# 複素旗多様体内の二つの実形の交叉

奥田隆幸 (広島大)
井川治 (京都工繊大)
入江博 (茨城大)
酒井高司 (首都大東京)
田崎博之 (筑波大)

2015/8/30 第 62 回幾何学シンポジウム 於 東京理科大学

# 主結果まとめ

**Theorem 1.1 (Main theorem).**

**(一般化) 複素旗多様体** 内の二つの **実旗多様体** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は "対蹠集合" である.

**Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

コンパクト型 **Hermite 対称空間** $M$ 内の **実形** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合である.
3. *Floer homology* への応用など.

# 主結果まとめ

**Theorem 1.1 (Main theorem).**

**(一般化) 複素旗多様体** 内の二つの **実旗多様体** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は "対蹠集合" である.

**Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ 内の **実形** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合である.
3. *Floer homology* への応用など.

# 主結果まとめ

**Theorem 1.1 (Main theorem).**

**(一般化) 複素旗多様体** 内の二つの **実旗多様体** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は "対蹠集合" である.

**Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ 内の **実形** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合である.
3. *Floer homology* への応用など.

# 主結果まとめ

**Theorem 1.1 (Main theorem).**

**(一般化) 複素旗多様体** 内の二つの **実旗多様体** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は "対蹠集合" である.

**Fact 1.2 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ 内の **実形** $L_1, L_2$ について

1. 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_1$ と $L_2$ の間の "捩れが正則".
2. このとき離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合である.
3. *Floer homology* への応用など.

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

- $G_{\mathbb{C}}$ : 連結複素半単純リー群.
- $P_{\mathbb{C}}$ : $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群.

$M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

**Example 1.**

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$.
- $P_{\mathbb{C}} := \{$ 上三角行列 $\} \cap SL_n(\mathbb{C})$.

$$
\begin{aligned}
F^{\mathbb{C}}_{11\ldots1}(\mathbb{C}^n) := \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid \\
V_k \text{ is a } k\text{-dimensional subspace of } \mathbb{C}^n\} \\
\simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

- $G_{\mathbb{C}}$ : 連結複素半単純リー群.
- $P_{\mathbb{C}}$ : $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群.

$M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

**Example 1.**

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$.
- $P_{\mathbb{C}} :=$ { 上三角行列 } $\cap\, SL_n(\mathbb{C})$.

$$F^{\mathbb{C}}_{11\ldots1}(\mathbb{C}^n) := \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid V_k \text{ is a } k\text{-dimensional subspace of } \mathbb{C}^n\} \simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$$

# 複素旗多様体の随伴軌道としての実現

- $G_{\mathbb{C}}$ : 連結複素半単純リー群.
- $P_{\mathbb{C}}$ : $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群.

$M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ : (一般化) 複素旗多様体.

**Example 1.**

- $G_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$.
- $P_{\mathbb{C}} :=$ { 上三角行列 } $\cap SL_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} F^{\mathbb{C}}_{11\ldots1}(\mathbb{C}^n) &:= \{V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid \\ &\qquad V_k \text{ is a } k\text{-dimensional subspace of } \mathbb{C}^n\} \\ &\simeq G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$ : $P_{\mathbb{C}}$ に含まれる $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 (Fix).
- $G$ : $B_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 (Fix).

**Fact 2.1.**

$G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ は推移的. 特に $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$ と書ける.

**Fact 2.2.**

$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$ で

$$\operatorname{Lie} P_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \geq 0}\{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X\}$$

を満たすものが存在する. このとき $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$ となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により $M$ を $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現できる.

- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$ : $P_{\mathbb{C}}$ に含まれる $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 (Fix).
- $G$ : $B_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 (Fix).

**Fact 2.1.**

$G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ は推移的．特に $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$ と書ける．

**Fact 2.2.**

$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \operatorname{Lie} G)$ で

$$\operatorname{Lie} P_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \geq 0}\{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X\}$$

を満たすものが存在する．このとき $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$ となるので，

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により $M$ を $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現できる．

- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$ : $P_{\mathbb{C}}$ に含まれる $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 (Fix).
- $G$ : $B_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 (Fix).

**Fact 2.1.**

$G \curvearrowright M = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ は推移的. 特に $M \simeq G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$ と書ける.

**Fact 2.2.**

$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \mathrm{Lie}\, G)$ で

$$\mathrm{Lie}\, P_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \geq 0}\{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X\}$$

を満たすものが存在する. このとき $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$ となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により $M$ を $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現できる.

## Fact 2.3 (再掲).

$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \mathrm{Lie}\, G)$ で

$$\mathrm{Lie}\, P_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \geq 0}\{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}x_0, X] = \lambda X\}$$

を満たすものが存在する．このとき $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$ となるので，

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により $M$ を $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現できる．

## Fact 2.4.

随伴軌道として実現した $M \subset \mathfrak{g}$ に *Kirillov–Kostant–Souriau form* を入れると（単連結）$G$-等質 *Kähler* 多様体となる．

## Fact 2.3 (再掲).

$x_0 \in \mathfrak{g}(:= \mathrm{Lie}\, G)$ で

$$\mathrm{Lie}\, P_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \geq 0} \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1} x_0, X] = \lambda X\}$$

を満たすものが存在する．このとき $G \cap P_{\mathbb{C}} = G^{x_0}$ となるので,

$$M \simeq G/G^{x_0} \simeq \mathrm{Ad}(G) x_0 \subset \mathfrak{g}$$

により $M$ を $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現できる．

## Fact 2.4.

随伴軌道として実現した $M \subset \mathfrak{g}$ に *Kirillov–Kostant–Souriau form* を入れると ( 単連結 ) $G$-等質 *Kähler* 多様体となる．

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}), \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \cdots + n_i\}$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c)$ $(a+b+c=0, a>b>c)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

**Rem:** $F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ に定まる Kähler 構造は $x_0$ に依存する.

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}),\ \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \cdots + n_i\}$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c)$ $(a+b+c=0, a>b>c)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C}))$$
$$\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

**Rem:** $F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ に定まる Kähler 構造は $x_0$ に依存する.

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\ldots,V_r) \mid V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n (\mathbb{K}\text{-subspaces}), \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \cdots + n_i\}$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c)$ $(a+b+c=0, a>b>c)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C}))$$

$$\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

**Rem:** $F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ に定まる Kähler 構造は $x_0$ に依存する.

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \{(V_1,\dots,V_r) \mid V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n(\mathbb{K}\text{-subspaces}), \dim_{\mathbb{K}} V_i = n_1 + \cdots + n_i\}$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c)$ $(a+b+c=0, a>b>c)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = SL_6(\mathbb{C})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{C}))$$
$$\simeq \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

**Rem:** $F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ に定まる Kähler 構造は $x_0$ に依存する.

# 実旗多様体

- $M \subset \mathfrak{g}$ : $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- $\sigma$ : $\mathfrak{g}$ 上の対合.
- $\mathfrak{p}_\sigma := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$

**Definition 3.1.**

$M \cap \mathfrak{p}_\sigma \neq \emptyset$ のとき, $L_\sigma := M \cap \mathfrak{p}_\sigma$ を $M$ 内の **実旗多様体** という.

**Rem:**

- $L_\sigma$ は Kähler 多様体 $M$ の実形になる.
- $$\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{for } g \in G$$
  とおくと, $L_{\sigma^g} = g^{-1}L_\sigma$.

# 実旗多様体

- $M \subset \mathfrak{g}$ : $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- $\sigma$ : $\mathfrak{g}$ 上の対合.
- $\mathfrak{p}_\sigma := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$

**Definition 3.1.**

$M \cap \mathfrak{p}_\sigma \neq \emptyset$ のとき, $L_\sigma := M \cap \mathfrak{p}_\sigma$ を $M$ 内の **実旗多様体** という.

**Rem:**

- $L_\sigma$ は Kähler 多様体 $M$ の実形になる.
- $$\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{for } g \in G$$
  とおくと, $L_{\sigma^g} = g^{-1}L_\sigma$.

# 実旗多様体

- $M \subset \mathfrak{g}$ : $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- $\sigma$ : $\mathfrak{g}$ 上の対合.
- $\mathfrak{p}_\sigma := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$

**Definition 3.1.**

$M \cap \mathfrak{p}_\sigma \neq \emptyset$ のとき, $L_\sigma := M \cap \mathfrak{p}_\sigma$ を $M$ 内の **実旗多様体** という.

**Rem:**

- $L_\sigma$ は Kähler 多様体 $M$ の実形になる.
- $$\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{for } g \in G$$
  とおくと, $L_{\sigma^g} = g^{-1}L_\sigma$.

# 実旗多様体

- $M \subset \mathfrak{g}$ : $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体.
- $\sigma$ : $\mathfrak{g}$ 上の対合.
- $\mathfrak{p}_\sigma := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$

**Definition 3.1.**

$M \cap \mathfrak{p}_\sigma \neq \emptyset$ のとき, $L_\sigma := M \cap \mathfrak{p}_\sigma$ を $M$ 内の **実旗多様体** という.

**Rem:**

- $L_\sigma$ は Kähler 多様体 $M$ の実形になる.
- $$\sigma^g := g^{-1}\sigma g \quad \text{for } g \in G$$
  とおくと, $L_{\sigma^g} = g^{-1}L_\sigma$.

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma : \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}$.
- $\mathfrak{p}_\sigma = \{x \in \mathfrak{su}(6) \mid \overline{x} = -x\}$.

$$L_\sigma = M \cap \mathfrak{p}_\sigma \simeq SL_6(\mathbb{R})/\left(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{R})\right)$$

$$= F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \operatorname{Tr} x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \operatorname{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma : \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}$.
- $\mathfrak{p}_\sigma = \{x \in \mathfrak{su}(6) \mid \overline{x} = -x\}$.

$$L_\sigma = M \cap \mathfrak{p}_\sigma \simeq SL_6(\mathbb{R})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{R}))$$

$$= F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

- $SU(6) \curvearrowright \mathfrak{su}(6) = \{x \in M_6(\mathbb{C}) \mid x^* = -x, \mathrm{Tr}\, x = 0\}$.
- $x_0 = \sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1)$.

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\sigma : \mathfrak{su}(6) \to \mathfrak{su}(6), x \mapsto \overline{x}$.
- $\mathfrak{p}_\sigma = \{x \in \mathfrak{su}(6) \mid \overline{x} = -x\}$.

$$L_\sigma = M \cap \mathfrak{p}_\sigma \simeq SL_6(\mathbb{R})/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SL_6(\mathbb{R}))$$
$$= F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\tau : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & & \\ & \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix}$
  $(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$.

$$L_\tau = M \cap \mathfrak{p}_\tau \simeq SU^*(6)/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^*(6))$$

$$= F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\tau : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & & \\ & \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix}$ $\left(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

$$L_\tau = M \cap \mathfrak{p}_\tau \simeq SU^*(6)/\left(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^*(6)\right)$$
$$= F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## $G = SU(6)$ の場合の例

$$F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \simeq M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{su}(6).$$

- $\tau : x \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_2 & & \\ & \Omega_2 & \\ & & \Omega_2 \end{pmatrix} \overline{x} \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & & \\ & \Omega_2^{-1} & \\ & & \Omega_2^{-1} \end{pmatrix}$
  $(\Omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$.

$$L_\tau = M \cap \mathfrak{p}_\tau \simeq SU^*(6)/(\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{C}) & * & * \\ & M_2(\mathbb{C}) & * \\ & & M_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cap SU^*(6))$$

$$= F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \subset F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6).$$

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$
(単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma, L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

**Example 2.**

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ ($S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}}$).
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

**Example 2.**

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 2.

- $M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))x_0 \subset \mathfrak{su}(2)$ $(S^2 \simeq SL_2(\mathbb{C})/B_{\mathbb{C}})$.
- $L_\sigma$, $L_\tau$ : $S^2$ 内の二つの大円.

Q1: $L_\sigma \neq L_\tau$ なら横断的に交わる.

Q2: このとき $L_\sigma \cap L_\tau$ は $S^2$ 内の大対蹠集合.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Example 3 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ の **実形** $L_\sigma, L_\tau$ について

Q1: 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_\sigma$ と $L_\tau$ の間の "捩れが正則".

Q2: このとき離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

**Example 3 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ の **実形** $L_\sigma, L_\tau$ について

Q1: 横断的に交わる ↔ $L_\sigma$ と $L_\tau$ の間の "捩れが正則".

Q2: このとき離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合?

## Example 3 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).

**コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ の **実形** $L_\sigma$, $L_\tau$ について

Q1: 横断的に交わる $\leftrightarrow$ $L_\sigma$ と $L_\tau$ の間の "捩れが正則".

Q2: このとき離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は対蹠集合である.

更に Floer homology への応用など.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

$\sigma$, $\tau$ の $G$-共役類の取り方に**依存する**問題

- $\sigma$ と $\tau$ が $G$-共役の場合は昨年の講演 (入江–酒井–田崎).
- 今回は $(\sigma, \tau)$ が**可換化可能**, つまり $^{\exists}g \in G$, $\sigma^g\tau = \tau\sigma^g$ である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Q1 の難しさ:

$\sigma$, $\tau$ の $G$-共役類の取り方に**依存する**問題

- $\sigma$ と $\tau$ が $G$-共役の場合は昨年の講演 (入江–酒井–田崎).
- 今回は $(\sigma, \tau)$ が**可換化可能**, つまり $^\exists g \in G$, $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$ である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Q1 の難しさ:

$\sigma$, $\tau$ の $G$-共役類の取り方に**依存する**問題

- $\sigma$ と $\tau$ が $G$-共役の場合は昨年の講演 (入江–酒井–田崎).
- 今回は $(\sigma, \tau)$ が**可換化可能**, つまり $^\exists g \in G$, $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$ である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか?

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合?

## Q1 の難しさ:

$\sigma$, $\tau$ の $G$-共役類の取り方に**依存する**問題

- $\sigma$ と $\tau$ が $G$-共役の場合は昨年の講演 (入江–酒井–田崎).
- 今回は $(\sigma, \tau)$ が**可換化可能**, つまり $^\exists g \in G$, $\sigma^g \tau = \tau \sigma^g$ である場合を考え, **対称三対** を用いて調べる.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$ (単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Q2 の難しさ:

$M = G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$ は対称空間ではないので通常の意味の対蹠集合は定義できない.

- 対蹠集合の概念を (今回のケースに限って) 一般化する.

## 問題設定

会場: コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$.

舞台: $\mathfrak{g}$ の随伴軌道として実現された複素旗多様体 $M \subset \mathfrak{g}$
(単連結コンパクト $G$-等質 Kähler 多様体).

主役: Kähler 多様体 $M$ の二つの実旗多様体 $L_\sigma$, $L_\tau$.

Q1: $L_\sigma$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

Q2: 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau$ はどんな集合？

## Q2 の難しさ:

$M = G/(G \cap P_{\mathbb{C}})$ は対称空間ではないので通常の意味の対蹠集合は定義できない.

- 対蹠集合の概念を (今回のケースに限って) 一般化する.

# 主定理の概要

**Q1：** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

$^\exists H \in \mathfrak{a}$ *s.t.* $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "振れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "振れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

# 主定理の概要

**Q1：** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$ ： 極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

$^\exists H \in \mathfrak{a}$ s.t. $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "捩れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "捩れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

# 主定理の概要

**Q1 :** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

${}^\exists H \in \mathfrak{a}$ *s.t.* $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "捩れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "捩れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

# 主定理の概要

**Q1**：$\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$：極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

${}^\exists H \in \mathfrak{a}$ *s.t.* $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "捩れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "捩れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

# 主定理の概要

**Q1：** $\sigma, \tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

$^\exists H \in \mathfrak{a}$ s.t. $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "捩れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "捩れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

# 主定理の概要

**Q1 :** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
複素旗多様体 $M(\subset \mathfrak{g})$ 内の二つの実旗多様体 $L_\sigma$ と $L_\tau$ はいつ横断的に交わるか?

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_\sigma \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Fact 5.1.**

$^\exists H \in \mathfrak{a}$ s.t. $\sigma^{\exp H}$ と $\tau$ は可換.

- $H$ は $(\sigma, \tau)$ の可換性からの "捩れ" を表している.
- $(\mathfrak{g}, \sigma^{\exp H}, \tau)$ の **対称三対** を用いると, $(\sigma, \tau)$ の "捩れ方" の集合が記述できる.

**Theorem 5.2 (後で定式化する).**

$L_\sigma \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}$ は "正則".

**Q2:** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau \subset M$ が横断的に交わるとき, 離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Definition 5.3.**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.4.**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \text{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau \subset \mathfrak{g}$ はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau \subset M$ が横断的に交わるとき, 離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Definition 5.3.**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.4.**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau \subset \mathfrak{g}$ はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau \subset M$ が横断的に交わるとき, 離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ はどのような集合か?

**Definition 5.3.**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.4.**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau \subset \mathfrak{g}$ はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:** $\sigma$, $\tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau \subset M$ が横断的に交わるとき, 離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ はどのような集合か?

**Definition 5.3.**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.4.**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau \subset \mathfrak{g}$ はある Weyl 群の軌道として記述できる.

**Q2:** $\sigma, \tau$ を $\mathfrak{g}$ 上の可換化可能な対合とする.
二つの実旗多様体 $L_\sigma, L_\tau \subset M$ が横断的に交わるとき, 離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ はどのような集合か?

**Definition 5.3.**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.4.**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

- コンパクト型 Hermite 対称空間の場合には "対蹠集合" の概念は通常のものと一致する.
- 横断的に交わるとき $L_\sigma \cap L_\tau \subset \mathfrak{g}$ はある Weyl 群の軌道として記述できる.

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

   such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする.
   $U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1, W_2, W_3$ への定数倍作用として定義. $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
   ($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).
2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

   such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると,
   $y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換).

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について，

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする．
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1, W_2, W_3$ への定数倍作用として定義． $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化)．

2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると，
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換)．

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1 $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする.
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1$, $W_2$, $W_3$ への定数倍作用として定義. $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
$(x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).

2 $y = (V'_1, V'_2, V'_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W'_1 \perp W'_2 \perp W'_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V'_1 = W'_1$, $V'_2 = W'_1 \oplus W'_2$ とすると,
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W'_1 \oplus W'_2 \oplus W'_3$ が compatible (各射影作用素が可換).

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について，

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする．
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1$, $W_2$, $W_3$ への定数倍作用として定義．$\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).

2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると，
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換).

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする.
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1$, $W_2$, $W_3$ への定数倍作用として定義. $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ ($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).

2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると,
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換).

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする.
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1$, $W_2$, $W_3$ への定数倍作用として定義. $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).

2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると,
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換).

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ の対蹠集合の例

1. $x = (V_1, V_2, V_3 = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について,

$$\mathbb{C}^6 = W_1 \perp W_2 \perp W_3 \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \oplus W_2$ とする.
$U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^6$ を各 $W_1$, $W_2$, $W_3$ への定数倍作用として定義. $\rightsquigarrow Z(G^x) \simeq U(1) \times U(1) \times U(1) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$
($x \in F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ における "点対称" の一般化).

2. $y = (V_1', V_2', V_3' = \mathbb{C}^6) \in F_{2,2,2}(\mathbb{C}^6)$ について

$$\mathbb{C}^6 = W_1' \perp W_2' \perp W_3' \quad (\text{直交直和分解})$$

such that $V_1' = W_1'$, $V_2' = W_1' \oplus W_2'$ とすると,
$y \in \mathrm{Fix}(F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6), Z(G^x)) \iff \mathbb{C}^6$ の分解 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と $W_1' \oplus W_2' \oplus W_3'$ が compatible (各射影作用素が可換).

**Definition 5.5 (再掲).**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.6 (再掲).**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

**Theorem 5.7.**

$x, y \in M \subset \mathfrak{g}$ について,
$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \iff [x, y] = 0$ *in* $\mathfrak{g}$.

**Definition 5.5 (再掲).**

各 $x \in M \simeq G/G^x$ について, $G^x$ の中心を $Z(G^x)(\subset G^x)$ と置く.

**Theorem 5.6 (再掲).**

離散交叉 $L_\sigma \cap L_\tau$ は次の意味で**対蹠集合**:

$$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \quad \textit{for any} \quad x, y \in L_\sigma \cap L_\tau.$$

ただし $\mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) := \{z \in M \mid \mathrm{Ad}(t)z = z \ (\forall t \in Z(G^x))\}$.

**Theorem 5.7.**

$x, y \in M \subset \mathfrak{g}$ について,
$y \in \mathrm{Fix}(M, Z(G^x)) \iff [x, y] = 0$ *in* $\mathfrak{g}$.

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか?

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_{\mathbb{C}}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_{\mathbb{C}}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma, \alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか?

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma, \alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

# 主結果

- $\sigma_0, \tau \curvearrowright \mathfrak{g}$ を**可換と仮定**.
- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ : 極大可換部分空間 (Fix).

**Q1:** 各 $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0}^{-\exp H}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

---

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{g}, \sigma_0, \tau)$ に付随する対称三対.
  1. $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.
  2. $W \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright (\mathfrak{g}^{-\sigma_0\tau})_\mathbb{C}$ のウェイトの集合 $\times\sqrt{-1}$.
  3. $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ : $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \curvearrowright \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系 $\times\sqrt{-1}$.

**Theorem 5.8.**

$L_{\sigma_0}^{-\exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

**Theorem 5.9 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(\sqrt{-1}H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

- $\tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : "The affine Weyl group of $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$".
- $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ の連結成分の閉包が $W(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$-作用の基本領域.

**Definition 5.10.**

$H \sim H' \in \mathfrak{a} \overset{\mathrm{def}}{\iff} H = wH'$ *for some* $w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$.

**Theorem 5.11.**

$H \sim H' \Rightarrow L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ と $L_{\sigma_0^- \exp H'} \cap L_\tau$ は $G$-共役.

## Theorem 5.9 (再掲).

$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(\sqrt{-1}H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

- $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : “The affine Weyl group of $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$”.
- $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ の連結成分の閉包が $W(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$-作用の基本領域.

## Definition 5.10.

$H \sim H' \in \mathfrak{a} \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH'$ *for some* $w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$.

## Theorem 5.11.

$H \sim H' \Rightarrow L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ と $L_{\sigma_0^- \exp H'} \cap L_\tau$ は $G$-共役.

## Theorem 5.9 (再掲).

$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(\sqrt{-1}H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

- $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : “The affine Weyl group of $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$”.
- $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ の連結成分の閉包が $W(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$-作用の基本領域.

## Definition 5.10.

$H \sim H' \in \mathfrak{a} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} H = wH'$ *for some* $w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$.

## Theorem 5.11.

$H \sim H' \Rightarrow L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ と $L_{\sigma_0^- \exp H'} \cap L_\tau$ は $G$-共役.

**Theorem 5.9 (再掲).**

$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(\sqrt{-1}H) \notin \pi\mathbb{Z},\ \alpha(\sqrt{-1}H) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}.$$

- $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \curvearrowright \mathfrak{a}$ : "The affine Weyl group of $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$".
- $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ の連結成分の閉包が $W(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$-作用の基本領域.

**Definition 5.10.**

$H \sim H' \in \mathfrak{a} \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} H = wH'$ for some $w \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$.

**Theorem 5.11.**

$H \sim H' \Rightarrow L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ と $L_{\sigma_0^- \exp H'} \cap L_\tau$ は $G$-共役.

- $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
(極大可換部分空間).

**Theorem 5.12 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.13.**

1. このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
  (極大可換部分空間).

**Theorem 5.12 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.13.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
(極大可換部分空間).

**Theorem 5.12 (再掲).**

$L_{\sigma_0^{-}\exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-}\exp H} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.13.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-}\exp H} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
(極大可換部分空間).

**Theorem 5.12 (再掲).**

$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.13.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
(極大可換部分空間).

**Theorem 5.12 (再掲).**

$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.13.**

1. このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau.$
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1) \subset \mathfrak{su}(6)$.
- $\sigma_0(x) = \overline{x}$, $\tau(x) = \mathrm{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2)\overline{x}\,\mathrm{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1})$. ($\sigma_0$, $\tau$ は可換)
- $F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M$, $F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \simeq L_\tau \subset M$.

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1) \subset \mathfrak{su}(6)$.
- $\sigma_0(x) = \overline{x}$, $\tau(x) = \mathrm{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2)\overline{x}\,\mathrm{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1})$. ($\sigma_0$, $\tau$ は可換)
- $F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M$, $F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \simeq L_\tau \subset M$.

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1) \subset \mathfrak{su}(6)$.
- $\sigma_0(x) = \overline{x}$, $\tau(x) = \mathrm{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2)\overline{x}\,\mathrm{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1})$. ($\sigma_0$, $\tau$ は可換)
- $F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M$, $F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \simeq L_\tau \subset M$.

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1)$
  $\subset \mathfrak{su}(6)$.
- $\sigma_0(x) = \overline{x}$, $\tau(x) = \mathrm{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2)\overline{x}\,\mathrm{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1})$.
  ($\sigma_0$, $\tau$ は可換)
- $F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M$, $F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \simeq L_\tau \subset M$.

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$
  (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

## $G = SU(6) \curvearrowright F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) \subset \mathfrak{su}(6)$ の例

- $M \simeq F^{\mathbb{C}}_{2,2,2}(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Ad}(SU(6))\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(1,1,0,0,-1,-1) \subset \mathfrak{su}(6)$.
- $\sigma_0(x) = \overline{x}$, $\tau(x) = \mathrm{diag}(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2)\overline{x}\,\mathrm{diag}(\Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1}, \Omega_2^{-1})$. ($\sigma_0$, $\tau$ は可換)
- $F^{\mathbb{R}}_{2,2,2}(\mathbb{R}^6) \simeq L_{\sigma_0} \subset M$, $F^{\mathbb{H}}_{1,1,1}(\mathbb{H}^3) \simeq L_\tau \subset M$.

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau)$ の対称三対.
  - $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ : $A_2$ 型ルート系.

**Theorem 5.14.**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2\text{型ルート系}} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}.$$

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau)$ の対称三対.
  - $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ : $A_2$ 型ルート系.

**Theorem 5.14.**

$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2\text{型ルート系}} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}.$$

- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Q1:** $H \in \mathfrak{a}$ について $L_{\sigma_0^{-\exp H}}$ と $L_\tau$ は横断的に交わるか？

- $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ : $(\mathfrak{su}(6), \sigma_0, \tau)$ の対称三対.
  - $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ : $A_2$ 型ルート系.

**Theorem 5.14.**

$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}$.

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\lambda \in A_2\text{型ルート系}} \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}.$$

- $x_0 = \sqrt{-1}(1,1,0,0,-1,-1)$.
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Theorem 5.15 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.16.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $x_0 = \sqrt{-1}(1,1,0,0,-1,-1)$.
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_{\tau}$ (極大可換部分空間).

**Theorem 5.15 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^- \exp H} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.16.**

1. このとき $L_{\sigma_0^- \exp H} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $x_0 = \sqrt{-1}(1, 1, 0, 0, -1, -1)$.
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a, a, b, b, c, c) \mid a + b + c = 0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Theorem 5.15 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.16.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

- $x_0 = \sqrt{-1}(1,1,0,0,-1,-1)$.
- $\mathfrak{a} := \{\sqrt{-1}\,\mathrm{diag}(a,a,b,b,c,c) \mid a+b+c=0\} \subset \mathfrak{p}_{\sigma_0} \cap \mathfrak{p}_\tau$ (極大可換部分空間).

**Theorem 5.15 (再掲).**

$$L_{\sigma_0^{-\exp H}} \pitchfork L_\tau \iff H \in \mathfrak{a}_{reg}.$$

**Q2:** このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau$ はどのような集合か？

**Theorem 5.16.**

1. このとき $L_{\sigma_0^{-\exp H}} \cap L_\tau = \mathfrak{a} \cap L_\tau$.
2. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $M$ の対蹠集合.
3. $\mathfrak{a} \cap L_\tau$ は $\mathfrak{S}_3 \simeq W(\tilde{\Sigma})$-軌道となる.

# 今後の課題

- 可換化不可能な $\sigma$, $\tau$ について $L_\sigma \cap L_\tau$ in $M$ を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

**Fact 6.1 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

1. **コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ 内の横断的に交わる二つの **実形** $L_1, L_2$ について $M$ が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{\oplus \sharp(L_1 \cap L_2)}.$$

2. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^n$ は *Hamilton* 体積最小.

# 今後の課題

- 可換化不可能な $\sigma, \tau$ について $L_\sigma \cap L_\tau$ in $M$ を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

**Fact 6.1 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

1. コンパクト型 Hermite 対称空間 $M$ 内の横断的に交わる二つの **実形** $L_1, L_2$ について $M$ が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{\oplus\sharp(L_1 \cap L_2)}.$$

2. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^n$ は *Hamilton* 体積最小.

# 今後の課題

- 可換化不可能な $\sigma$, $\tau$ について $L_\sigma \cap L_\tau$ in $M$ を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

**Fact 6.1 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

1. コンパクト型 Hermite 対称空間 $M$ 内の横断的に交わる二つの **実形** $L_1, L_2$ について $M$ が既約なら
$$\mathrm{HF}(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{\oplus \sharp(L_1 \cap L_2)}.$$
2. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^n$ は *Hamilton* 体積最小.

# 今後の課題

- 可換化不可能な $\sigma, \tau$ について $L_\sigma \cap L_\tau$ in $M$ を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

**Fact 6.1 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

1. コンパクト型 **Hermite 対称空間** $M$ 内の横断的に交わる二つの **実形** $L_1, L_2$ について $M$ が既約なら
$$\mathrm{HF}(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{\oplus \sharp(L_1 \cap L_2)}.$$
2. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^n$ は *Hamilton* 体積最小.

# 今後の課題

- 可換化不可能な $\sigma$, $\tau$ について $L_\sigma \cap L_\tau$ in $M$ を調べられないか.
- 横断的に交わる実旗多様体の組についての Floer homology の計算.
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性.

**Fact 6.1 (井川–入江–酒井–田中–田崎の一連の研究).**

1. **コンパクト型 Hermite 対称空間** $M$ 内の横断的に交わる二つの **実形** $L_1$, $L_2$ について $M$ が既約なら

$$\mathrm{HF}(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{\oplus \sharp(L_1 \cap L_2)}.$$

2. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^n$ は *Hamilton* 体積最小.