクトル方程式 $(*)_{\text{vec}}$ のタイプは, 主部の等しい準線形 1 階偏微分方程式系なので単独方程式の場合と同じように扱える. 実際, 解 $\Lambda_1(x)$ の存在条件は, $A(x, \Lambda_2) = (a^1(x, \Lambda_2), \dots, a^m(x, \Lambda_2)) \neq 0$ である. もし, $1 \leq \forall j \leq m$ に対して $a^j(x, \Lambda_2) = 0$ と仮定すれば, $\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)(E_i x^j) = (\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x)E_i)x^j = 0$. よって $\sum_{i=1}^m \lambda_2^i E_i = 0$. $\{E_1, \dots, E_m\}$ は基底だから $\lambda_2^i = 0$ ($1 \leq i \leq m$). これは $\lambda_2^2 = 1$ に矛盾. 従って, 解は常に存在する.

注意. 方程式 $(*)_{\text{vec}}$ の初期値関数に対する解の一意性について記す. $s = (s_1, \dots, s_{m-1})$ をパラメータとし, M の基点 o を含む超曲面 (初期曲面) $\Gamma : x = \gamma(s) = (\gamma_1(s), \dots, \gamma_m(s))$, $\gamma(0) = x(o)$ をとり, Γ 上の任意関数 (初期値関数) を $\Phi(s) = (\phi^h(s))$ ($3 \leq h \leq m$) とする. $A(*, *)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s_k}$ を列ベクトルと見なすとき

$$(\star) \det(A(\gamma(0), \Lambda_2(\gamma(0)), \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}(0), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_{m-1}}(0))) \neq 0$$

ならば, $s = 0$ ($\gamma(0) = x(o) \in \Gamma$) の近傍で $\Lambda_1(\gamma(s)) = \Phi(s)$ を満たす方程式 $(*)_{\text{vec}}$ の解 Λ_1 が一意に存在する.

○ 実際，局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ を $x(o) = 0$, $(E_i)_o = (\partial/\partial x^i)_o$ ($1 \leq i \leq m$) を満たすようにとる．また，初期曲面 Γ を $\gamma^1(s) = s_1$, $\gamma^2(s) = 0$, $\gamma^3(s) = s_2, \dots, \gamma^m(s) = s_{m-1}$ によって定める．
 このとき， $a^j(0, \Lambda_2(0)) = \sum_{i=1}^m \lambda_2^i(0)(E_i x^j)(0) = \lambda_2^j(0) = \delta_2^j$ より

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{m-1}}(0) \\ 1 & \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_{m-1}}(0) \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \gamma_m}{\partial s_1}(0) & \cdots & \frac{\partial \gamma_m}{\partial s_{m-1}}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

となり条件 (★) は満たされる．(以上は， Λ_1, Λ_2 を取り換えても同様)

注意．方程式 (*) が $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ を満たすならば， $c_{ij}^h = 0$ ($1 \leq i, j \leq m$, $3 \leq m$) でなければならない．これは，局所基底場 $\{E_1, \dots, E_m\}$ が $\{(\partial/\partial x^1), \dots, (\partial/\partial x^m)\}$ ならば成立つ．

【グラスマン多様体の斉次座標】 Λ_1, Λ_2 の幾何学的意味について考える。
 p の基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ を固定する。 $Gr^s(p) \ni V$ に対して V の基底 $\{v_1, \dots, v_s\}$ をとり, $(v_1, \dots, v_s) = (e_1, \dots, e_m)P$ と置き $m \times s$ 行列 P を列ベクトルで $P = (p_1, \dots, p_s)$ と表す。今, $\hat{V} = \langle p_1, \dots, p_s \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ とおき, $Gr^s(p) \ni V \rightarrow \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ により同一視する。次に, $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) = \{F = (f_1, \dots, f_s) \mid f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}^m \text{ は } 1 \text{ 次独立}\}$ とし, $F, F' \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)$ に対して $\exists g \in GL(s, \mathbb{R}) : F' = Fg$ となるとき同値 $F \sim F'$ と定め, $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)/\sim \ni [F] \rightarrow V = \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ により同一視する。

○ $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m$ となる組 (i_1, \dots, i_s) に対して, $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の局所座標 $(U^{(i_1, \dots, i_s)}, \varphi^{(i_1, \dots, i_s)})$ を次のように定める:

$U^{(i_1, \dots, i_s)} = \{F \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) \mid ({}^tF)_{(i_1, \dots, i_s)} \text{ が正則行列}\}, \varphi^{(i_1, \dots, i_s)} :$
 $U^{(i_1, \dots, i_s)} \ni F \rightarrow [({}^tF)_{(i_1, \dots, i_s)}]^{-1} ({}^tF)_{\overline{(i_1, \dots, i_s)}} \in M(s, m-s; \mathbb{R})$
 とおく。ここで, $(*)_{(i_1, \dots, i_s)}$ は $(*)$ の第 i_1, \dots, i_s 列の作る s 次小行列,
 $(*)_{\overline{(i_1, \dots, i_s)}}$ は $(*)$ から第 i_1, \dots, i_s 列を取り除いてできる小行列とする。

注意. $s = 1$ の場合は, $Gr^1(\mathbb{R}^m)$ は $(m - 1)$ 次元実射影空間となり, $(U^{(i)}, \varphi^{(i)})$ はよく知られた斉次座標である.

注意. s 次元線形分布 \mathcal{D} の場合に話を戻し, λ_r^h ($1 \leq r \leq s, s + 1 \leq h \leq m$) の意味を考える. $\{X_1, \dots, X_s\}$ を \mathcal{D} の基底とし, $(X_1, \dots, X_s) = (E_1, \dots, E_m)A$ と置き, さらに $({}^t A) = (a^1, \dots, a^m)$ と列ベクトル表示する. ここで $({}^t A)_{(1,2,\dots,s)}$ は正則として良かった. このとき, $A \in U^{(1,2,\dots,s)}$ で, $(\lambda_r^h) = [({}^t A)_{(1,2,\dots,s)}]^{-1} ({}^t A)_{\overline{(1,2,\dots,s)}} = \varphi^{(1,2,\dots,s)}(A)$ となる.

従って $(\lambda_r^h) \in M(s, m - s; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{s(m-s)}$ は $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の斉次座標である. 特に, $s = 2$ の場合, Λ_1, Λ_2 が $Gr^2(\mathbb{R}^m)$ の斉次座標である.

注意. s 次元線形分布 \mathcal{D} の基底 $\{X_1, \dots, X_s\}$ を別の基底に取り換えても対応する斉次座標 (λ_r^h) の値は変わらない.

次に, 最初に固定する基底場 $\{E_1, \dots, E_m\}, \{E'_1, \dots, E'_m\}$ を s 次元線形分布 \mathcal{D} に沿うように取り換える, i.e., $(E'_1, \dots, E'_m) = (E_1, \dots, E_s)D$ ($D = (D_1, D_2) \in GL(s, \mathbb{R}) \times GL(m - s, \mathbb{R})$) とすれば, このとき ${}^t D_1(\lambda_r^h) = (\lambda'_r{}^h) {}^t D_2$ となる.

【Ad(K)-軌道 $\subset Gr^s(\mathfrak{p})$ の斉次座標表現】 $Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V_0$ を固定し, $V_0 = \langle e_1, \dots, e_s \rangle_{\mathbb{R}}$ となる \mathfrak{p} の正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ をとる. 同一視 $Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V \rightarrow \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ を通して, K -軌道 $Ad(K)V_0 \subset Gr^s(\mathfrak{p})$ を $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の中の軌道として表す.

$\circ k \in K$ に対して, $(Ad(k)e_1, \dots, Ad(k)e_m) = (e_1, \dots, e_m)O(k)$ ($O(k) \in SO(m)$) とおき. $O(k) = (O_1(k), \dots, O_m(k))$ と列ベクトル表示する ($K \cong O(K)$ に注意). このとき, $V = Ad(k)V_0$ と置けば, $\hat{V} = \langle O_1(k), \dots, O_s(k) \rangle_{\mathbb{R}}$, 特に, $e \in K$ を単位元, $1_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ を単位行列とすれば, $O(e) = 1_m$ で $\hat{V}_0 = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \rangle_{\mathbb{R}}$ である.

$\circ F = (O_1(k), \dots, O_s(k)) := O(k)^{[1, \dots, s]}$ と置く. このとき

$$\varphi^{(1, \dots, s)}(F) = [({}^t F)_{(1, \dots, s)}]^{-1} ({}^t F)_{(1, \dots, s)} = (\lambda_{\ell}^h(k)) := \Lambda(k).$$

命題. $Ad(K)$ -軌道 $\subset Gr^s(\mathfrak{p})$ の, 斉次座標による局所表現は

$$\begin{aligned} & \varphi^{(1, \dots, s)}(Ad(K)V_0 \cap U^{(1, \dots, s)}) \\ &= \{ \Lambda(k) \in M(s, m-s; \mathbb{R}) \mid k \in K; \det[({}^t(O(k)^{[1, \dots, s]}))_{(1, \dots, s)}] \neq 0 \} \\ & \text{で与えられる. 特に } \varphi^{(1, \dots, s)}(V_0) = \Lambda(e) = 0 \in M(s, m-s; \mathbb{R}) \text{ である.} \end{aligned}$$

注意. $\varphi^{(1, \dots, s)}(\text{Ad}(K)V_0 \cap U^{(1, \dots, s)})$ の局所表示を K のリー代数 \mathfrak{k} を使ってパラメータ表示する. $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ を \mathfrak{k} の基底とし, $\{y^1, \dots, y^\ell\}$ をこの基底に関する \mathfrak{k} の座標関数とする. また, 各 $1 \leq \alpha \leq \ell$ に対して

$$(\text{ad}(t_\alpha)e_1, \dots, \text{ad}(t_\alpha)e_m) = (e_1, \dots, e_m)T_\alpha \quad (T_\alpha \in \mathfrak{so}(m))$$

とおく. $\mathfrak{k} \ni y$ を $y = \sum_{\alpha=1}^{\ell} y^\alpha t_\alpha$ と表すとき

$$\varphi^{(1, \dots, s)}(\text{Ad}(K)V_0 \cap U^{(1, \dots, s)}) = \left\{ \Lambda(e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}) \in M(s, m-s; \mathbb{R}) \mid (y^\alpha) \in \mathbb{R}^\ell; \det[(t((e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha})[1, \dots, s]))_{(1, \dots, s)}] \neq 0 \right\}$$

と表せる. ここで, $\Lambda(y) = \Lambda(e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha})$ とし, m 次正方形行列 $E_{[s, 0]}$,

$$E_{[0, m-s]} \text{ を } E_{[s, 0]} = \begin{bmatrix} 1_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{[0, m-s]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{m-s} \end{bmatrix}, \text{ さらに射影 } \Pi \text{ を}$$

$$\Pi : M(m; \mathbb{R}) \ni X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \rightarrow X_{12} \in M(s, m-s; \mathbb{R}) \text{ と置けば,}$$

$$() \quad \Lambda(y) = \Pi \left([E_{[s, 0]} \cdot (e^{-\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}) + E_{[0, m-s]}]^{-1} \times \right. \\ \left. \times E_{[s, 0]} \cdot (e^{-\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}) \right)$$

と, 十分小さい $y \in \mathfrak{k}$ に対して表される.

注意. 軌道 $\text{Ad}(K)V_0$ の V_0 における接空間 $T_{V_0}(\text{Ad}(K)V_0)$ を調べてみる. これは, $\Lambda|_{y=0} = V_0$ だから微分写像 $\Lambda_*(0)$ を調べればよい. 実際, $1 \leq \alpha \leq \ell$ に対して

$$(\Lambda_*)_0(\partial/\partial y^\alpha) = -((T_\alpha)_j^i)_{j=s+1, \dots, m}^{i=1, \dots, s} = -(\text{ad}(t_\alpha)|_{V_0})V_0^\perp.$$

従って, $\text{Ker} (\Lambda_*)_0 = \{y \in \mathfrak{k} : \text{ad}(y)(V_0) \subset V_0, \text{ad}(y)(V_0^\perp) \subset V_0^\perp\}$.
これを \mathfrak{k}_{V_0} と置けば, $T_{V_0}(\text{Ad}(K)V_0) = \text{Im} (\Lambda_*)_0 \cong \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{V_0}$ である.

【 \mathcal{O} -曲面の存在方程式】 $s = 2$ の場合に話を戻して, 方程式 (*) を軌道 $\text{Ad}(K)V_0$ と関連付けることを考える. この講の最初で, 基点 $o \in M$ の近傍から $0 \in \mathfrak{k}$ の近傍への局所関数 Θ で, $\Theta(o) = 0$ を満たすものを考え, o の近くの点 p で $\mathcal{D}_p^\ominus = P_{op}(\text{Ad}(\exp \Theta(p))V_0)$ と定義することによって局所線形分布 \mathcal{D}^\ominus を定めた. これは線形分布 \mathcal{D}^\ominus の定義が軌道 $\text{Ad}(\exp \mathfrak{k})V_0$ を経由していることを意味する. これまで同様に, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を $V_0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ を満たす $\mathfrak{p} = T_oM$ の正規直交基底とし, $x = (x^1, \dots, x^m)$ をこの基底に付随する, i.e., $x(o) = 0$, $(\partial/\partial x^i)_o = e_i$ ($1 \leq i \leq m$) となる正規座標とする. また, \mathfrak{k} の正規直交基底 $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ をとり, それに関する

る座標を $y = (y^1, \dots, y^\ell)$ とする . 局所関数 Θ を $y = y(x)$ と考え, また, 方程式 (*) を未知関数 $y = y(x)$ の準線形偏微分方程式 (*') として書き換える :

$$(*)'_{\text{loc}} \sum_{\alpha, j=1}^{\ell, m} [\sum_{i=1}^m \{ \lambda_1^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial y^\alpha} - \lambda_2^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_1^h}{\partial y^\alpha} \}] (\partial y^\alpha / \partial x_j) \\ + \sum_{i, j=1}^m \alpha_{ij}^h(x, \Lambda(y)) \lambda_1^i(y) \lambda_2^j(y) + \beta^h(x, \Lambda(y)) = 0,$$

さらに, $Dy/Dx = (\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j})$ ($\ell \times m$ 行列),

$$Q^h(x, y) = ((q^h)_\alpha^j) \quad (m \times \ell \text{ 行列}),$$

$$(q^h)_\alpha^j(x, y) = \sum_{i=1}^m \{ \lambda_1^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial y^\alpha} - \lambda_2^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_1^h}{\partial y^\alpha} \},$$

$$R^h(x, y) = \sum_{i, j=1}^m \alpha_{ij}^h(x, \Lambda(y)) \lambda_1^i(y) \lambda_2^j(y) + \beta^h(x, \Lambda(y))$$

と置けば,

$$(*)'_{\text{vec}} \quad \text{Tr} (Q^h(x, y) \cdot Dy/Dx) + R^h(x, y) = 0 \quad (3 \leq h \leq m)$$

と書ける . ここで, 未知関数 $y = y(x)$ に対する初期条件は $y(0) = 0$ である .

課題. 以上の議論から, O -曲面の存在, i.e., 局所線形分布 \mathcal{D}^Θ が包含的となるような基点 $o \in M$ の周りの局所関数 $\Theta : M \rightarrow \mathfrak{k}$ が存在するための必要十分条件は, 初期条件 $y(0) = 0$ で次の (1), (2) を満たす関数 $y = y(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ が存在することである (ここで $p \in M$ に対して, $\Theta(p) = \sum_{\alpha=1}^{\ell} y^\alpha(x(p))t_\alpha \in \mathfrak{k}$ と考えている):

(1) (偏微分方程式の条件) 関数 $y = y(x)$ は準線形 1 階偏微分方程式系 $(*)'$ を満たす.

(2) (関数関係の条件) さらに, $a_i^j(0) = \delta_i^j$ ($i, j = 1, 2$) を満たす $y = 0 \in \mathbb{R}^\ell$ の周りの 4 つの関数 $a_i^j(y)$ が存在して次の関数関係が満たされる:
 $a_i^h(y) = \sum_{j=1,2} \lambda_j^h(y) a_i^j(y)$ ($3 \leq h \leq m$) と置けば

$$\text{Ad}(\exp(\sum_{\alpha=1}^{\ell} y^\alpha(x)t_\alpha))e_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(y(x))e_j \quad (i = 1, 2)$$

を満たす.

注意. これらの条件を満たす局所関数 $y = y(x)$ 及び $a_i^j(y)$ ($i, j = 1, 2$) の存在が問題になる. 方程式系 $(*)'$ は未知関数が ℓ 個の $y^j(x)$ であるが, このうち $(\ell - 1)$ 個の関数を既知とすれば, 主部の同じ単独未知関数の方程式系と見なせる.

ご清聴ありがとうございました