2016年9月1日　部分多様体幾何とリー群作用2016 (東京理科大学)

# 複素旗多様体の実形の交叉とFloerホモロジーへの応用 – 合同な実形の場合 –

入江　博　(茨城大学)

本講演は,

井川 治（京都工芸繊維大学）

奥田隆幸（広島大学）

酒井高司（首都大学東京）

田崎博之（筑波大学）

との進行中の共同研究

# 1　対蹠集合

**Def. (Chen-長野, 1988)**

$M$ : Riemann対称空間

$s_x$ : $x$に関する点対称 ($s_x^2 = id,\ x$ :孤立固定点)

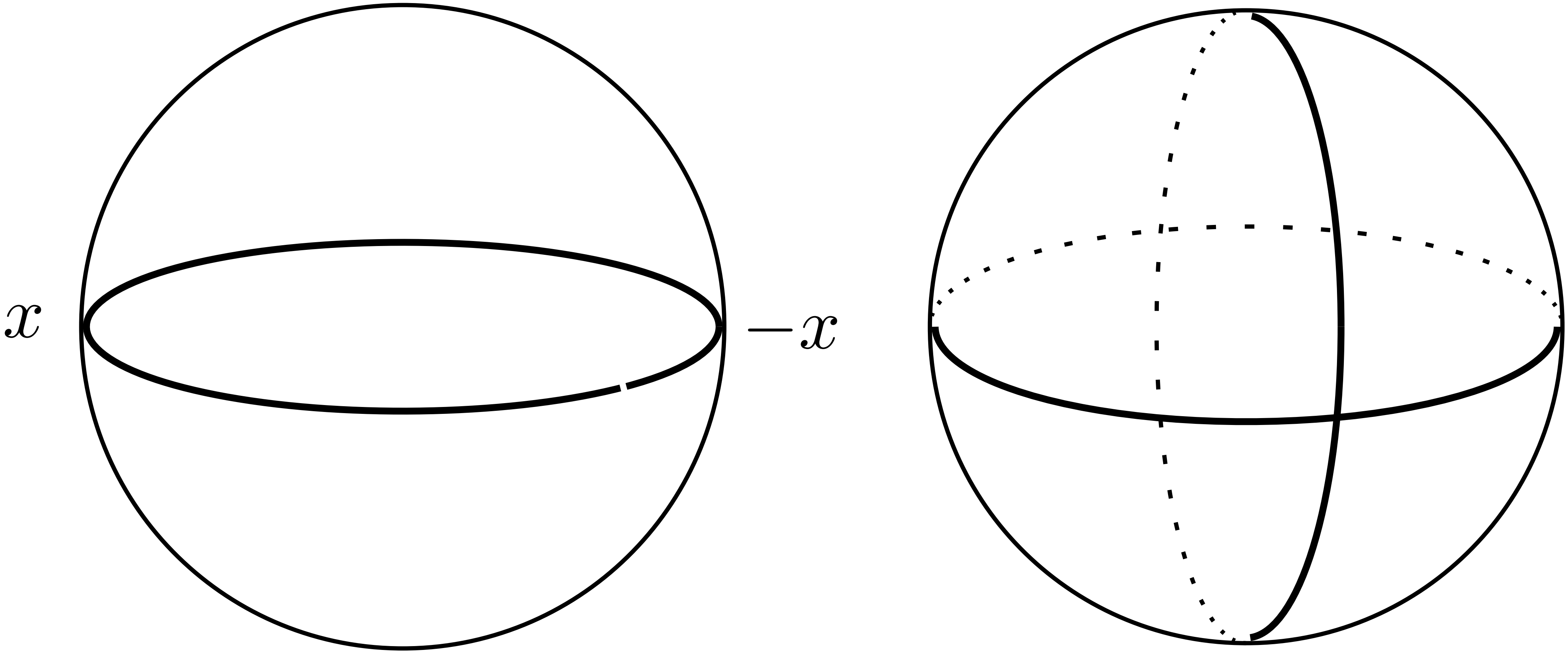
• $\mathcal{A} \subset M$ : 対蹠集合

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y \in \mathcal{A}$に対して, $s_x y = y$.

**Example**

$x \in S^2 \cong \mathbb{C}P^1.\ \ s_x(x) = x,\ \ s_x(-x) = -x.$

$\{x, -x\}$は$S^2$の一つの対蹠集合


$x$
$-x$

# 2　名所旧跡

**Thm 1**（田中-田崎, 2012）

$(M, \omega, J)$ : コンパクト型Hermite対称空間

$L_0, L_1 : M$ の実形, $L_0 \pitchfork L_1$

$\Longrightarrow L_0 \cap L_1 : M$ の対蹠集合

- さらに, 井川-田中-田崎の結果(2015)により, 交叉 $L_0 \cap L_1$ はある種のWeyl群の軌道として表されている.

**Thm** 2（酒井-田崎- I., 2013）
$(M,\omega,J)$ : コンパクト型Hermite対称空間,
Kähler-Einstein
$L_0, L_1 : M$ の実形で, $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$,
$L_0 \pitchfork L_1$

$$\Longrightarrow \quad HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

**Cor 3**
$M$ が既約の場合, 一組の例外を除いて,

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{SB(L_0), SB(L_1)\}}.$$

# 3　複素旗多様体と対蹠集合

$G$ : コンパクト半単純Lie群

$\mathfrak{g}$ : $G$ のLie環, $x_0 \in \mathfrak{g}$

- $M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$　複素旗多様体

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ : $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積
$J$ : $M$ の $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造

- $g \in Z(G_{x_0})$ に対して, $s_{x,g} : M \to M$ を,

$$s_{x,g}(y) := \mathrm{Ad}(g_x g g_x^{-1})y$$

ここで, $\mathrm{Ad}(g_x)x_0 = x$ とする.

$$\mathrm{Fix}(s_x) := \{y \in M \mid s_{x,g}(y) = y,\ \forall g \in Z(G_{x_0})\}$$

**Def.** $\mathcal{A} \subset M$ : 対蹠集合

$$\overset{\mathrm{def}}{\iff} y \in \mathrm{Fix}(s_x) \quad \text{for} \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$$

**Thm 4**（酒井-田崎- I., 2012）

$\mathcal{A} \subset M$ : 極大な対蹠集合

$\Longrightarrow$ $\exists \mathfrak{t}$ : $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 s.t.

$$\mathcal{A} = M \cap \mathfrak{t}.$$

これは, Weyl群 $W(G)$ の軌道

# 4　実旗多様体とその交叉

$(G, K)$ : コンパクト型対称対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ : 標準分解

$x_0 \in \mathfrak{p}$とする.

- $L := \mathrm{Ad}(K)x_0 \subset M$　実旗多様体

- $M$の対合的反正則等長変換 $\tau$ により,

$L = \mathrm{Fix}(\tau)$と表せる (実形).

交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を調べたい $(g \in G)$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ : 極大可換部分空間
$A := \exp \mathfrak{a}$

**Lemma 5** $G = KAK$.

$g = k_1 a k_2 \ (k_1, k_2 \in K,\ a \in A)$ と表せて,

$$\begin{aligned} L \cap \mathrm{Ad}(g)L &= L \cap \mathrm{Ad}(k_1 a k_2)L \\ &= \mathrm{Ad}(k_1)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L) \end{aligned}$$

交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ を調べることに帰着

**Thm 6**（主結果1） $H \in \mathfrak{a}$, $a := \exp H$ とする.

$$\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \quad \text{for} \quad \forall \lambda \in R \tag{1}$$

$\Longrightarrow L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ は離散的

このとき,

- $L \cap \mathrm{Ad}(a)L = M \cap \mathfrak{a} = W(G,K)x_0$
- $W(G,K)x_0$ は $M$ の対蹠集合

<u>Floerホモロジーの計算</u>では, $a$ の取り方が重要.

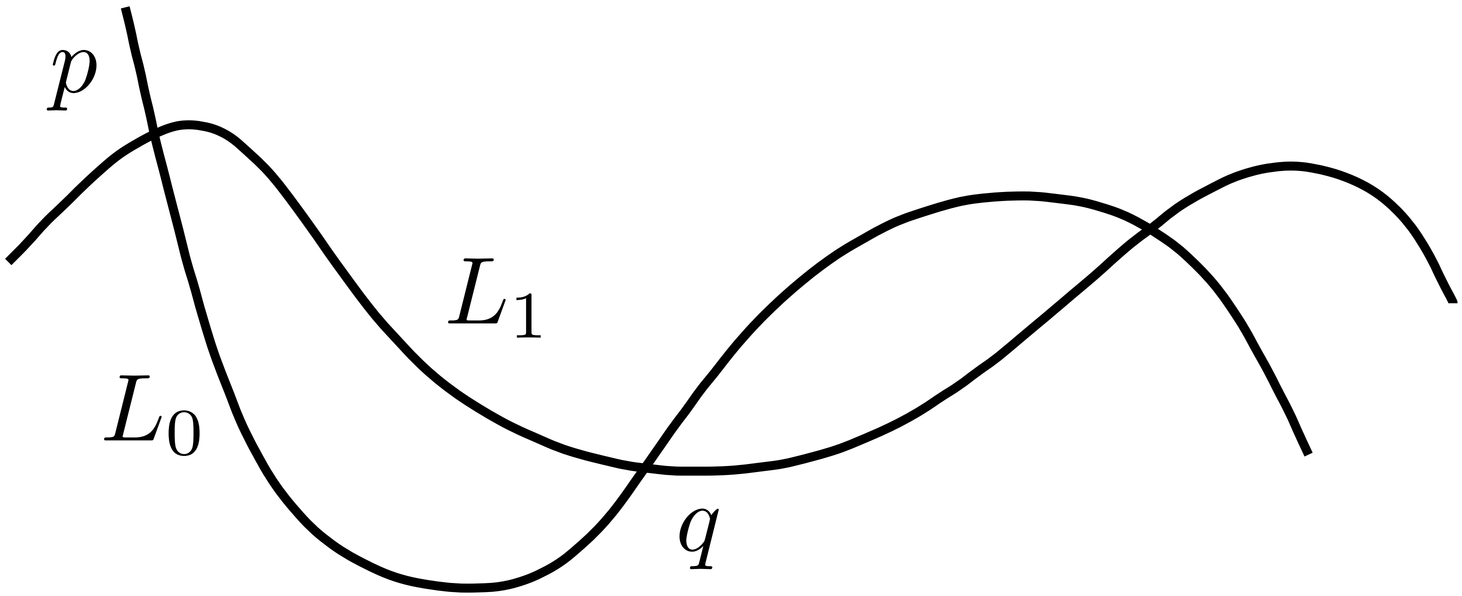
**Thm 6** $\rightarrow$ $a$ の取り方の自由度が大きい.

# 5　Floerホモロジー

$(M, \omega)$ : 閉シンプレクティック多様体

$J_t$ : $\omega$とcompatibleな概複素構造

$L_0, L_1$ : 閉Lagrange部分多様体, $L_0 \pitchfork L_1$

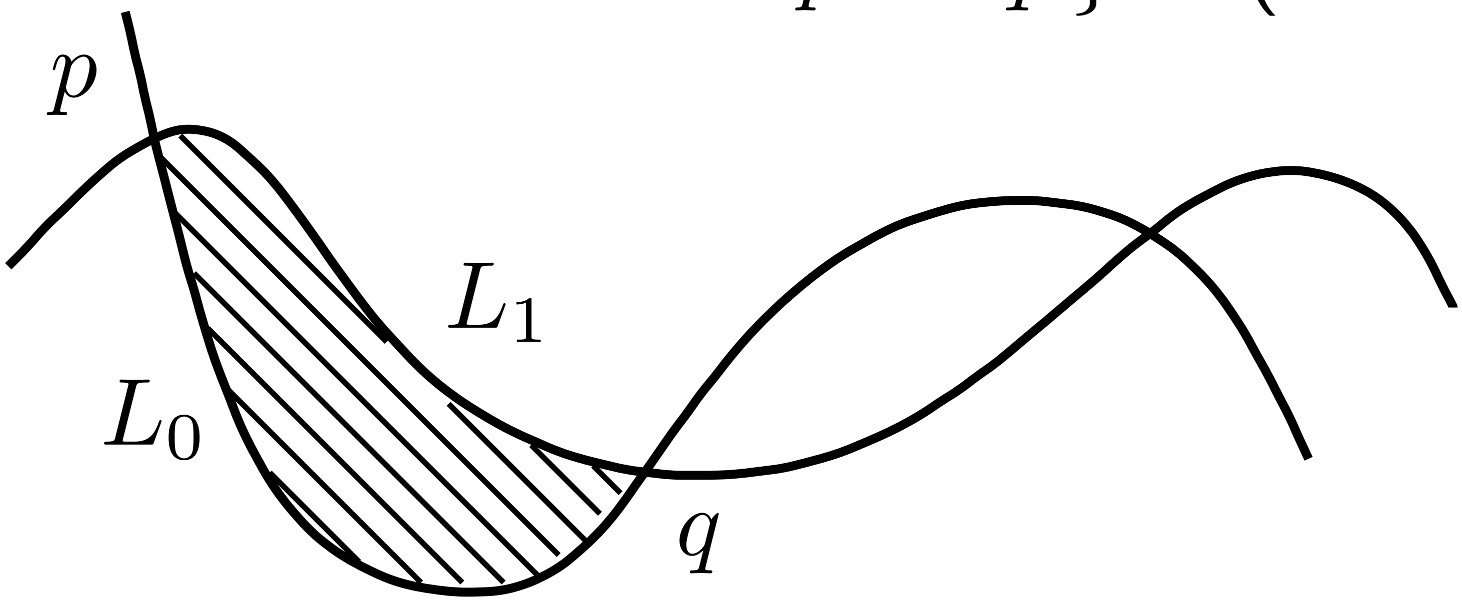



$CF(L_0, L_1)$ : $L_0 \cap L_1$で生成される自由$\mathbb{Z}_2$-加群

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

$n(p,q) :=$ #{ isolated **$J$-holomorphic strip** from $p$ to $q$ } (mod 2)



- $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot, 0) \in L_0,\ \ u(\cdot, 1) \in L_1, \\ u(-\infty, \cdot) = p,\ \ u(+\infty, \cdot) = q. \end{cases}$$

- $\partial^2 = 0 \implies HF(L_0, L_1) := \ker \partial / \mathrm{im} \partial$

**Lagrange部分多様体の対$(L_0, L_1)$の$\mathbb{Z}_2$係数**
**Floerホモロジー**

$L \subset M$ : 閉Lagrange部分多様体

- $I_\mu : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$ : Maslov指数
- $I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$,

$I_\omega([u]) := \int_{D^2} u^*\omega$ for $u : D^2 \to (M, L)$.

**Definition.**

- $L$ : **単調 (monotone)**

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha > 0$ : const. s.t. $I_\omega = \alpha I_\mu$.

- $\Sigma_L \geq 0$ : $L$の**最小Maslov数**

$\Longleftrightarrow \{I_\mu(u) \mid [u] \in \pi_2(M, L)\} = \Sigma_L \cdot \mathbb{Z}$

**Thm** 7（Y.-G. Oh, 1993）

$L_0, L_1$：単調, 最小 Maslov 数 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$

$\pi_1(M) = 0 \implies$

- $\partial$： well-defined.
- $\partial^2 = 0$.
- $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong HF(L_0, \phi L_1 : \mathbb{Z}_2)$,

$$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega).$$

$L_0 \pitchfork \phi L_1$ ならば,

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \mathrm{rank}\ HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2).$$

# 6　実旗多様体の場合

**Thm 8**（主結果2）

$(G, K)$ : コンパクト型対称対

$M = \mathrm{Ad}(G)x_0$ : 複素旗多様体

$\omega(\cdot, J\cdot)$ が Kähler-Einstein

$L = \mathrm{Ad}(K)x_0$ : 実旗多様体

$$\Longrightarrow \quad HF(L : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in W(G,K)x_0} \mathbb{Z}_2[p].$$

- $\# W(G, K)x_0 = SB(L : \mathbb{Z}_2)$. よって,

**Cor 9**

$L$ : K-E である複素旗多様体 $M$ の実形

$L \pitchfork \phi(L)$ なる任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について,

不等式

$$\#(L \cap \phi(L)) \geq SB(L : \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ.

- 深谷-Oh-太田-小野による一般的なArnold-Givental不等式（2009？）の極めて特別な場合

# 7　証明の概略

**Prop 10（Hermite 対称空間の場合は, Oh）**

次の性質をもつ $M$ の正則等長変換の $1$ パラメータ族 $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$ が存在する:

- $\tau\phi_t\tau = \phi_t^{-1}$.
- 十分大きい自然数 $N$ に対して,
  $(\phi_1)^{2^N} = id_M$ かつ
  $(\phi_1)^k \neq id_M \ (1 \leq k < 2^N)$.
- 交叉 $L \cap \phi_t(L)$ $(0 < t \leq 1)$ は離散的で, 対蹠集合

- $J : M$ の $G^{\mathbb{C}}$ 不変複素構造
- $L_0 = L,\ L_1 := \phi_1(L)$ とする. (← 上の命題)
- $\underline{\text{isolated}}$ $J$-holomorphic strips from $p$ to $q$

の集合を

$$\mathcal{M}_{J,\phi}(p,q)$$

と表す. (モジュライの $\underline{0\text{次元}}$ 部分の一部)

**Prop 11** $J$ はregularである.

これを用いると, モジュライの $0$ 次元部分はコンパクト, 特に $\mathcal{M}_{J,\phi}(p,q)$ の要素の個数は有限個.

- 命題の条件を満たす $\phi_1$ を、

$$(\phi_1)^2 u \neq u \quad \text{for} \quad \forall u \in \mathcal{M}_{J,\phi}(p,q)$$

となるように取っておく.

- 以上の設定で計算に入る.

- $p, q \in L \cap \phi_1(L)$ に対し,

$\mathcal{M}_{J,\phi}^{(l)}(p,q) :=$

$$\left\{ u \in \mathcal{M}_{J,\phi}(p,q) \,\middle|\, \begin{array}{l} u = \phi_1^{2^k} \circ u \ (l < k < N) \\ \text{かつ } u \neq \phi_1^{2^l} \circ u \end{array} \right\}$$

**Prop 12**　$\mathcal{M}_{J,\phi}(p,q)$ は

$$\mathcal{M}_{J,\phi}^{(N-1)}(p,q) \cup \cdots \cup \mathcal{M}_{J,\phi}^{(l)}(p,q) \cup \cdots \cup \mathcal{M}_{J,\phi}^{(1)}(p,q)$$

と非交和に分解し, 各 $\mathcal{M}_{J,\phi}^{(l)}(x,y)$ には $(\phi_1)^{2^l}$ から誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が入る.

## 証明のアイデア

$u \in \mathcal{M}_{J,\phi}(p,q)$ を任意にとる．この $u$ に対して，
$J$-holomorphic map

$$(\phi_1)^{2^{N-1}} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$$

を考える．仮定より
$u(-\infty,t) = p,\ u(+\infty,t) = q$ であり，$p,q$ は対蹠集合の要素であるから，$\phi_1(p) = p,\ \phi_1(q) = q$.

$$\therefore\ (\phi_1)^{2^{N-1}}(u(-\infty,t)) = (\phi_1)^{2^{N-1}}(p) = p,$$
$$(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(+\infty,t)) = (\phi_1)^{2^{N-1}}(q) = q.$$

<Lagrangian 境界条件>

**claim**. $(\phi_1)^{2^{N-1}}(L) = L$.

**(証)** $\forall p \in L = \mathrm{Fix}(\tau)$ に対して,

$$\tau\left((\phi_1)^{2^{N-1}}(p)\right) = \tau(\phi_1)^{2^{N-1}}\tau(p) = (\tau\phi_1\tau)^{2^{N-1}}(p)$$
$$= (\phi_1^{-1})^{2^{N-1}}(p) = (\phi_1)^{2^{N-1}}(p).$$

最後の等式は, $(\phi_1)^{2^N} = id_M$.

よって, $(\phi_1)^{2^{N-1}}(p) \in L$.

**claim** より, $u(s,0) \in L,\ u(s,1) \in \phi_1(L)$ に注意すると,

$$(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(s,0)) \in (\phi_1)^{2^{N-1}}(L) = L,$$
$$(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(s,1)) \in (\phi_1)^{2^{N-1}+1}(L) = \phi_1(L)$$

となり, $(\phi_1)^{2^{N-1}} u$ の境界条件が満たされる.

- $(\phi_1)^{2^{N-1}} u \neq u$ ならば,

$\tilde{u} := (\phi_1)^{2^{N-1}} u$ とおくと, $(\phi_1)^{2^{N-1}} \tilde{u} = u$.

$u, \tilde{u} \in \mathcal{M}_{J,\phi}^{(N-1)}(p,q)$
$= \left\{ u \in \mathcal{M}_{J,\phi}(p,q) \middle| u \neq (\phi_1)^{2^{N-1}} u \right\}.$

つまり, $(\phi_1)^{2^{N-1}}$ による自由な$\mathbb{Z}_2$作用が入る.

- 以下, $(\phi_1)^{2^{N-1}} u = u$の場合を考える.

これを繰り返すと, 最後には
$(\phi_1)^2 u \in \hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(x,y)$となるが, $\phi_1$の選び方から

$$(\phi_1)^2 u \neq u$$

となる. [証明終]

# 8　今後の課題

- 今回の話は最終形ではない.
- 欠点: Oh さんのアイデアは, 位相型の異なる実形の対 $(L_0, L_1)$ に適用できない.
- 別の方法を検討中