

複素旗多様体内の実形の交叉の対蹠性と Floer ホモロジー

奥田隆幸 (広島大学)*

(井川治氏[†], 入江博氏[‡], 酒井高司氏[§], 田崎博之氏[¶]との共同研究に基づく)

Abstract

コンパクト Lie 代数内の随伴軌道として実現された複素旗多様体はコンパクトな等質 Kähler 多様体となる. 本稿では複素旗多様体が Kähler–Einstein 構造を持ち, 離散的に交わる実旗部分多様体の組 L_1, L_2 が特定の条件を満たすとき, その $\mathbb{Z}_2$ -係数 Floer ホモロジーは離散交叉 $L_1 \cap L_2$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}_2$ -加群となることを報告する.

1 Introduction

Kähler 多様体において, 対合的反正則等長変換の不動点集合の連結成分として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ. 実形は全測地的 Lagrange 部分多様体である. ここではコンパクト等質 Kähler 多様体 M 上の実形の組 L_1, L_2 について, 以下のような問題を考えたい:

- 交叉 $L_1 \cap L_2$ が離散的 ($\iff$ 横断的) であるような実形の組 (L_1, L_2) としてはどのようなものがあるか?
- 交叉 $L_1 \cap L_2$ が離散的であるとき, M の有限部分集合としてどのような集合になるか?
- (M, L_1, L_2) の Lagrangian Floer ホモロジーはどうなるか?

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

[†]京都工芸繊維大学: ikawa@kit.ac.jp

[‡]茨城大学: irie@mx.ibaraki.ac.jp

[§]首都大学東京: sakai-t@tmu.ac.jp

[¶]筑波大学: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

コンパクト等質 Kähler 多様体としてコンパクト型 Hermite 対称空間を考えた場合には, 二つの実形が離散的に交わっているとき, その交叉は対蹠集合になることが田崎 [9], 田中–田崎 [7, 8] によって示された. 特にこれを利用して入江–酒井–田崎 [6] は実形の組に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを決定した. またこの場合, 井川–田中–田崎 [4] は二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉で記述し, 離散交叉をある種の Weyl 群の軌道として記述した.

ここではコンパクト等質 Kähler 多様体として, コンパクト Lie 代数内の随伴軌道として実現された複素旗多様体を考えたい. 2015 年度の幾何学シンポジウムにおいて, 入江–酒井–田崎 [5] の結果の発展として, 複素旗多様体内のある条件を満たす実旗多様体の組が離散的に交わる必要十分条件を与え, 更に交叉が離散的であれば対蹠的であり, またある種の Weyl 群軌道として記述できることを報告した. 本報告では, 複素旗多様体 M が Kähler–Einstein 構造を持ち, 離散的に交わる実旗多様体の組 L_1, L_2 が特定の条件を満たすとき, (M, L_1, L_2) の $\mathbb{Z}_2$ -係数 Floer ホモロジーは離散交叉 $L_1 \cap L_2$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}_2$ -加群となることを報告する. この結果は上述の入江–酒井–田崎 [6] の結果の一般化となっている.

2 Kähler 構造付き複素旗多様体とその対蹠集合

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純 Lie 代数とし, $G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純 Lie 群であって, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を Lie 代数とするものとする. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の放物型部分代数の $G_{\mathbb{C}}$ -共役類 M は, $G_{\mathbb{C}}$ の等質空間として単連結な複素多様体の構造を自然に持つ. 各点 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \in M$ について, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ における $G_{\mathbb{C}}$ のイソトロピー部分群は $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ 内の解析的部分群であることに注意しておく. このような複素多様体を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の (一般化) 複素旗多様体と呼ぶ.

以下, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ を固定し, $G_{\mathbb{C}}$ 内の $\mathfrak{u}$ についての解析的部分群を U と書くことにする. $\mathfrak{u}$ の各元 x について, $\text{ad}(\sqrt{-1}x)$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の線形作用素として実対角化可能であり,

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(x) := \bigoplus_{\lambda \geq 0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\sqrt{-1}x; \lambda)$$

は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の放物型部分代数を定める. ただし $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\sqrt{-1}x; \lambda)$ は $\text{ad}(\sqrt{-1}x)$ による固有値 λ の固有空間を表すこととする. $\mathfrak{u}$ の各随伴軌道 $\mathcal{O}$ について,

$$M_{\mathcal{O}} := \{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(x) \mid x \in \mathcal{O}\}$$

とおくと, $M_{\mathcal{O}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素旗多様体となることが知られている. 逆に, 任意の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素旗多様体は上記の形で得られる. つまり上記の対応は $\{\mathfrak{u}$ 内の随伴軌道 $\}$ から $\{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素旗多様体 $\}$ への全射を定める (単射ではない). 随伴軌道 $\mathcal{O}$ には Kirillov–Kostant–Souriau 形式と呼ばれるシンプレクティック構造 ω が自然に定義され, この構造により $M_{\mathcal{O}}$ はコンパクト群 U が推移的に作用する等質 (正定値) Kähler 多様体とみなせる. これにより $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素旗多様体 M は等質 Kähler 多様体とみなせることになるが, その Kähler 構造は $M = M_{\mathcal{O}}$ となる随伴軌道 $\mathcal{O}$ の選び方に依存することに注意しておく (詳しくは [1] を参照). このように定義された等質 Kähler 多様体を, 本報告では Kähler 構造付き複素旗多様体と呼ぶことにする.

上記の対応について以下の事実が知られている.

事実 2.1 (cf. [1]). $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の任意の複素旗多様体 M について, $\mathfrak{u}$ 内の随伴軌道 $\mathcal{O}$ であって, $M = M_{\mathcal{O}}$ かつ $M_{\mathcal{O}}$ の Kähler 構造から定まる Riemann 計量 g が Einstein であるようなものが存在する (しかもそのような $\mathcal{O}$ は重み付き Dynkin 図形の言葉で分類可能である).

以下, $\mathfrak{u}$ 内の随伴軌道 $\mathcal{O}$ を固定し, 等質 Kähler 多様体 $M_{\mathcal{O}}$ について考える. U の $M_{\mathcal{O}}$ への推移的な作用について, 各点 $x \in M_{\mathcal{O}}$ のイソトロピー部分群を U^x と書くことにする. また U^x の中心 $Z(U^x)$ の単位連結部分群を $\mathbb{T}_x$ とおく. このとき $\mathbb{T}_x$ の Lie 代数は $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(x)$ の Levi 部分代数の中心の実形となる. 本報告では, $M_{\mathcal{O}}$ の対蹠部分集合の概念を以下で定義する:

定義 2.2. $M_{\mathcal{O}}$ の部分集合 X が対蹠的であるとは, 任意の $x, y \in X$ と任意の $t \in \mathbb{T}_x$ について, $t \cdot y = y$ となることとする.

注意 2.3. $M_{\mathcal{O}}$ が既約エルミート対称空間である場合には $\mathbb{T}_x$ ($x \in M_{\mathcal{O}}$) は一次元となり, x における点対称の構造は $\mathbb{T}_x$ の元として実現される. またこの場合には対蹠部分集合の概念は Chen–長野 [2] により定義された通常のもので一致する.

3 実旗部分多様体

前節と同じ設定で考える. $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非コンパクト実形とし, G を $\mathfrak{g}$ についての $G_{\mathbb{C}}$ における解析的部分群とする.

$\mathfrak{g}$ 内の放物型部分代数の G -共役類 L は, G の等質空間として多様体の構造を自然に持つ. このような多様体を $\mathfrak{g}$ 上の (一般化) 実旗多様体と呼ぶ.

$\mathfrak{g}$ 内の放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ について, その複素化 $\mathfrak{p} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内の放物型部分代数となる. この対応により, $\mathfrak{g}$ 上の実旗多様体は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素旗多様

体に埋め込まれる．このように埋め込まれた実旗多様体を，複素旗多様体の実旗部分多様体とよぶことにする．

$\mathfrak{u}$ 内の随伴軌道 $\mathcal{O}$ を固定し，ケーラー構造付き複素旗多様体 $M_{\mathcal{O}}$ について考える． $\mathfrak{u}$ 上の対合 τ を固定し， τ についての固有値 $1, -1$ についての固有空間をそれぞれ $\mathfrak{k}_{\theta}, \mathfrak{p}_{\theta}$ と書く． $\mathcal{O}_{\tau} := \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_{\theta}$ とおくと， $\mathcal{O}_{\tau}$ は連結となることが知られており（空集合になる場合もある），

$$L_{\tau} := \{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(x) \mid x \in \mathcal{O}_{\tau}\} \subset M_{\mathcal{O}}$$

は $M_{\mathcal{O}}$ の実旗部分多様体となる（ $M_{\mathcal{O}}$ 内のすべての実旗部分多様体が上記の形で得られる訳ではない）． L_{τ} に対応する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の非コンパクト実形は $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ である．このようにして得られた実旗部分多様体 L_{τ} は Kähler 多様体 $M_{\mathcal{O}}$ の実形，特に全測地的 Lagrange 部分多様体となる．

4 主結果

以下，Kähler 構造付き複素旗多様体 $M_{\mathcal{O}}$ 内の二つの実旗部分多様体の組について考える． τ_1, τ_2 を $\mathfrak{u}$ 上の対合とし，対応する実旗部分多様体をそれぞれ L_1, L_2 とする．また L_1, L_2 は共に空でないとする．本報告では L_1, L_2 が可換化可能であるとは，“ある $u \in U$ について $\text{Ad}(u) \circ \tau_1 \circ \text{Ad}(u^{-1})$ と τ_2 は可換”ということとして定義する．またこのような $u \in U$ を L_1, L_2 の可換化元と呼ぶことにする．

2015 年度の幾何学シンポジウムでは以下の定理について報告した．

定理 4.1. L_1, L_2 が可換化可能であるとする．

1. L_1 と L_2 が離散的に交わるための必要十分条件は可換化元 $u \in U$ が “ $(\mathfrak{u}, \tau_1, \tau_2)$ に対応する対称三対 (cf. 井川 [3]) に関して正則” となることである．
2. L_1 と L_2 が離散的に交わるとき，離散交叉 $L_1 \cap L_2$ は $M_{\mathcal{O}}$ 内の対蹠集合である (see Definition 2.2)．またその濃度は $(\mathfrak{u}, \tau_1, \tau_2)$ に対応する対称三対の言葉で書ける．

本報告の主結果は以下のものである：

定理 4.2. $M_{\mathcal{O}}$ が Kähler–Einstein であるとする (see Fact 2.1)．また L_1, L_2 の最小 Maslov 数は共に 3 以上であり，可換化可能かつ離散的に交わっているとす．このとき $(M_{\mathcal{O}}, L_1, L_2)$ についての $\mathbb{Z}_2$ -係数 Lagrangian Floer ホモロジーは well-defined であり，離散交叉 $L_1 \cap L_2$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}_2$ -加群となる．

系 4.3. 上記定理の設定において, $M_{\mathcal{O}}$ 内の *Lagrange* 部分多様体 L'_2 であって, L_2 と *Hamilton isotopic* であるものを考える. このとき L_1 と L'_2 が離散的に交わるなら

$$\#(L_1 \cap L'_2) \geq \#(L_1 \cap L_2).$$

References

- [1] Alekseevsky, D. V. *Flag manifolds*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divčibare, 1996), Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N.S.) **6** (1997), 3–35.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [3] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.
- [4] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, Int. J. Math. **26** no. 5 (2015) 1541005 [32 pages].
- [5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, Proceedings of The Sixteenth International Workshop on Diff. Geom. **16** (2012), 97–105.
- [6] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.
- [7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** no.4 (2012), 1297–1332.
- [8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 275–291.
- [9] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.