2017年9月9日 研究集会「対称空間とその周辺」

コンパクト例外群G_2の初等的実現について

保倉 理美(YASUKURA, Osami /福井大学)

1　群 G の実現による定義

・$\boldsymbol{O} := \boldsymbol{R}e_0 \oplus \boldsymbol{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}e_7$ $(\cong \boldsymbol{R}^8)$ は，次の乗積表で定められた R 代数とする．O は，可除な R 上の Cayley 代数である (cf. [11]):

$e_0e_i = e_ie_0 = e_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 7)$;

$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3$, $e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2$,

$e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1$; $e_1e_4 = -e_4e_1 = e_5$,

$e_4e_5 = -e_5e_4 = e_1$, $e_5e_1 = -e_1e_5 = e_4$;

$e_3e_4 = -e_4e_3 = e_7$, $e_4e_7 = -e_7e_4 = e_3$,

$e_7e_3 = -e_3e_7 = e_4$; $e_3e_5 = -e_5e_3 = e_6$,

$$e_5e_6 = -e_6e_5 = e_3,\ e_6e_3 = -e_3e_6 = e_5;$$
$$e_6e_4 = -e_4e_6 = e_2,\ e_4e_2 = -e_2e_4 = e_6,$$
$$e_2e_6 = -e_6e_2 = e_4;\ e_6e_7 = -e_7e_6 = e_1,$$
$$e_7e_1 = -e_1e_7 = e_6,\ e_1e_6 = -e_6e_1 = e_7;$$
$$e_7e_2 = -e_2e_7 = e_5,\ e_2e_5 = -e_5e_2 = e_7,$$
$$e_5e_7 = -e_7e_5 = e_2;\ e_j^2 = -e_0\ (j = 1, \ldots, 7).$$

・ **$\boldsymbol{R}$代数$\boldsymbol{O}$の自己同型群Gを考える**:

$$G := \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{O} \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\}.$$

特に, G **は**, **実代数群である**.

記号

$\cdot\ \boldsymbol{O} \ni x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i, y = \sum_{i=0}^{7} y_i e_i$ について，

$\overline{x} := x_0 e_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i e_i \in \boldsymbol{O}$;

$(x \mid y) := \sum_{i=0}^{7} x_i y_i,\ |x| := \sqrt{(x \mid x)} \in \boldsymbol{R}$.

$\cdot\ \mathrm{Im}\boldsymbol{O} := \{x \in \boldsymbol{O} \mid \overline{x} = -x\} = \bigoplus_{i=1}^{7} \boldsymbol{R} e_i$,

$S^6 := \{x \in \mathrm{Im}\boldsymbol{O} \mid |x| = 1\}$.

$\cdot\ M(7, \boldsymbol{R}) := \{X = [x_1, \ldots, x_7] \mid x_i \in \mathrm{Im}\boldsymbol{O}\}$,

$GL_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Im}\boldsymbol{O}) := \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{O} \mid \alpha e_0 = e_0,$

$\overline{\alpha e_i} = -\alpha e_i\ (i = 1, \ldots, 7)\} \subset M(7, \boldsymbol{R})$,

$O(7) := \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Im}\boldsymbol{O}) \mid (\alpha x \mid \alpha y) = (x \mid y)\}$.

定理0 (1) (cf. [9, p.3]) $G \subset O(7)$, G: **コンパクト**.

(2)(**横田** [5, p.250], [7, p.181])

$G = \{X \in M(7, \boldsymbol{R}) \mid x_3 = x_1x_2, (x_3 \mid x_4) = 0 = (x_i \mid x_j) - \delta_{ij}\ (i, j = 1, 2, 4),\ x_5 - x_1x_4 = x_6 - x_4x_2 = x_7 - x_1x_6 = 0\}$.

系0 G **の** S^6 **への作用は**, **推移的**.

註0 (Borel [1, p.586, $\downarrow$ 2-5]) "But it is well-known that...G_2 is the automorphism group of the Cayley numbers and acts transitively on the purely imaginary Cayley numbers of norm one, ..."

2　$SU(3)$ の実現と G の連結性

$$\boldsymbol{C}^3 \ni \boldsymbol{e}_i := \begin{bmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w} := \begin{bmatrix} z_2 w_3 - z_3 w_2 \\ z_3 w_1 - z_1 w_3 \\ z_1 w_2 - z_2 w_1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^3,$$

$$(\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{w}) := \sum_{i=1}^{3} z_i w_i \in \boldsymbol{C}.$$

<u>**補題0**</u> $\boldsymbol{C}^3 = \{\sum_i \boldsymbol{z}_i \times \boldsymbol{w}_i \mid \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{w}_i \in \boldsymbol{C}^3\}$.

$\because\ \ \boldsymbol{C}^3 = \{\sum_{i=1}^3 c_i \boldsymbol{e}_i \mid c_i \in \boldsymbol{C}\} =$
$\{c_1 \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 + c_2 \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + c_3 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \mid c_i \in \boldsymbol{C}\}$. $\square$

<u>**補題1**</u> $A \in GL(3, \boldsymbol{C}) \Rightarrow A\boldsymbol{z} \times A\boldsymbol{w} = {}^t\tilde{A}(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w})$;
$\tilde{A} := (\det A) \cdot A^{-1}$.

$\because\ \ (A\boldsymbol{z} \times A\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}) = \det[A\boldsymbol{z}, A\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}] =$
$\det(A[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, A^{-1}\boldsymbol{v}]) = \det A \cdot \det[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, A^{-1}\boldsymbol{v}] =$
$\det[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, (\det A) \cdot A^{-1}\boldsymbol{v}] = \det[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \tilde{A}\boldsymbol{v}] =$
$(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w} \mid \tilde{A}\boldsymbol{v}) = ({}^t\tilde{A}(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v})$;
$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^3$. $\square$

補題2 $\{A \in U(3) \mid \overline{A} = {}^t\tilde{A}\} = SU(3)$.

$\because$ $A \in U(3)$, $\overline{A} = {}^tA^{-1} = {}^t\tilde{A}/\det A$. **故に**,

$A \in U(3)$ **について**, $\overline{A} = {}^t\tilde{A} \Leftrightarrow \det A = 1$. $\square$

命題A

$\{A \in U(3) \mid A\boldsymbol{z} \times A\boldsymbol{w} = \overline{A}(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w})\} = SU(3)$.

$\because$ **補題0,1より**, $(\text{左辺}) = \{A \in U(3) \mid \overline{A} = {}^t\tilde{A}\}$

補題2より, $= (\text{右辺})$. $\square$

系1 $G_{e_4} := \{\alpha \in G \mid \alpha e_4 = e_4\} \Rightarrow G_{e_4} \cong SU(3)$.

$\because$ (0) (Zorn [11, p.401]) $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \ni a \oplus \boldsymbol{z}, b \oplus \boldsymbol{w}$,

$$(a \oplus \boldsymbol{z})(b \oplus \boldsymbol{w}) := (ab - (\boldsymbol{z}|\overline{\boldsymbol{w}})) \oplus (a\boldsymbol{w} + \overline{b}\boldsymbol{z} + \overline{\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}})$$

$\Rightarrow \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \cong \boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{R}$代数同型写像が存在する).

(1) (Yokota-Ishihara-Yasukura [10, p.718]): $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}e_4$, $\mu : \boldsymbol{O} \longrightarrow \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3; x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i \mapsto$

$$\mu_0(x) \oplus \begin{bmatrix} \mu_1(x) \\ \mu_2(x) \\ \mu_3(x) \end{bmatrix};$$

$$\mu_i(x) := x_i + (-1)^i x_{i+4} e_{i+4} \ (i = 0, 1, 2, 3)$$

$\Rightarrow \mu(\mathrm{Im}\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{R}e_4 \oplus \boldsymbol{C}^3$, $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$,

$\mu(ay) = a \cdot \mu(y)$, μ は左 $\boldsymbol{C}$ 線型同型写像; かつ,

$(x|y) = \sum_{i=0}^{3}(\mu_i(x)\overline{\mu_i(y)} + \mu_i(y)\overline{\mu_i(x)})/2 \in \boldsymbol{R}$,

$0 \oplus \boldsymbol{C}^3 = \{a \oplus m \in \boldsymbol{R}e_4 \oplus \boldsymbol{C}^3 \mid (\mu^{-1}(a \oplus m) \mid \mu^{-1}(b \oplus 0)) = 0 \ (b \in \boldsymbol{C})\}$: 実際，２つの恒等式:

$x = \sum_{i=0}^{3} \mu_i(x)e_i \ (x \in \boldsymbol{O})$,

$(a \oplus 0)(b \oplus \boldsymbol{w}) = ab \oplus a\boldsymbol{w} \ (a, b \in \boldsymbol{C}; 0, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^3)$

より前半;かつ，μ の定義より後半を得る.

(2) $\varphi : GL(3, \boldsymbol{C}) \longrightarrow GL_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3); A \mapsto \varphi(A) : \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 \longrightarrow \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3; \ni a \oplus \boldsymbol{z} \mapsto a \oplus A\boldsymbol{z}$
$\Rightarrow \mu \circ G_{e_4} \circ \mu^{-1} = \varphi(SU(3)) \cong SU(3)$: 実際，
$\forall \alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O})$ について，$\alpha' := \mu \circ \alpha \circ \mu^{-1} \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3)$ とおくと，$\mu(e_4) = e_4 \oplus 0$, (1) より，
$G_{e_4} = \{\alpha \in G \mid \alpha(e_4 y) = e_4 \alpha(y)\} = \{\alpha \in G \mid \alpha'(\mu(e_4)\mu(y)) = \mu(e_4)(\alpha' \mu(y))\} = \{\alpha \in G \mid \alpha' \in GL_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3), \alpha'(e_4 \oplus 0) = e_4 \oplus 0\}$.
$\varphi(GL(3, \boldsymbol{C})) = \{ f \in GL_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3) \mid f(e_4 \oplus 0) = e_4 \oplus 0 \}$. 故に，$G_{e_4} = \{ \alpha \in G \mid \alpha' = \varphi(A), A \in GL(3, \boldsymbol{C}) \}$. 従って，

$$\mu \circ G_{e_4} \circ \mu^{-1} =$$

$$\{\varphi(A) \mid A \in GL(3, \boldsymbol{C}), \varphi(A)((a \oplus \boldsymbol{z})(b \oplus \boldsymbol{w})) =$$

$$(\varphi(A)(a \oplus \boldsymbol{z}))(\varphi(A)(b \oplus \boldsymbol{w}))\} =$$

$$\{\varphi(A) \mid A \in GL(3, \boldsymbol{C}),\ (ab - (\boldsymbol{z} \mid \overline{\boldsymbol{w}})) \oplus$$

$$A(a\boldsymbol{w} + \overline{b}\boldsymbol{z} + \overline{\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}}) = (ab - (A\boldsymbol{z} \mid \overline{A\boldsymbol{w}})) \oplus$$

$$(aA\boldsymbol{w} + \overline{b}A\boldsymbol{z} + \overline{A\boldsymbol{z} \times A\boldsymbol{w}}); a, b \in \boldsymbol{C}; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}^3\}$$

$$= \{\varphi(A) \mid A \in U(3), A(\overline{\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}}) = \overline{Am \times An}\}$$

$$= \{\varphi(A) \mid A \in U(3), \overline{A}(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{z} \times A\boldsymbol{w}\}.$$

命題Aより, $= \{\varphi(A) \mid A \in SU(3)\}.$ $\square$

<u>系2</u> $S^6 \cong G/SU(3)$.

$\because$ 系0, 1による. $\square$

<u>系3</u> G: 連結, 単連結, $(6+8=)14$次元.

$\because$ 系2と$S^6, SU(3)$の対応する性質による. $\square$

<u>系4</u> $G \subset SO(7); \forall \alpha \in G, \exists p \in S^6; \alpha p = p$.

$\because SO(7) = (O(7)\text{の単位元連結成分})$, 系3より前半を得る; 7は奇数故$SO(7)$の元は不動点を持つ. $\square$

系5 rank $G = 2$.

$\because SU(3) = \cup_{B \in SU(3)} \ B^{-1}T^2B$;

$T^2 \ := \{ \ \mathrm{diag}\ (t_1, t_2, \bar{t}_1\bar{t}_2) \mid t_i \in \boldsymbol{C}, \ |t_i| = 1 \ \}$.

系4より, $\forall \alpha \in G$, $\exists p \in S^6$; $\alpha p = p$.

系0より, $\exists \beta \in G$; $\beta p = e_4$.

系1より, $\exists A \in SU(3)$; $G_{e_4} \ni \beta\alpha\beta^{-1} = \varphi(A)$.

$\exists B \in SU(3)$; $A \in B^{-1}T^2B$, $g := \varphi(B)\beta \in G$.

このとき, $\varphi(T^2) \ni \varphi(BAB^{-1}) = g\alpha g^{-1}$.

故に, $\alpha \in g^{-1}\varphi(T^2)g$, $G = \cup_{g \in G} \ g^{-1}\varphi(T^2)g$,

$\varphi(T^2)$: **コンパクト位相群**G**の極大トーラス**. **従って**, $\mathrm{rank} G = \dim \varphi(T^2) = 2$ (cf. [6, p.129]). $\square$

3　$SO(4)$ の実現と G の単純性

$$\boldsymbol{H} := \boldsymbol{R}e_0 \oplus \boldsymbol{R}e_1 \oplus \boldsymbol{R}e_2 \oplus \boldsymbol{R}e_3,$$

$$\boldsymbol{O} = \{p_1 + p_2 e_4 \mid p_i \in \boldsymbol{H}\},$$

$$Sp(1) := \{q \in \boldsymbol{H} \mid |q| = 1\},$$

$$\psi : Sp(1)^{\times 2} \longrightarrow GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O});\ (q_1, q_2) \mapsto \psi(q_1, q_2);$$

$$\psi(q_1, q_2)(p_1 + p_2 e_4) := q_2 p_1 \overline{q}_2 + (q_1 p_2 \overline{q}_2) e_4.$$

$$\gamma := \psi(e_0, -e_0),\ G^\gamma := \{\alpha \in G \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha\}.$$

<u>定理1</u> (Yokota [8, p.193]) (0) $\gamma \in G$.

(1) $\psi(Sp(1)^{\times 2}) = G^\gamma$,

(2) $\ker\psi = \{\pm(1,1)\}$, $G^\gamma \cong SO(4)$.

<u>系6</u> $z(G) := \{\alpha \in G \mid \alpha\alpha' = \alpha'\alpha(\alpha' \in G)\} \Rightarrow$
$z(G) = \{\mathrm{id}\} \subset GL_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{O}$.
$\because\ \alpha \in z(G)$ **とする**: $\alpha \in G^\gamma$ **故**,
$\exists(q_1, q_2) \in Sp(1)^{\times 2}; \alpha = \psi(q_1, q_2)$. $\forall q' \in Sp(1)$,
$\psi(q_1, q_2)\psi(q', e_0) = \psi(q', e_0)\psi(q_1, q_2)$ **より**,
$(q_1 q', q_2) = \pm(q' q_1, q_2)$. **故に**, $(q_1 q', q_2) =$
$(q' q_1, q_2)$, $\boldsymbol{R} \ni q_1 = \pm e_0$. **同様に**, $q_2 = \pm e_0$.
$\psi(q_1, q_2) = \psi(\pm e_0, \pm e_0) = \mathrm{id}$ **または** γ. **もし**,
$\alpha = \gamma$ **なら**, $G^\gamma = G$, **定理**1, **系**3**より**,
$6 = \mathrm{dim} G^\gamma = \mathrm{dim} G = 14$, **矛盾**. $\square$

系7 G: コンパクト単純G_2型 Lie 群.
$\because$ 定理0 (1)より, 実代数群G: コンパクト. 故に, $\mathrm{Lie}G$: reductive 実 Lie 代数, $\mathrm{LieG} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$; $\mathfrak{a}$: 可換ideal, $\mathfrak{m}$: 半単純ideal. 系6より, $\dim\mathfrak{a} = \dim z(G) = 0$. 系5より, $\mathrm{Lie}G$: 階数2の半単純コンパクト実Lie代数. コンパクト実単純Lie代数の分類より, $\mathrm{Lie}G \cong (A_1) \oplus (A_1)$(次元6), (A_2)(次元8), or (G_2) (cf. Goto-Grosshans [2]).
系7より, $\dim(\mathrm{Lie}G) = 14 \neq 6, 8$. 故に, $\mathrm{Lie}G \cong (G_2)$以外あり得ない. $\square$

4　極大対蹠部分群の実現

<u>定理2</u> (田中-田崎-保倉 [4]) G の極大対蹠部分群は,

$$\beta := \{\psi(e_i, \pm e_i) \mid i = 0, 1, 2, 3\}$$

に共役.

記号 $\cdot\ M(8,7,\boldsymbol{R}) := \{[x_1,\ldots,x_7] \mid x_i \in \boldsymbol{O}\}$,
$M(7,3;\boldsymbol{R}) = \{X = [x_1,x_2,x_4] \mid x_j \in \mathrm{Im}\boldsymbol{O}\}$,

$$\tilde{X} := [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7] \in M(8,7,\boldsymbol{R});$$

$x_3 := x_1x_2, x_5 := x_1x_4, x_6 := x_4x_2$,
$x_7 := x_1x_6$.
$\cdot\ \beta' := \{\tilde{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4) \mid \varepsilon_j = \pm 1\ (j=1,2,4)\}$;

$$\tilde{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4) := [\varepsilon_1 e_1, \varepsilon_2 e_2, \varepsilon_4 e_4]^{\sim} =$$

$\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_4,\varepsilon_1\varepsilon_4,\varepsilon_4\varepsilon_2,\varepsilon_1\varepsilon_4\varepsilon_2) \in G$.

<u>**系 8**</u> G **の任意の極大対蹠部分群は** β' **に共役**.

$\because$ β': G **の対蹠部分群故**, **定理 2 より**, β **の部分群** β'' **へ共役**. $|\beta''| = |\beta'| = 2^3 = |\beta|$ **故**, $\beta'' = \beta$. $\square$

<u>**命題 B**</u> $\beta' = \beta$.

$\because$ $\tilde{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4) = \psi(e_i, \varepsilon_4 e_i)$;

$i := (3 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$. $\square$

5　Kamiyaのモース関数構成法

・ $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ について，標準座標

$x_i : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}; \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j \mapsto x_i \ (i = 1, \ldots, n)$

をとり，$f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $p \in \boldsymbol{R}^n$ につき，

$\mathrm{grad}\ f|_p := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \boldsymbol{e}_i$,

$\mathrm{Hess}(f)|_p := [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)] \in M(n, \boldsymbol{R})$ とおく．

<u>定理3</u>(Kamiya [3]) (仮定)・$f, f_i : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$: C^∞ 関数 $(i = 1, \ldots, r)$.

・ $M = \{p \in \boldsymbol{R}^n \mid f_i(p) = 0 \ (i = 1, \ldots, r)\}$.

・ $\forall p \in M$, $\{\mathrm{grad}\ f_i|_p \mid i = 1, \ldots, r\}$: １次独立.

(結論) $\bar{f} := f|_M : M \longrightarrow \boldsymbol{R}; p \mapsto f(p)$ について,

・$p_0 \in M$: $\bar{f}$ の臨界点 $\Leftrightarrow \exists \alpha_i \in \boldsymbol{R}$ $(i = 1, \ldots, r)$;

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{grad}\ f_i|_{p_0} = \mathrm{grad}\ f|_{p_0}.$$

・ 上記のとき, 直交射影 $P : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow T_{p_0}M \subset \boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に関する表現行列を $\tilde{P}$ とおき,

$K_{p_0} := \tilde{P}(\mathrm{Hess}(f)|_{p_0} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{Hess}(f_i)|_{p_0})\tilde{P}$

と定義する. このとき, p_0: $\bar{f}$ の非退化臨界点 $\Leftrightarrow$

$$\mathrm{rank}\ K_{p_0} = n - r.$$

6　G_2 上のモース関数の例

記号· $E_{ij} := [\delta_{1j}e_i, \delta_{2j}e_i, \delta_{4j}e_i] \in M(7,3,\boldsymbol{R})$
$(i = 1, \ldots, 7; j = 1, 2, 4)$ は正規直交基底となり,
$x_{ij} : M(7,3,\boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$; $X = [x_1, x_2, x_4] \mapsto x_{ij}$;
$x_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}e_i \ (j = 1, 2, 4)$ は標準座標になる.

· $f : M(7,3,\boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $X_0 \in M(7,3,\boldsymbol{R})$ につき,

$$\mathrm{grad}\ f|_{X_0} := \sum_{j=1,2,4} \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(X_0) \cdot E_{ij}.$$

定義-定理3 (Kamiya [3]-横田 [7])

(0) $X := [x_1, x_2, x_4] \in M(7, 3, \boldsymbol{R})$ に対して,

$f_{34}(X) := (x_1 x_2 \mid x_4)$,

$f_{jk}(X) := (x_j \mid x_k) - \delta_{jk} \ (j, k = 1, 2, 4)$ とおき,

$$G_2 := \{X \mid f_{34} = f_{jk} = 0 \ (j, k = 1, 2, 4; j \leqq k)\}$$

とおくと, $\{\tilde{X} \mid X \in G_2\} = G \subset M(7, \boldsymbol{R})$.

(1) 任意の $X \in G_2$ について,

$\{\mathrm{grad} f_{34}|_X, \mathrm{grad} f_{jk}|_X \mid j, k = 1, 2, 4; j \leqq k\}$:

一次独立である.

(2) $(c_1, c_2, c_4) \in \boldsymbol{R}_3$ につき,

$$f_{(c_1,c_2,c_4)}(X) := c_1 x_{11} + c_2 x_{22} + c_4 x_{44}$$

とおく. このとき, ある $(c_1, c_2, c_4) \in \boldsymbol{R}_3$ について, $\bar{f} := f_{(c_1,c_2,c_4)}|_{G_2}$ の臨界点全体は β' であり, β' の各点は, $\bar{f}$ の非退化臨界点である。

<u>註1</u> 定義-定理3(0) は, 定理0による.

<u>註2</u> 定理3(2) の精密化として, 以下の結果を得る.

命題C $(c_1, c_2, c_4) \in \boldsymbol{R}_3$, $|c_1|, |c_2|, |c_4|, 0$:すべて異なるとき, $\varepsilon_j = \pm 1\ (j = 1, 2, 4)$について,

(1) $\tilde{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$: $\bar{f}$の臨界点の一つ.

(2) $\tilde{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$: $\bar{f}$の非退化臨界点の一つ
$\Leftrightarrow \sum_{j,k=1,2,4;j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k c_j c_k \neq 0$.

(3) $(1/|c_1|, 1/|c_2|, 1/|c_4|)$: どんな三角形の三辺の長さにも対応しない$\Leftrightarrow$ β': $\bar{f}$の臨界点全体.

<u>系 9</u> $(c_1, c_2, c_4) \in \boldsymbol{R}_3$ について，$|c_1|, |c_2|, |c_4|, 0$: すべて異なり，$(1/|c_1|, 1/|c_2|, 1/|c_4|)$: どんな三角形の三辺の長さにも対応しないとする．このとき，次の２条件は同値:

(1)　任意のすべて異なる $i, j, k \in \{1, 2, 4\}$ について，

$$1/|c_i| + 1/|c_j| \neq 1/|c_k|.$$

(2)　β': $\bar{f}$ の非退化臨界点全体．

$\because$　命題C，および，"$\sum_{j,k=1,2,4;j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k c_j c_k \neq 0$ $\Leftrightarrow \sum_{j=1,2,4} 1/(\varepsilon_j c_j) \neq 0$" より帰結する．　$\square$

参考文献

[1] Armand Borel, Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori, *Bull. AMS* (1949), 580–587.

[2] Morikuni Goto and Frank D. Grosshans, Semisimple Lie algebras, Marcel Dekker, 1978.

[3] Hisao Kamiya, Weighted trace functions as examples of Morse functions, *J. Fac. Sci., Shinshu Univ.*, **6** (1971), 85–96.

[4] 田中真紀子, 田崎博之, 保倉理美, 例外型コンパクトLie群 G_2 の極大対蹠部分群, 日本数学会2016年秋季総合分科会, 幾何学分科会講演アブストラクト(2016年9月/関西大学), 一般講演No.30 (pp.95–96).

[5] 横田一郎, 群と位相, 裳華房, 1971.

[6] 横田一郎, 群と表現, 裳華房, 1973.

[7] 横田一郎, 多様体とモース理論, 現代数学社, 1978.

[8] Ichiro Yokota, Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, Part I, $G = G_2$, F_4 and E_6, *Tsukuba J. Math.* **14** (1990), 185–223.

[9] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, 2013.

[10] Ichiro Yokota, Tetsuo Ishihara and Osami Yasukura, Subgroup $((SU(3) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3 \cdot \boldsymbol{Z}_2$ of the simply connected compact simple Lie group E_7, *J. Math. Kyoto Univ.* **24-4** (1983), 715–737.

[11] Max Zorn, *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.* **9** (1933), 396–402.

7　謝辞

以上，2017年9月9日（土）から10日（日）に，つくばイノベーションプラザ大会議室において開催された研究集会「対称空間とその周辺（田崎博之先生の還暦を記念して)」において講演させていただいた原稿を修正して，田中真紀子氏および田崎博之氏との共同研究の一貫としてまとめました．田崎先生はじめ、世話人の方々には，このような機会を与えていただき，大変感謝致します．(2017年10月10日)