# 複素旗多様体内の二つの実形の交叉

奥田隆幸(広島大) 井川治(京都工繊大) 入江博(茨城大) 酒井高司(首都大東京) 田崎博之(筑波大)

2015/8/30 第 62 回幾何学シンポジウム 於 東京理科大学

# Theorem 1.1 (Main theorem).

# (一般化) 複素旗多様体 内の二つの 実旗多様体 $L_1$ , $L_2$ について

- $lue{1}$  横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則".
- 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は '対蹠集合" である.

## Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).

- コンパクト型 Hermite 対称空間 M 内の 実形  $L_1$ ,  $L_2$  について
- II 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則"
- 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は対蹠集合である
- Floer homology への応用など.

# Theorem 1.1 (Main theorem).

- (一般化) 複素旗多様体 内の二つの 実旗多様体  $L_1$ ,  $L_2$  について
  - 1 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則".
  - 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は "対蹠集合" である

## Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).

- コンパクト型 Hermite 対称空間 M 内の 実形  $L_1,\,L_2$  について
- II 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則"
- 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は対蹠集合である
- 3 Floer homology への応用など.

# Theorem 1.1 (Main theorem).

- (一般化) 複素旗多様体 内の二つの 実旗多様体  $L_1$ ,  $L_2$  について
  - 1 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則".
  - 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は "対蹠集合" である.

## Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).

- コンパクト型 Hermite 対称空間 M 内の 実形  $L_1,\,L_2$  について
  - 1 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則"
  - 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は対蹠集合である
  - Floer homology への応用など.

# Theorem 1.1 (Main theorem).

- (一般化) 複素旗多様体 内の二つの 実旗多様体  $L_1$ ,  $L_2$  について
  - 1 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則".
  - 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は "対蹠集合" である.

# Fact 1.2 (井川-入江-酒井-田中-田崎の一連の研究).

- コンパクト型 Hermite 対称空間 M 内の 実形  $L_1$ ,  $L_2$  について
  - 1 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_1$  と  $L_2$  の間の "捩れが正則".
  - 2 このとき離散交叉  $L_1 \cap L_2$  は対蹠集合である.
  - 3 Floer homology への応用など.

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

ullet  $G_{\mathbb{C}}$ : 連結複素半単純リー群.

 $M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

# Example 1.

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{ g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1 \}.$
- $P_{\mathbb{C}} := \{ \bot \exists \beta \in \mathbb{M} \} \cap SL_n(\mathbb{C}).$

$$F_{11...1}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) := \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid \\ V_k \text{ is a $k$-dimensional subspace of } \mathbb{C}^n\}$$
$$\simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$$

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

- ullet  $G_{\mathbb{C}}$ : 連結複素半単純リー群.

 $M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

## Example 1.

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{ g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1 \}.$

$$F_{11...1}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n):=\{V_1\subset\cdots\subset V_n\mid\ V_k \text{ is a $k$-dimensional subspace of }\mathbb{C}^n\}$$
  $\simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ 

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

- G<sub>ℂ</sub>:連結複素半単純リー群.

 $M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

# Example 1.

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{ g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1 \}.$
- $P_{\mathbb{C}} := \{ L \subseteq \beta \in \mathcal{F} \} \cap SL_n(\mathbb{C}).$

$$F_{11\dots 1}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n):=\{V_1\subset \dots \subset V_n\mid \\ V_k \text{ is a $k$-dimensional subspace of }\mathbb{C}^n\}\\ \simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$$

- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}} : P_{\mathbb{C}}$  に含まれる  $G_{\mathbb{C}}$  の Borel 部分群 (Fix).
- $G: B_{\mathbb{C}}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクト実形 (Fix).

## Fact 2.1.

 $G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  は推移的. 特に  $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$  と書ける.

### Fact 2.2

 $x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$ 

$$\operatorname{Lie} P_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \ge 0} \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X \}$$

を満たすものが存在する. このとき  $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$  となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により M を  $\mathfrak{g}$  の随伴軌道として実現できる

- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}} : P_{\mathbb{C}}$  に含まれる  $G_{\mathbb{C}}$  の Borel 部分群 (Fix).
- $G: B_{\mathbb{C}}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクト実形 (Fix).

## Fact 2.1.

 $G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  は推移的. 特に  $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$  と書ける.

### Fact 2.2.

$$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$$
  $\mathfrak{T}$ 

Lie 
$$P_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \geq 0} \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X \}$$

を満たすものが存在する. このとき  $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$  となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により M を  $\mathfrak{g}$  の随伴軌道として実現できる

- $lacksymbol{B}_{\mathbb{C}}\subset P_{\mathbb{C}}:P_{\mathbb{C}}$  に含まれる  $G_{\mathbb{C}}$  の Borel 部分群 (Fix).
- $G: B_{\mathbb{C}}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクト実形 (Fix).

# Fact 2.1.

 $G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  は推移的. 特に  $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$  と書ける.

### Fact 2.2.

$$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$$
  $\mathfrak{T}$ 

Lie 
$$P_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \geq 0} \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X \}$$

を満たすものが存在する. このとき  $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$  となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により M を  $\mathfrak{g}$  の随伴軌道として実現できる.

# Fact 2.3 (再掲).

 $x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$   $\mathfrak{T}$ 

Lie 
$$P_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \geq 0} \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X \}$$

を満たすものが存在する. このとき  $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$  となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により M を  $\mathfrak{g}$  の随伴軌道として実現できる.

### Fact 2.4

随伴軌道として実現した  $M \subset \mathfrak{g}$  に Kirillov-Kostant-Souriau form を入れると (単連結) G-等質 Kähler 多様体となる.

 $x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$   $\mathfrak{T}$ 

Lie 
$$P_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \geq 0} \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X \}$$

を満たすものが存在する. このとき  $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$  となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により M を  $\mathfrak{g}$  の随伴軌道として実現できる.

# Fact 2.4.

随伴軌道として実現した  $M \subset \mathfrak{g}$  に Kirillov-Kostant-Souriau form を入れると (単連結) G-等質 Kähler 多様体となる.

# $F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\ldots,V_r) \mid V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n(\mathbb{K}\text{-subspaces}),\}$ $\dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \dots + n_i \}$

$$SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \text{Tr } x = 0\}.$$

$$x_0 = \sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \ (a+b+c=0, a>b>c).$$

$$\begin{split} F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) &= SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C})) \\ &\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6). \end{split}$$

$$F_{n_1,\dots,n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}), \\ \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \dots + n_i \}$$

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \text{Tr } x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \ (a + b + c = 0, a > b > c).$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C}))$$

$$\simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

**Rem:**  $F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  に定まる Kähler 構造は  $x_0$  に依存する.

$$F_{n_1,\dots,n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}), \\ \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \dots + n_i \}$$

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \text{Tr } x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \ (a + b + c = 0, a > b > c).$

$$\begin{split} F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) &= SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C})) \\ &\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6). \end{split}$$

**Rem:**  $F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  に定まる Kähler 構造は  $x_0$  に依存する.

$$F_{n_1,\dots,n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}), \\ \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \dots + n_i \}$$

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \text{Tr } x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \ (a + b + c = 0, a > b > c).$

$$\begin{split} F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) &= SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C})) \\ &\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6). \end{split}$$

Rem:  $F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  に定まる Kähler 構造は  $x_0$  に依存する.

# 実旗多様体

- M ⊂ g: g の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- σ: g 上の対合.
- $\mathfrak{p}_{\sigma} := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X \}$

- $L_{\sigma}$  は Kähler 多様体 M の実形になる.

# 実旗多様体

- M ⊂ g: g の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- σ: g 上の対合.
- $\mathfrak{p}_{\sigma} := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X \}$

### Definition 3.1.

 $M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \neq \emptyset$  のとき,  $L_{\sigma} := M \cap \mathfrak{p}_{\sigma}$  を M 内の 実旗多様体 という.

- $L_{\sigma}$  は Kähler 多様体 M の実形になる.

$$\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{ for } g \in G$$

# **美** 展 多 惊 体

- M ⊂ g: g の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- σ: g 上の対合.
- $\mathfrak{p}_{\sigma} := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X \}$

## **Definition 3.1.**

 $M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \neq \emptyset$  のとき,  $L_{\sigma} := M \cap \mathfrak{p}_{\sigma}$  を M 内の 実旗多様体 という.

### Rem:

- lacksquare  $L_{\sigma}$  は Kähler 多様体 M の実形になる.
- $\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{ for } g \in$

# 実旗多様体

- M ⊂ g: g の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- σ: g 上の対合.
- $\mathfrak{p}_{\sigma} := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X \}$

### Definition 3.1.

 $M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \neq \emptyset$  のとき,  $L_{\sigma} := M \cap \mathfrak{p}_{\sigma}$  を M 内の 実旗多様体 という.

### Rem:

- $L_{\sigma}$  は Kähler 多様体 M の実形になる.
- $\sigma^g := g^{-1}\sigma g$  for  $g \in G$ とおくと.  $L_{\sigma^g} = a^{-1}L_{\sigma}$ .

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1} \operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma : \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}.$

$$L_{\sigma} = M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \simeq SL_{6}(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_{6}(\mathbb{R})$$

$$= F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{6}) \subset F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{6}).$$

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1} \operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma: \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}.$
- $\mathfrak{p}_{\sigma} = \{ x \in \mathfrak{su}(6) \mid \overline{x} = -x \}.$

$$L_{\sigma} = M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \simeq SL_{6}(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_{6}(\mathbb{R})$$

$$= F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{6}) \subset F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{6}).$$

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}.$
- $x_0 = \sqrt{-1} \operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma: \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}.$
- $\mathfrak{p}_{\sigma} = \{ x \in \mathfrak{su}(6) \mid \overline{x} = -x \}.$

$$L_{\sigma} = M \cap \mathfrak{p}_{\sigma} \simeq SL_{6}(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_{6}(\mathbb{R})$$

$$= F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{6}) \subset F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{6}).$$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

$$\tau : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} \\ & & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix}$$
$$(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$L_{\tau} = M \cap \mathfrak{p}_{\tau} \simeq SU^{*}(6) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^{*}(6)$$

$$= \mathbb{C}^{\mathbb{H}} \quad (\mathbb{U}^{3}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \quad (\mathbb{C}^{6})$$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

$$\mathbf{T} : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} & \\ & & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix} \\
(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$L_{\tau} = M \cap \mathfrak{p}_{\tau} \simeq SU^{*}(6) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^{*}(6))$$

$$F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

$$\bullet \tau : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} & \\ & & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix}$$
$$(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$L_{\tau} = M \cap \mathfrak{p}_{\tau} \simeq SU^{*}(6) / \begin{pmatrix} M_{2}(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_{2}(\mathbb{C}) & * \\ & & M_{2}(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^{*}(6)$$

$$= F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{3}) \subset F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{6}).$$

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$ 

 $L_{\sigma}, L_{\tau}: S^2$  内の二つの大円. 1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma},\,L_{ au}.$ 

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$ 

 $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$ 

 $L_{\sigma}, L_{\tau}: S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$ 

■  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$ 

■  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2.

- $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$
- $L_{\sigma}, L_{\tau}: S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2.

- $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$
- $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2.

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$ 

■  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

会場: コンパクト半単純 Lie 環 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 2.

 $M = S^2 = \operatorname{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2) \ (S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}).$ 

■  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ :  $S^2$  内の二つの大円.

Q1:  $L_{\sigma} \neq L_{\tau}$  なら横断的に交わる.

Q2: このとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は  $S^2$  内の大対蹠集合.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 3 (井川-入江-酒井-田中-田崎の一連の研究).

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の 実形  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$  について

Q1: 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  の間の "捩れが正則"

Q2: このとき離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 3 (井川-入江-酒井-田中-田崎の一連の研究).

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の 実形  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$  について

Q1: 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  の間の "捩れが正則".

Q2: このとき離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など

舞台:  $\mathfrak{a}$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M \subset \mathfrak{a}$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

# Example 3 (井川-入江-酒井-田中-田崎の一連の研究).

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の 実形  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$  について

Q1: 横断的に交わる  $\leftrightarrow L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  の間の "捩れが正則".

Q2: このとき離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

- $\sigma$   $\delta$   $\tau$  が G-共役の場合は昨年の講演 (入江-酒井-田崎).
- 今回は  $(\sigma, \tau)$  が**可換化可能**, つまり  $\exists g \in G$ ,  $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$  である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

会場: コンハクト十単純 Lie 泉 g.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

- $\bullet$   $\sigma$  と  $\tau$  が G-共役の場合は昨年の講演 (入江-酒井-田崎).
- 今回は  $(\sigma, \tau)$  が**可換化可能**, つまり  $\exists g \in G$ ,  $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$  である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

- $\bullet$   $\sigma$  と  $\tau$  が G-共役の場合は昨年の講演 (入江-酒井-田崎).
- 今回は  $(\sigma, \tau)$  が**可換化可能**, つまり  $\exists g \in G$ ,  $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$  である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

- $\bullet$   $\sigma$  と  $\tau$  が G-共役の場合は昨年の講演 (入江-酒井-田崎).
- 今回は  $(\sigma, \tau)$  が**可換化可能**, つまり  $\exists g \in G$ ,  $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$  である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト *G*-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{ au}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q2 の難しさ:

 $M = G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$  は対称空間ではないので通常の意味の対蹠集合は定義できない.

■ 対蹠集合の概念を(今回のケースに限って)一般化する.

舞台:  $\mathfrak g$  の随伴軌道として実現された複素旗多様体  $M\subset \mathfrak g$ 

(単連結コンパクト G-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 M の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$ ,  $L_{\tau}$ .

Q1:  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどんな集合?

## Q2 の難しさ:

 $M = G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$  は対称空間ではないので通常の意味の対蹠集合は定義できない.

対蹠集合の概念を (今回のケースに限って) 一般化する.

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする. 複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

### Fact 5.1

 $\exists H \in \mathfrak{a}$  s.t.  $\sigma^{\exp H}$  と  $\tau$  は可換

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ" を表している.
- **■**  $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の **対称三対** を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の 集合が記述できる.

# Theorem 5.2 (後で定式化する).

 $L_{\sigma} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}$  は "正則".

# 主定理の概要

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横 断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ" を表している.
- $\bullet$   $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の 対称三対 を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

## Fact 5.1.

 $\exists H \in \mathfrak{a}$  s.t.  $\sigma^{\exp H}$  と  $\tau$  は可換.

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ" を表している.
- **■**  $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の **対称三対** を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の 集合が記述できる.

# Theorem 5.2 (後で定式化する).

 $L_{\sigma} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}$  は "正則".

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横 断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

## Fact 5.1.

 $\exists H \in \mathfrak{a}$  s.t.  $\sigma^{\exp H} \geq \tau$  は可換.

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ" を表している.
- $\bullet$   $(\mathfrak{a}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の 対称三対 を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の

# 主定理の概要

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

## Fact 5.1.

 $\exists H \in \mathfrak{a}$  s.t.  $\sigma^{\exp H}$  と  $\tau$  は可換.

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ" を表している.
- **●**  $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の **対称三対** を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の 集合が記述できる.

# Theorem 5.2 (後で定式化する).

 $L_{\sigma}$   $\pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}$  は "正則"

# 主定理の概要

**Q1**:  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

複素旗多様体  $M(\subset \mathfrak{g})$  内の二つの実旗多様体  $L_{\sigma}$  と  $L_{\tau}$  はいつ横断的に交わるか?

■  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

## Fact 5.1.

 $\exists H \in \mathfrak{a}$  s.t.  $\sigma^{\exp H}$  と  $\tau$  は可換.

- $\blacksquare$  H は  $(\sigma, \tau)$  の可換性からの "捩れ"を表している.
- **■**  $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$  の **対称三対** を用いると,  $(\sigma, \tau)$  の "捩れ方" の 集合が記述できる.

# Theorem 5.2 (後で定式化する).

 $L_{\sigma} \cap L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}$  は "正則".

**Q2:**  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

二つの実旗多様体  $L_{\sigma}, L_{\tau} \subset M$  が横断的に交わるとき, 離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

$$y \in \operatorname{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_{\sigma} \cap L_{\tau}$ .

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には"対蹠集合"の概

**Q2:**  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

二つの実旗多様体  $L_{\sigma}, L_{\tau} \subset M$  が横断的に交わるとき, 離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

## Definition 5.3.

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

#### Theorem 5.4.

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

 $y \in \operatorname{Fix}(M, Z(G^x))$  for any  $x, y \in L_\sigma \cap L_\tau$ .

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概 念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau} \subset \mathfrak{g}$  はある Weyl 群の軌道として記述できる.

主結果

**Q2:**  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

二つの実旗多様体  $L_{\sigma}, L_{\tau} \subset M$  が横断的に交わるとき, 離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

## Definition 5.3.

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

### Theorem 5.4.

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \text{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_\sigma \cap L_\tau$ .

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には"対蹠集合"の概念は通常のものと一致する。
- 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau} \subset \mathfrak{g}$  はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:**  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

二つの実旗多様体  $L_{\sigma}, L_{\tau} \subset M$  が横断的に交わるとき, 離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

### Definition 5.3.

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

#### Theorem 5.4.

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \text{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_{\sigma} \cap L_{\tau}$ .

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概 念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau} \subset \mathfrak{g}$  はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:**  $\sigma$ ,  $\tau$  を  $\mathfrak{g}$  上の可換化可能な対合とする.

二つの実旗多様体  $L_{\sigma}, L_{\tau} \subset M$  が横断的に交わるとき, 離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

### Definition 5.3.

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

### Theorem 5.4.

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \text{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_{\sigma} \cap L_{\tau}$ .

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概 念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき  $L_{\sigma} \cap L_{\tau} \subset \mathfrak{g}$  はある Weyl 群の軌道として記述できる.

$$\mathbf{1} \ x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \ \text{K-over},$$

$$C^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (直交直和分解)$$

$$y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \text{ Kolvial}$$

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

1 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 K-over,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3$$
 (直交直和分解)

such that  $V_1 = W_1$ ,  $V_2 = W_1 \oplus W_2$  とする.

 $U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  への定数倍作用として定義.  $\leadsto Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  ( $x \in F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  における"点対称"の一般化).

 $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \text{ is also } V_3' = \mathbb{C}^6$ 

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that  $V_1' = W_1'$ ,  $V_2' = W_1' \oplus W_2'$  とすると,  $y \in \text{Fix}(F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$  の分解  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  と  $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$  が compatible (各射影作用素が可換).

1 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 ktokit,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (直交直和分解)$$

such that  $V_1 = W_1, V_2 = W_1 \oplus W_2 \ge 3$ .  $U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  への定数倍作用 として定義.  $\rightarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$ 

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (直交直和分解)$$

1 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 K-over,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (直交直和分解)$$

such that  $V_1 = W_1$ ,  $V_2 = W_1 \oplus W_2$  とする.  $U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3 \wedge \mathcal{O}$ 定数倍作用 として定義.  $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  ( $x \in F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  における"点対称"の一般化).

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that  $V_1' = W_1'$ ,  $V_2' = W_1' \oplus W_2'$  とすると,  $y \in \text{Fix}(F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$  の分解  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  と  $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$  が compatible (各射影作用素が可換).

主結果

1 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 Kont,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3$$
 (直交直和分解)

such that  $V_1 = W_1$ ,  $V_2 = W_1 \oplus W_2$  とする.  $U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  への定数倍作用 として定義.  $\leadsto Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$   $(x \in F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  における"点対称"の一般化).

2 
$$y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 とついて

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that  $V_1' = W_1'$ ,  $V_2' = W_1' \oplus W_2'$  とすると,  $y \in \text{Fix}(F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$  の分解  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  と  $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$  が compatible (各射影作用素が可換).

主結果

**1** 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3$$
 (直交直和分解)

such that  $V_1 = W_1$ ,  $V_2 = W_1 \oplus W_2$  とする.  $U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3 \wedge \mathbb{C}$  定数倍作用 として定義.  $\hookrightarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  ( $x \in F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  における"点対称"の一般化).

2 
$$y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 Korr

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (直交直和分解)$$

such that  $V_1' = W_1'$ ,  $V_2' = W_1' \oplus W_2'$  とすると,  $y \in \text{Fix}(F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6 \text{ の分解 } W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  が compatible (各射影作用素が可換).

1 
$$x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 とついて,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (直交直和分解)$$

such that  $V_1 = W_1$ ,  $V_2 = W_1 \oplus W_2$  とする.  $U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge \mathbb{C}^6$  を各  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3 \wedge \mathbb{C}$ 定数倍作用 として定義.  $\hookrightarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \wedge F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  ( $x \in F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$  における"点対称"の一般化).

2 
$$y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$$
 Korr

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3'$$
 (直交直和分解)

such that  $V_1' = W_1'$ ,  $V_2' = W_1' \oplus W_2'$  とすると,  $y \in \text{Fix}(F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$  の分解  $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  と  $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$  が compatible (各射影作用素が可換).

# Definition 5.5 (再掲).

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

# Theorem 5.6 (再掲).

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \operatorname{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_{\sigma} \cap L_{\tau}$ .

ただし 
$$Fix(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid Ad(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}.$$

#### Theorem 5.7.

 $x,y \in M \subset \mathfrak{g}$  について,  $y \in \operatorname{Fix}(M,Z(G^x)) \iff [x,y] = 0$  in  $\mathfrak{g}$ 

# Definition 5.5 (再掲).

各  $x \in M \simeq G/G^x$  について,  $G^x$  の中心を  $Z(G^x)(\subset G^x)$  と置く.

# Theorem 5.6 (再掲).

離散交叉  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \text{Fix}(M, Z(G^x))$$
 for any  $x, y \in L_{\sigma} \cap L_{\tau}$ .

ただし 
$$Fix(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid Ad(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}.$$

### Theorem 5.7.

$$x,y \in M \subset \mathfrak{g}$$
 について,  $y \in \operatorname{Fix}(M,Z(G^x)) \iff [x,y] = 0$  in  $\mathfrak{g}$ .

- $\sigma_0$ ,  $\tau \curvearrowright \mathfrak{g}$  を可換と仮定.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
  - **1**  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
  - $\mathbb{Z}$   $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$
  - $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

### Theorem 5.8

$$\mathfrak{a}_{\text{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

# \ \_\_\_\_\_\_

- $\bullet$   $\sigma_0$ ,  $\tau \curvearrowright \mathfrak{g}$  を**可換と仮定**.  $\bullet$   $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).
- **Q1:** 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?
  - $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
    - $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
    - $\mathbb{Z}$   $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$
    - $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

### Theorem 5.8.

$$\mathfrak{a}_{\text{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $\sigma_0$ ,  $\tau \curvearrowright \mathfrak{g}$  を可換と仮定.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
  - **1**  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
  - $\mathbb{Z}$   $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$
  - $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

### Theorem 5.8.

$$\mathfrak{a}_{\text{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \not\in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \not\in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

# ■ $\sigma_0$ , $\tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を可換と仮定.

 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
  - **1**  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
  - **2**  $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$ .
  - $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

### Theorem 5.8.

$$\mathfrak{a}_{\text{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $\sigma_0$ ,  $\tau \curvearrowright \mathfrak{g}$  を可換と仮定.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
  - **1**  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
  - **2**  $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$ .
  - 3  $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

### Theorem 5.8.

$$\mathfrak{a}_{\text{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

# 主結果

- lacksquare  $\sigma_0$ ,  $au \curvearrowright \mathfrak{g}$  を可換と仮定.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ :極大可換部分空間 (Fix).

**Q1**: 各  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau$ ) に付随する対称三対.
  - **1**  $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .
  - **2**  $W \subset \mathfrak{a}^* : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0 \tau})_{\mathbb{C}}$  のウェイトの集合  $\times \sqrt{-1}$ .
  - 3  $\Sigma = \Sigma \cup W : \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系  $\times \sqrt{-1}$ .

## Theorem 5.8.

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathsf{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

# Theorem 5.9 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathsf{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(\sqrt{-1}H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $ilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : "The affine Weyl group of  $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ ".
- $lack a_{
  m reg}$  の連結成分の閉包が  $W( ilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ -作用の基本領域.

### Definition 5.10.

$$H \sim H' \in \mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH' \text{ for some } w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$$

#### Theorem 5.11

### Theorem 5.9 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathsf{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(\sqrt{-1}H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $ilde{W}( ilde{\Sigma},\Sigma,W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : "The affine Weyl group of  $( ilde{\Sigma},\Sigma,W)$ ".
- lacksquare  $\mathfrak{a}_{\mathsf{reg}}$  の連結成分の閉包が  $W(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ -作用の基本領域.

#### Definition 5.10.

$$H \sim H' \in \mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH' \text{ for some } w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$$

#### Theorem 5.11

$$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(\sqrt{-1}H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $ilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W) \curvearrowright \mathfrak{a}:$  "The affine Weyl group of  $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ ".
- $lack a_{
  m reg}$  の連結成分の閉包が  $W( ilde{\Sigma},\Sigma,W)$ -作用の基本領域.

#### Definition 5.10.

$$H \sim H' \in \mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH' \text{ for some } w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W).$$

#### Theorem 5.11

$$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \not \in \pi \mathbb{Z}, \ \alpha(\sqrt{-1}H) \not \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \}.$$

- $ilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : "The affine Weyl group of  $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ ".
- $lack a_{
  m reg}$  の連結成分の閉包が  $W( ilde{\Sigma},\Sigma,W)$ -作用の基本領域.

#### Definition 5.10.

$$H \sim H' \in \mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH' \text{ for some } w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W).$$

# Theorem 5.12 (再掲).

# $L_{\sigma_{\alpha}^{-}\exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$

(極大可換部分空間).

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $COEEL_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合
- $3 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $W(\Sigma)$ -軌道となる.

### Theorem 5.12 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_0^{-}\exp H} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合
- $3 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $W(\Sigma)$ -軌道となる.

主結果

 $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

### Theorem 5.12 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}.$$

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\sigma_{\alpha}^{-} \exp H} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$

### Theorem 5.12 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}.$$

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\sigma_{\alpha}^{-} \exp H} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合.

 $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

### Theorem 5.12 (再掲).

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}.$$

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_{\alpha}^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $\mathcal{L}_{\sigma_{\alpha}^{-} \exp H} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合.
- $\mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $W(\tilde{\Sigma})$ -軌道となる.

### $G = SU(6) \curvearrowright F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = \operatorname{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\operatorname{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$  $\subset \mathfrak{su}(6)$ .
- $\sigma_0(x) = \overline{x}, \ \tau(x) = \operatorname{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) \overline{x} \operatorname{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}).$
- $F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M, F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^3) \simeq L_{\tau} \subset M.$
- $\mathbf{a} := \{ \sqrt{-1} \operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0 \} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$
- **Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

## $G = SU(6) \curvearrowright F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = \operatorname{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\operatorname{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$  $\subset \mathfrak{su}(6)$ .
- $\bullet$   $\sigma_0(x) = \overline{x}, \ \tau(x) = \operatorname{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) \overline{x} \operatorname{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}).$  $(\sigma_0, \tau は可換)$
- $F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M, F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^3) \simeq L_{\tau} \subset M.$
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$

**Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $M \simeq F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = \operatorname{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\operatorname{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$  $\subset \mathfrak{su}(6)$ .
- $\sigma_0(x) = \overline{x}, \ \tau(x) = \operatorname{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) \overline{x} \operatorname{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}).$  $(\sigma_0, \tau は可換)$
- $\mathbf{F}_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M, F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^3) \simeq L_{\tau} \subset M.$
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$

**Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

## $G = SU(6) \curvearrowright F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = \operatorname{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\operatorname{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$  $\subset \mathfrak{su}(6)$ .
- $\sigma_0(x) = \overline{x}, \ \tau(x) = \operatorname{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) \overline{x} \operatorname{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}).$  $(\sigma_0, \tau は可換)$
- $\mathbf{F}_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M, F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^3) \simeq L_{\tau} \subset M.$
- $\bullet \mathfrak{a} := \{ \sqrt{-1} \operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0 \} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

**Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

### $G = SU(6) \curvearrowright F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F_{2,2,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6) = \operatorname{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\operatorname{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$  $\subset \mathfrak{su}(6)$ .
- $\sigma_0(x) = \overline{x}, \ \tau(x) = \operatorname{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) \overline{x} \operatorname{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}).$  $(\sigma_0, \tau は可換)$
- $\blacksquare F_{2,2,2}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M, F_{1,1,1}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^3) \simeq L_{\tau} \subset M.$
- $\mathbf{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

**Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_{\sigma}^{-} \exp H}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

主結果

- $\mathbf{a} := \{ \sqrt{-1} \operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0 \} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).
- **Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?
  - **■**  $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) : (\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau)$  の対称三対. **■**  $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W : A_2$  型ルート系.

#### Theorem 5.14

$$L_{\sigma_0^{-}\exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2 
ot 2 
u - h 
ot S} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \}.$$

- $\mathbf{a} := \{ \sqrt{-1} \operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0 \} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).
- **Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?
  - $\bullet$   $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) : (\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau)$  の対称三対.
    - $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W : A_2$  型ルート系.

$$L_{\sigma_0^-\exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2 \boxtimes \mathcal{V} - + \widetilde{\mathbb{A}}} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \not \in \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \}$$

■  $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).

**Q1:**  $H \in \mathfrak{a}$  について  $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$  と  $L_{\tau}$  は横断的に交わるか?

- $\bullet$  ( $\tilde{\Sigma}, \Sigma, W$ ): ( $\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau$ ) の対称三対.

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathsf{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2 riangle 
u - h \, imes} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) 
ot \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{Z} \}.$$

- $x_0 = \sqrt{-1}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$
- $\bullet \mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

### Theorem 5.15 (再掲).

 $L_{\sigma_{\circ}^{-}\exp H} \cap L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$ 

**Q2:** このとき  $L_{\sigma_{\alpha}^{-}\exp H} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- $x_0 = \sqrt{-1}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).

### Theorem 5.15 (再掲).

 $L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$ 

**Q2**: このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1 CO E E  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合.
- $\mathbf{3}$   $\mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\Sigma)$ -軌道となる.

主結果

- $x_0 = \sqrt{-1}(1, 1, 0, 0, -1, -1).$
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).

### Theorem 5.15 (再掲).

 $L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_{\tau} \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$ 

**Q2**: このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $CObbise L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合.
- $3 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\Sigma)$ -軌道となる.

•  $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\operatorname{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$  (極大可換部分空間).

### Theorem 5.15 (再掲).

 $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}.$ 

**Q2**: このとき  $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau}$  はどのような集合か?

- 1  $CObbise L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_{\tau} = \mathfrak{a} \cap L_{\tau}.$
- $2 \mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は M の対蹠集合.
- **3**  $\mathfrak{a} \cap L_{\tau}$  は  $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\tilde{\Sigma})$ -軌道となる.

- 可換化不可能な  $\sigma$ ,  $\tau$  について  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  in M を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

### Fact 6.1 (井川―入江―酒井―田中―田崎の一連の研究).

1 コンパクト型 Hermite 対称空間 M 内の横断的に交わる二 つの 実形  $L_1, L_2$  について M が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1,L_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1\cap L_2)}$$

 $Q_n(\mathbb{C})$  の実形  $S^n$  は Hamilton 体積最小.

- 可換化不可能な  $\sigma$ ,  $\tau$  について  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  in M を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

### Fact 6.1 (井川―入江―酒井―田中―田崎の一連の研究).

**コンパクト型 Hermite 対称空間** M 内の横断的に交わる二 つの 実形  $L_1$ ,  $L_2$  について M が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1,L_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1\cap L_2)}$$

 $Q_n(\mathbb{C})$  の実形  $S^n$  は Hamilton 体積最小.

### 今後の課題

- 可換化不可能な  $\sigma$ .  $\tau$  について  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  in M を調べられな いか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

$$\mathrm{HF}(L_1,L_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1\cap L_2)}$$

### 今後の課題

- 可換化不可能な  $\sigma$ .  $\tau$  について  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  in M を調べられな いか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

$$\mathrm{HF}(L_1,L_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1\cap L_2)}$$

- 可換化不可能な  $\sigma$ ,  $\tau$  について  $L_{\sigma} \cap L_{\tau}$  in M を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

### Fact 6.1 (井川-入江-酒井-田中-田崎の一連の研究).

**I コンパクト型 Hermite 対称空間** M 内の横断的に交わる二 つの 実形  $L_1$ ,  $L_2$  について M が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1,L_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1\cap L_2)}.$$

 $\mathbf{Q}_n(\mathbb{C})$  の実形  $S^n$  は Hamilton 体積最小.