陰関数定理の説明

—島根大学集中講義の準備—

田崎博之

2006 年 7 月 8 日

定理 1 (陰関数定理) 平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合 O で定義された二変数関数 $f(x, y)$ は O において微分可能であり、df を O から $\mathbf{R}^2$ の双対空間 $(\mathbf{R}^2)^*$ への写像とみなして連続になっていると仮定する。$(x_0, y_0) \in O$ において

$$f(x_0, y_0) = a, \qquad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

ならば、x_0 を含む開区間 I と I 上定義された可微分関数 $g(x)$ が存在し

$$y_0 = g(x_0), \qquad x \in I \Rightarrow (x, g(x)) \in O, f(x, g(x)) = a$$

が成り立つ。さらに、次の等式が成り立つ。

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad (x \in I).$$

$g(x)$ を $f(x, y) = a$ から定まる**陰関数**と呼ぶ。

注意 2 上の陰関数定理の前半の主張を認めれば、後半の陰関数の微分を表わす等式は簡単に求められる。まず、それを確かめておこう。$x \in I$ に対して等式 $f(x, g(x)) = a$ が成り立つので、これを x で微分すると 0 になる。

$$0 = df_{(x,g(x))}\left(\frac{d}{dx}(x, g(x))\right) = df_{(x,g(x))}(1, g'(x)) = f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x).$$

これより次の等式を得る。

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad (x \in I).$$

　上の陰関数定理は $f(x, y) = a$ という二変数 x, y の方程式を (x_0, y_0) の近傍で解こうとしている。さらに、解の集りを関数 $g(x)$ を使って $(x, g(x))$ という形の点で表現している。これは、x_0 の近傍の元 x を固定すると $f(x, y) = a$ は y を未知数とする方程式とみなすことができ、y について解いた解を x に対応させ $y = g(x)$ と表して

いることになる。この主張は次のように考えるとわかりやすくなる。$f_y(x_0, y_0) \neq 0$ という仮定より $f_y(x_0, y_0) > 0$ または $f_y(x_0, y_0) < 0$ が成り立つ。$f_y(x_0, y_0) > 0$ の場合を考えてみよう。$f_y(x, y)$ の連続性より (x_0, y_0) の近傍でも $f_y(x, y) > 0$ が成り立つ。よって、(x_0, y_0) の近傍で $f(x, y)$ の x を固定して y だけ動かしたとき単調増加になる。これより $f(x, y) = a = f(x_0, y_0)$ を満たす y_0 の近くの y が x に対応してただ一つ存在することはわかりやすい。このことが陰関数の存在である。$f_y(x_0, y_0) < 0$ の場合も y に関して単調減少になり、単調増加の場合と同様である。

y に関する偏微分係数が正または負になることから、$f(x, y)$ は y に関して単調増加または単調減少になることがわかり、このことから陰関数の存在を説明 (証明ではない) した。微分という概念は関数を局所的に一次関数とみなす見方なので、関数が最初から一次式の場合は話が簡単になる。この観点から陰関数定理を見てみよう。

関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = Ax + By + C$$

という一次式になっているとする。x を固定したときに

$$Ax + By + C = a$$

という y を未知数とする方程式は $B \neq 0$ のときにただ一つの解を持ち、その解は

$$y = \frac{1}{B}(a - Ax - C)$$

となる。$B = f_y(x, y)$ だから、これは陰関数定理の特別の場合になっている。