

複素旗多様体内の二つの実形の交叉

奥田隆幸 (広島大学)*

(井川治氏[†], 入江博氏[‡], 酒井高司氏[§], 田崎博之氏[¶]との共同研究に基づく)

Abstract

コンパクト Lie 環内の随伴軌道として実現された複素旗多様体はコンパクトな等質 Kähler 多様体となる. その複素旗多様体の実形の組であって, 交叉が離散的であるようなものについて考えたい. 本稿では特定の条件を満たす実旗多様体の組が離散的に交わるための必要十分条件を対称三対の枠組みの中で与え, さらにその離散交叉は複素旗多様体上の対蹠集合となることを報告する.

1 Introduction

Kähler 多様体において, 対合的反正則等長変換の不動点集合の連結成分として与えられる部分多様体を**実形**と呼ぶ. 実形は全測地的 Lagrange 部分多様体である. ここではコンパクト等質 Kähler 多様体 M 上の実形の組 L_1, L_2 について, 以下のような問題を考えたい:

- 交叉 $L_1 \cap L_2$ が離散的であるような実形の組 (L_1, L_2) としてはどのようなものがあるか?
- 交叉 $L_1 \cap L_2$ が離散的であるとき, M の有限部分集合としてどのような集合になるか?

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

†京都工芸繊維大学: ikawa@kit.ac.jp

‡茨城大学: irie@mx.ibaraki.ac.jp

§首都大学東京: sakai-t@tmu.ac.jp

¶筑波大学: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

コンパクト等質 Kähler 多様体としてコンパクト型 Hermite 対称空間を考えた場合には, 二つの実形が離散的に交わっているとき, その交叉は対蹠集合になることが田崎 [9], 田中-田崎 [7, 8] によって示された. 特にこれを利用して入江-酒井-田崎 [6] は二つの実形に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを決定した. またこの場合, 井川-田中-田崎 [4] は二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉で記述し, 離散交叉をある種の Weyl 群の軌道として記述した.

ここではコンパクト等質 Kähler 多様体としてコンパクト Lie 環内の随伴軌道として実現された複素旗多様体を考えたい. 昨年の幾何学シンポジウムにおける酒井氏の講演で, $\mathbb{C}^n$ 内の複素部分空間の系列の成す複素旗多様体について, 実部分空間の系列の成す実形と四元数部分空間の系列の成す実形の場合に, 二つの実形の交叉が離散的であれば対蹠集合になることが報告された.

本稿では一般の複素旗多様体において, ある条件を満たす実旗多様体の組がいつ離散的に交わるかの必要十分条件を与え, 更に交叉が離散的であれば対蹠的であり, またある種の Weyl 群の軌道として記述できることを報告する.

2 複素旗多様体とその対蹠集合

以降, G を連結コンパクト半単純 Lie 群とし, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 $x_0 (\neq 0)$ を固定して考える. G の随伴表現による x_0 の軌道

$$M = \text{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

を (随伴軌道として実現された) 複素旗多様体と呼ぶ. $\mathfrak{g}$ の Killing form を B と書くことにし, M には Kirillov–Kostant–Souriau form

$$\omega_x(X, Y) := B(x, [X, Y]) \quad (x \in M \subset \mathfrak{g}, X, Y \in T_x M \subset \mathfrak{g}).$$

として closed 2-form が定義されているものとする. また $G^\mathbb{C}$ を G の複素化, $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ をその Lie 環とし, $G^\mathbb{C}$ の放物型複素 Lie 部分群 $P^\mathbb{C}$ を $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の放物型部分 Lie 環 $\bigoplus_{k \geq 0} \{y \in \mathfrak{g}^\mathbb{C} \mid [\sqrt{-1}x_0, y] = ky\}$ に対応するものとする. このとき $G^\mathbb{C}/P^\mathbb{C}$ への G の作用は推移的で, なおかつ x_0 のイソトロピー部分群 G_{x_0} が $G \cap P^\mathbb{C}$ と一致する. 特に $M \cong G/G_{x_0} \cong G^\mathbb{C}/P^\mathbb{C}$ には $G^\mathbb{C}$ 不変な複素構造が定まり, これにより M を G 等質な Kähler 多様体とみなす (随伴軌道として実現された複素旗多様体の詳しい解説としては [1] を参照).¹

¹ M の Kähler 構造から定まるリーマン計量は $(-1) \times$ the Killing form of $\mathfrak{g}$ の誘導する計量とは異なることに注意. コンパクト Hermite 対称空間の場合には両者は一致する.

一般に (随伴軌道として実現された) 複素旗多様体 M はコンパクト対称空間であるとは限らず, M 上の各点 x における点対称 $s_x : M \rightarrow M$ が必ずしもうまく定義できるとは限らない. 本稿では以下のように “点対称” の替わりになるものを準備する.

基点 $x_0 \in M$ の固定化部分群 G_{x_0} の中心を $Z(G_{x_0})$ とする. $M \subset \mathfrak{g}$ の各点 $x \in M$ と $g \in Z(G_{x_0})$ について

$$s_{x,g} : M \rightarrow M, \quad y \mapsto \text{Ad}(g_x g g_x^{-1})y$$

と定める. ただし $g_x \in G$ は $\text{Ad}(g_x)x_0 = x$ となるものとする. これにより, 各点 $x \in M$ を決めるごとに M 上に計量を保つ $Z(G_{x_0})$ -作用が定義されており, $\text{Fix}(s_x, M) := \{y \in M \mid s_{x,g}(y) = y \text{ for any } g \in Z(G_{x_0})\}$ とおけば,

$$\text{Fix}(s_x, M) = M \cap \mathfrak{g}^x$$

となることが証明できる (ただし $\mathfrak{g}^x := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$ とした). 特に x は $\text{Fix}(s_x, M)$ において孤立点となっていることも分かる.

本稿では M の対蹠集合を以下で定義する.

定義 2.1. M の部分集合 X が**対蹠的**であるとは, 任意の $x, y \in X$ と任意の $g \in Z(G_{x_0})$ について $s_{x,g}(y) = y$ である (すなわち $y \in \text{Fix}(s_x, M)$) こととする.

注意 2.2. 定義 2.1 は [5, Section 3] で与えられた定義と同値である. 特に複素旗多様体としてコンパクト型エルミート対称空間 M を考える場合には, 通常の意味での対蹠集合を考えていることに他ならない.

3 実旗多様体とそれらの交叉

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とし, (G, K) をコンパクト型対称対とする. また G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の (G, K) に対応する分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

と表す. 随伴軌道 $M = \text{Ad}(G)x_0$ と $\mathfrak{p}$ が交わるとき, M の部分多様体 $L = M \cap \mathfrak{p}$ を **実旗多様体**と呼ぶ. このとき K の単位連結成分 K^0 の随伴作用は L 上推移的であり, 特に L は連結であることが知られている. 一方で

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

とおくと, $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実形になる. $\mathfrak{g}'$ を Lie 環とする $G^{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を G' とすると, (G', K) は非コンパクト型 Riemann 対称対になる. 先に述べた同型 $M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ において, M の部分多様体 L は $G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ の部分多様体 $G'/(G' \cap P^{\mathbb{C}})$ と対応する. 特に G' に関する $G^{\mathbb{C}}$ の複素共役を σ と表すと, $P^{\mathbb{C}}$ は σ で不変であり, したがって σ は $M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ に対合的反正則等長変換 $\tilde{\sigma}$ を誘導する. σ による $G^{\mathbb{C}}$ の不動点集合の単位連結成分が G' であることから, $\tilde{\sigma}$ による M の不動点集合の原点を含む連結成分は L と一致する. よって L は M の実形となる.

以下, 複素旗多様体 $M = \text{Ad}(G)x_0$ 内の二つの実旗多様体の交叉について考える. (G, K_1, K_2) をコンパクト対称三対とする. K_i を定める G の対合を θ_i と表す. 本稿では $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ の場合を扱う. G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を二通りに標準分解し,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$$

と表す. $M = \text{Ad}(G)x_0$ が $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ とそれぞれ交わるとし, 二つの実旗多様体 $L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1$ と $L_2 = M \cap \mathfrak{p}_2$ を考える. $a \in G$ に対して交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ を考察しよう. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ 内の極大可換部分空間とし, G 内のトーラス A を $A = \exp \mathfrak{a}$ と定めると, [2] より $G = K_1AK_2$ が成り立つので, $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) として一般性を失わない. (G, K_1, K_2) の定める対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す (定義については [3] を参照). $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}_i$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ をとり, コンパクト型 Riemann 対称対 (G, K_i) の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を R_i と表す. $\tilde{\Sigma}$ と R_i の Weyl 群をそれぞれ $W(\tilde{\Sigma})$ と $W(R_i)$ で表す. 本稿の主結果は以下のものである:

定理 3.1. 上記の設定において, 二つの実旗多様体の交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ ($a = \exp H, H \in \mathfrak{a}$) が離散的になるための必要十分条件は H が $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の定める正則元になることである. また, 二つの実旗多様体の交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ が離散的のとき, これは 定義 2.1 の意味で $M = \text{Ad}(G)x_0$ の対蹠集合となる. 更に $M \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ であり, 任意の $x \in M \cap \mathfrak{a}$ に対して,

$$L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2 = M \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x = W(R_1)x \cap \mathfrak{a} = W(R_2)x \cap \mathfrak{a}$$

と表示できる.

References

- [1] Alekseevsky, D. V. *Flag manifolds*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divčibare, 1996), Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N.S.) **6** (1997), 3–35.

- [2] E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Note Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 214–245.
- [3] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.
- [4] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, Int. J. Math. **26** no. 5 (2015) 1541005 [32 pages].
- [5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, Proceedings of The Sixteenth International Workshop on Diff. Geom. **16** (2012), 97–105.
- [6] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.
- [7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** no.4 (2012), 1297–1332.
- [8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 275–291.
- [9] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.