ラグランジュ部分多様体の交叉と
ハミルトン体積最小性問題

入江　博　(東京電機大学)*

概　要

本講演では 1990 年に Y.-G.Oh により提出された Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性問題についての全般的な解説を行う。特に、既約コンパクト型 Hermite 対称空間の 2 つの実形についての Floer ホモロジーに関する結果、Arnold-Givental 不等式の一般化、その応用として複素 2 次超曲面の中の実形として埋め込まれている球面が Hamilton 体積最小な Lagrange 部分多様体であること [13] を紹介する。また、Oh の問題の未解決部分についても触れる。

1. Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性問題

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする。ω は M 上の非退化な閉 2 次微分形式である。M の部分多様体 L は、$\omega|_L = 0$ かつ $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ をみたすとき、**Lagrange 部分多様体**という。以下、埋め込まれた閉 Lagrange 部分多様体のみを考える。シンプレクティック多様体の基本的な例として、古典力学の記述で大切な滑らかな多様体の余接束、Kähler 多様体 (M, J, ω) などがある。また、Lagrange 部分多様体の例には、余接束の零切断、Kähler 多様体の対合的反正則等長変換の固定点集合などがある。

ω の非退化性より、$X \in TM \mapsto \iota_X\omega \in T^*M$ は接束と余接束の同型を与え、M 上のベクトル場と 1 次微分形式とは 1 対 1 に対応する。また、$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega)$ となるので、$\mathcal{L}_X\omega = 0$ をみたすベクトル場と閉 1 次微分形式が対応する。

関数 $H_t(p) := H(t,p) \in C_0^\infty([0,1] \times M)$ に対して、$\iota_{X_{H_t}}\omega = dH_t$ により、時間依存するベクトル場 $\{X_{H_t}\}_{0 \le t \le 1}$ が定まる。これを Hamilton ベクトル場といい、その flow$\{\phi_t^H\}_{0 \le t \le 1}$ を Hamilton イソトピーという。M の微分同相写像 ϕ は、ある H により $\phi = \phi_1^H$ となるとき **Hamilton 微分同相写像**という。(M, ω) の Hamilton 微分同相写像の全体を $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ と表す。これは、シンプレクティック微分同相群の単位連結成分 $\mathrm{Symp}_0(M, \omega) := \{\phi \in \mathrm{Diff}_0(M) \mid \phi^*\omega = \omega\}$ の正規部分群になる。

ここで、(M, ω) に Riemann 計量を導入し、(M, J, ω) が Kähler 多様体の場合を考える。M の閉 Lagrange 部分多様体 L は、任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について

$$\mathrm{vol}(\phi L) \ge \mathrm{vol}(L)$$

が成り立つとき、**Hamilton 体積最小**であるという。定義から Hamilton 体積最小な Lagrange 部分多様体 L は Hamilton 変形の下で体積汎関数の極値を与え (**Hamilton 極小**) かつその第 2 変分が非負 (**Hamilton 安定**) である．これらの概念は Y.-G.Oh[15] [16] が導入した。Hamilton 極小な Lagrange 部分多様体の例の構成やその Hamilton 安定性については、多くの研究者による多数の論文がある。一方、Hamilton 体積最小な Lagrange 部分多様体の非自明な例の構成は、論文 [13] のほか Kleiner-Oh による $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ の

本研究は科研費 (課題番号:22740043) の助成を受けたものである。

* e-mail: hirie@im.dendai.ac.jp

場合 ([15]) と 2003 年に小野氏、酒井氏と共同で示した $S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^2$ の場合 ([12]) のみしか知られていない。

M が複素平面の場合には Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性は、$\mathbb{R}^2(\cong \mathbb{C})$ 内の単純閉曲線 c の長さとその囲む領域の面積 A に関する等周不等式 $\mathrm{length}(c)^2 \geq 4\pi A$ (等号成立は c が円の場合に限る) と等価である。したがって、Hamilton 体積最小性問題は平面の等周不等式のシンプレクティック幾何の観点からの高次元化とみなせる。本稿では、Oh により提出されたいくつかの予想と問題に焦点をあて

(1) コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の場合

(2) $\mathbb{C}P^n$ の Clifford トーラスの場合

(3) $\mathbb{C}^n$ の標準的 Lagrange トーラスの場合

について、得られている結果と未解決部分についての考察を述べる。特に、現在研究が進展している (1) の場合を詳しく説明する。

2. コンパクト型 Hermite 対称空間の実形

この節の内容は、田崎博之氏 (筑波大)、酒井高司氏 (首都大) との共同研究 [13] に基づく。

2.1. Y.-G.Oh の予想

次の予想は Oh によるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の Hamilton 安定性の研究結果及び上記の Kleiner-Oh による $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ の Hamilton 体積最小性の結果を踏まえて提出された。

予想 1 (Y.-G.Oh [15]). M を Ricci 曲率正の Kähler-Einstein 多様体とする。M の対合的な反正則等長変換の固定点集合 L を考える。このとき、L が Ricci 曲率正の Einstein 多様体ならば、L は Hamilton 体積最小である。

次は、この予想に関して得られた最初の結果である。

定理 2 ([13]). 複素 2 次超曲面の実形 S^n は Hamilton 体積最小である。

実は、n が偶数の場合にはさらに強い次の結果が知られている。

定理 3 (Gluck-Morgan-Ziller [10]). n が 4 以上の偶数のとき、$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 S^n はそのホモロジー類の中で体積最小である。

一方、$Q_n(\mathbb{C})$ の奇数次のホモロジーはどの係数体についても消えているので、n が奇数の場合には、定理 3 に相当する結果は期待できない。定理 2 は、n が奇数の場合に新しい例を与えている。

定理 2 の証明は、$Q_n(\mathbb{C})$ の実形についての Arnold-Givental 不等式 (の一般化) および積分幾何の Crofton 型の公式を組み合わせることで得られる。単純閉曲線の等周不等式以外に、今のところ Hamilton 体積最小性の証明が成功している例は、基本的にすべてこの方法で得られている。

以下、$Q_n(\mathbb{C})$ の実形の場合にこの 2 つの道具を説明する。

2.2. Arnold-Givental 不等式の一般化（実形の場合）

まず、シンプレクティック幾何の基本的な予想の一つである Arnold-Givental 予想から始める。

予想 4 (Arnold-Givental)**.** (M,ω) をシンプレクティック多様体、L を M の反シンプレクティックな対合による固定点集合とする。L は空でなくコンパクトであると仮定する[1]。このとき、L と ϕL が横断的に交わるような M の任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ について、不等式

$$\#(L \cap \phi L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。$SB(L,\mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の和を表す。 □

この予想は、Hofer, Givental, Y.-G.Oh 等の貢献の後に、深谷-Oh-太田-小野 [9] によりかなり一般的な設定の下で証明されている。ここでは、後の話に必要な Oh による結果を紹介する。

定理 5 (Oh [19])**.** (M, J_0, ω) を既約な[2]コンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の対合的反正則等長変換の固定点集合 L について Arnold-Givental 予想は正しい。

Arnold-Givental 予想は、Lagrange 部分多様体 L とその Hamilton 微分同相写像による像 ϕL との交点数の評価に関するものだが、これを拡張して Lagrange 部分多様体 L_0 とそれと Hamilton 同位とは限らない Lagrange 部分多様体 L_1 に関して交叉 $L_0 \cap \phi L_1$ を考察することは自然な問題である。定理 5 を導く際に用いる Floer ホモロジーの理論はこの場合も扱えるように構成されている。ところが、L_0 と L_1 が Hamilton 同位でない場合の具体的な計算の研究が始まったのは比較的最近である。

M がトーリック多様体の場合には、次の結果がある。

定理 6 (Alston [1])**.** 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, J_0, \omega_{FS})$ の 2 つの Lagrange 部分多様体である実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と Clifford トーラス T^n を考える。$n = 2k-1$ とする。このとき、$\mathbb{R}P^n$ と ϕT^n が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について

$$\#(\mathbb{R}P^n \cap \phi T^n) \geq 2^k$$

が成り立つ。ここで、$T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = \cdots = |z_n|\}$ である。

この結果は Alston-Amorim [2] により拡張され、$n = 2k$ の場合の交点数の評価やトーリック Fano 多様体への一般化が得られている。一方、我々はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対に着目する。(M, J_0, ω) をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の部分多様体 L は、ある対合的反正則等長変換 $\sigma : M \to M$ が存在して

$$L = \mathrm{Fix}(\sigma) := \{x \in M \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つとき、M の**実形**と呼ばれる。実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。M の正則等長変換の単位連結成分を $I_0(M)$ と表す。ここでは M の 2 つの部分集合 A と B が**合同である**とは、ある $g \in I_0(M)$ が存在して、$B = gA$ をみたすこととする。$I_0(M) \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ である。M の実形 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ の正則等長変換 g による像 $gL = \mathrm{Fix}(g\sigma g^{-1})$ も M の実形である。

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は、任意の 2 点 $x, y \in S$ に対して $s_x y = y$ が成り立つとき**対蹠集合**といい、Chen-長

---

[1] L は、空集合でなければ Lagrange 部分多様体になる。

[2] [9] により、既約性の仮定は不要になった。

野 [6] により導入された。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい、$\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。例えば、球面 S^2 上の対蹠する 2 点 (北極と南極) は S^2 の大対蹠集合であり、$\#_2 S^2 = 2$ となる。竹内 [21] は、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形を分類し、それらは対称 R 空間であることを証明した。また、L が対称 R 空間ならば $\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ ([22])。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L については、$\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ。

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の 2 つの実形 L_0, L_1 が横断的に交わるならば、田中-田崎 [23] により $L_0 \cap L_1$ は M の対蹠集合であることが知られている。これを用いると、対 (L_0, L_1) の Floer ホモロジーを具体的に計算することができる。

定理 7 ([13])**.** (M, J_0, ω) を**単調な**[3] コンパクト型 Hermite 対称空間とする。L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形で、最小 Maslov 数はともに 3 以上とすると、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ。

とくに、M が既約の場合には最小 Maslov 数についての仮定は自動的にみたされ[4]、田中-田崎 [23, Section 5] の結果を用いてより詳しい情報がわかる。

定理 8. M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形とする。このとき、

(1) $M = G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$ であり、L_0 は $G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

ここで、$2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_0 < 2^{2m} = \#_2 L_1$ である。

(2) それ以外の場合は

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}}.$$

前述の竹内の結果と $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の Hamilton 同位に関する不変性より、

系 9 (一般化された Arnold-Givental 不等式)**.** 定理 8 の仮定の下で、L_0 と ϕL_1 が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について、

(1) $M = G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$ であり、L_0 は $G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2^m.$$

(2) それ以外の場合は

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\}. \tag{2.1}$$

[3] 定理 7 の設定では、この条件は Kähler-Einstein と同値。
[4] $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ の場合のみ最小 Maslov 数が 2 になるが、この場合は別個に扱える。

(2.1) は既約コンパクト型 Hermite 対称空間の Arnold-Givental 不等式 (定理 5) の一般化である。ここで、(1) の場合は例外的な現象ではない。M が既約でない場合、(2.1) が成立しない対 (L_0, L_1) はいくらでも構成できる ([13, §5])。また、定理 7, 8 は [17, §6] の一つの問題の解答になっている。

例 10. 下の表は、既約の場合 (定理 8) の L_0 と L_1 が合同でないときの適用結果である。

M	L_0	L_1	$\#(L_0 \cap \phi L_1)$ の最小値
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$	$2k+2$
$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$	$\binom{m+q}{q}$
$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$	2^n
$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$	$G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$	2^m
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$	2^m
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$	2^m
$E_6/T \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$	3
$E_7/T \cdot E_6$	$T \cdot (E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$	8

ここで、$Q_n(\mathbb{C}) = SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$ は複素 n 次元の複素 2 次超曲面を表し、$S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ である。また、$k \leq l$ としている。

2.3. 単調 Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジー

ここで、Y.-G.Oh による単調な Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーの構成 [17] を説明する。(M, ω) を閉シンプレクティック多様体、L_0 および L_1 を Hamilton 同位とは限らない (したがって合同とは限らない) M の Lagrange 部分多様体とし、これらは横断的に交わると仮定する。このとき、交叉 $L_0 \cap L_1$ の各要素を生成元とする自由 $\mathbb{Z}_2$-加群を $CF(L_0, L_1)$ と表す。

(M, ω) 上の概複素構造 J がシンプレクティック構造 ω と整合的 (compatible) であるとは、$\omega(JV, JW) = \omega(V, W)$ かつ $\omega(V, JV) > 0$ が任意の 0 でないベクトル $V, W \in T_pM$ $(\forall p \in M)$ に対して成り立つことをいう。このとき、$g(V, W) = \omega(V, JW)$ は M 上の Hermite 計量を定める。M 上のシンプレクティック構造 ω と整合的な概複素構造の 1 パラメータ族 $J = \{J_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ をとる。J-holomorphic strip とは、写像

$$u : \mathbb{R} \times [0, 1] \to M$$

で、条件

$$\begin{cases} \bar{\partial}_J u := \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot, 0) \in L_0, \ u(\cdot, 1) \in L_1, \\ u(-\infty, \cdot) \in L_0 \cap L_1, \ u(+\infty, \cdot) \in L_0 \cap L_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

をみたすものである。ここで、$\mathbb{R} \times [0, 1]$ は $s + \sqrt{-1}t$ を座標系とする $\mathbb{C}$ の部分集合とみなしている。方程式 $\bar{\partial}_J u = 0$ の解で (2.2) の 2 行目の境界条件をみたしているものについて、3 行目の漸近条件をみたすことと u のエネルギー

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) dsdt$$

が有限であることは同値である。

交点 $p \in L_0 \cap L_1$ と $q \in L_0 \cap L_1$ をつなぐ J-holomorphic strip 全体の空間を $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ と表す。さらに、

$$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1) := \bigcup_{p,q \in L_0 \cap L_1} \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$$

とおく。概複素構造の 1 パラメータ族 J は、それが定める非線形 Cauchy-Riemann 作用素 $\bar{\partial}_J$ の線形化 $D_u\bar{\partial}_J$ がすべての $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ について全射であるとき、regular であるという。regular な J について、各 $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ は有限次元の滑らかな多様体になる。regular な概複素構造全体の集合を $\mathcal{J}^{reg}$ と表す。集合 $\mathcal{J}^{reg}$ は、概複素構造の 1 パラメータ族の全体の集合 $\mathcal{J}$ の中の第 2 類集合である。今後、特に断らない限り $J \in \mathcal{J}^{reg}$ を仮定する。J-holomorphic strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ について $\dim(T_u\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)) = \mathrm{Index}(D_u\bar{\partial}_J)$ が成り立つ。ここで、右辺は線形化作用素 $D_u\bar{\partial}_J$ の Fredholm 指数を表す。この数はさらに u の Maslov 指数 $\mu(u)$ と等しいことが知られている。

J-holomorphic strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ に対し、$u(\cdot + s_0, \cdot)$ も任意の $s_0 \in \mathbb{R}$ について $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1; p, q)$ の要素になるので、$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 \colon p, q)$ は自由な $\mathbb{R}$-作用をもつ。そこで、この作用で割ったモジュライ空間

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)/\mathbb{R}, \\ \mathcal{M}_J(L_0, L_1) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)/\mathbb{R} \end{aligned}$$

を定義する。J-holomorphic strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ でその同値類 $[u]$ が $\mathcal{M}_J(L_0, L_1)$ の 0 次元連結成分の一つであるとき、u あるいはその同値類 $[u]$ は isolated trajectory と呼ばれる。以上の準備の下で、境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ を

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

$(p \in L_0 \cap L_1)$ により定義する。ここで、$n(p, q)$ は $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ 内の isolated trajectory の個数を mod-2 で数えたものである。このとき、$\partial \circ \partial = 0$ が示せれば、Floer チェイン複体 $(CF(L_0, L_1), \partial)$ が構成され、商加群

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

が定義できる。これを Lagrange 部分多様体の $\mathbb{Z}_2$ 係数の **Floer ホモロジー群**という。

Floer [8] は、$\pi_2(M, L_0) = 0$ でかつ L_1 が L_0 と Hamilton 同位の場合に $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を構成し、その後、Oh [17] により L_0 と L_1 が単調の場合に拡張された。コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の場合には、この Oh の理論が必要である。

シンプレクティック多様体 (M, ω) の閉 Lagrange 部分多様体 L について、2 つの準同型

$$I_{\mu,L} : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}, \quad I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$$

を次のように定義する。$I_{\mu,L}$ は、各写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ に対して、単位円盤 D^2 上のシンプレクティックベクトル束 w^*TM と $\partial D^2 \cong S^1$ 上の Lagrange 部分ベクト

ル束 $(w|\partial D^2)^*TL$ との対 $(w^*TM,(w|\partial D^2)^*TL)$ の Maslov 指数 $I_{\mu,L}(w)$ を対応させる写像とする。I_ω は $I_\omega(w)=\int_{D^2}w^*\omega$ で定義する。閉 Lagrange 部分多様体 L は、ある定数 $\alpha>0$ が存在して $I_\omega=\alpha I_{\mu,L}$ が成り立つとき、**単調** (monotone) [5] であるという。単調な閉 Lagrange 部分多様体 L について、部分群 $\mathrm{im}(I_{\mu,L})\subset\mathbb{Z}$ の正の生成元を Σ_L と表し、L の**最小 Maslov 数** (minimal Maslov number) と呼ぶ。次が Oh の結果である。

定理 11 ([17] Theorems 4.4, 5.1)**.** (L_0,L_1) を (Hamilton 同位とは限らない) 単調な閉 Lagrange 部分多様体の対で、横断的に交わっているとする。$\Sigma_{L_i}\geq 3$ $(i=0,1)$ および、$\mathrm{im}(\pi_1(L_i))\subset\pi_1(M)$ は少なくとも一方の L_i でねじれ部分群になっていると仮定する [6]。このとき、稠密な部分集合 $\mathcal{J}'\subset\mathcal{J}^{reg}$ が存在し、$J\in\mathcal{J}'$ に対して、

(1) ∂ は well-defined である。

(2) $\partial^2=0.$

(3) $HF(L_0,L_1:\mathbb{Z}_2)$ は $J\in\mathcal{J}'$ の取り方によらず、Hamilton 同位の下で不変である。

2.4. Floer ホモロジーの計算

以下、定理 7 を証明する。(M,J_0,ω) を単調なコンパクト型 Hermite 対称空間とする。ここで、J_0 は M の標準的な複素構造、ω は標準的な Kähler 型式である。L_0,L_1 を横断的に交わる M の 2 つの実形で、最小 Maslov 数はともに 3 以上とする。定理 11 の (3) により、Floer ホモロジー群 $HF(L_0,L_1:\mathbb{Z}_2)$ は $\mathcal{J}'$ に属する概複素構造の取り方によらないが、その計算を標準的な複素構造 J_0 で行えることを保障するのが次の結果である。

定理 12 (Regularity [20])**.** (M,J,ω) を Kähler 多様体で、非負な正則双断面曲率 (holomorphic bisectional curvature) をもつとする。L_0,L_1 を M の全測地的な閉 Lagrange 部分多様体で、横断的に交わっているとする。このとき、J は *regular* すなわち、線形化作用素 $D\bar\partial_J(u)$ は任意の $u\in\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1)$ に対して全射である。

命題 13. 定理 12 の仮定に加え、L_0,L_1 は単調で $\Sigma_{L_0},\Sigma_{L_1}\geq 3$ とする。このとき、$\mathcal{M}_J(L_0,L_1)$ の 0 次元部分はコンパクトで、$\mathcal{M}_J(L_0,L_1)$ の 1 次元部分は 2 つの isolated trajectories への分裂を付け加えることによりコンパクト化できる。よって、$\partial_J^2=0$ である。

証明 $(L,\phi(L))$ の場合の証明は [19, Proposition 4.5] にある。(L_0,L_1) に対しては、定理 12 を用いてこの証明をたどればよい。 □

以下、$J=J_0$ とする。

補題 14. M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0,L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形とする。任意の $p\in L_0\cap L_1$ に対して [7]、M の p における点対称 s_p は正則等長変換になり、次の性質を持つ。

$$s_p(L_0)=L_0,\quad s_p(L_1)=L_1,\quad s_p(q)=q\quad(q\in L_0\cap L_1).$$

証明 M の実形は全測地的部分多様体だから、$L_i=\mathrm{Exp}_p(T_pL_i)$ $(i=0,1)$ が成り立つ。さらに $(ds_p)_p=-1$ より

$$s_p(L_i)=\mathrm{Exp}_p((ds_p)_pT_pL_i)=\mathrm{Exp}_p(T_pL_i)=L_i$$

[5] Floer の条件 $\pi_2(M,L)=0$ は、$\alpha=0$ の場合に含まれる。

[6] コンパクト型 Hermite 対称空間 M は単連結であるから、この条件は自動的にみたされる。

[7] [24] の Lemma 3.1 により $L_0\cap L_1$ は空ではない。

を得る。田中-田崎 [23] の Theorem 1.1 より $L_0 \cap L_1$ は対蹠集合になり、任意の $x, y \in L_0 \cap L_1$ に対して $s_x y = y$ が成り立つ。よって、とくに

$$s_p(q) = q \quad (q \in L_0 \cap L_1)$$

が成り立つ。 □

以上の準備の下で、Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算する。仮定より、交叉 $L_0 \cap L_1$ は有限個の点であるので、この中から任意に 2 点 p, q を選ぶ。M の p における点対称 s_p は $s_p^2 = \mathrm{id_M}$ をみたす。また、補題 14 より、2 点 p, q は s_p-作用の固定点である。u を $\tilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ に属する J_0-holomorphic strip とする。これは境界条件

$$u(s,0) \in L_0,\ u(s,1) \in L_1,\ u(-\infty, t) = p,\ u(+\infty, t) = q$$

をみたす。この u に対して、もう一つの正則写像 $\bar{u} : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ を

$$\bar{u}(s,t) := s_p(u(s,t))$$

により定義する。補題 14 により、実形 L_0, L_1 は s_p-作用で不変であるから、$\bar{u}$ は

$$\bar{u}(s,0) = s_p(u(s,0)) \in L_0,\ \bar{u}(s,1) = s_p(u(s,1)) \in L_1$$

および

$$\bar{u}(-\infty,t) = s_p(u(-\infty,t)) = s_p(p) = p,\ \bar{u}(+\infty,t) = s_p(u(+\infty,t)) = s_p(q) = q$$

をみたし $\tilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ の要素となる。さらに、点対称 s_p の性質より $s_p \circ \bar{u} = u$ および $[\bar{u}] \neq [u] \in \mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ であることがわかるので、モジュライ空間 $\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ は s_p により誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$-作用をもつ。とくに、$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ の 0 次元部分は偶数個の要素をもつ。ゆえに、

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q = 0$$

が成り立つ。これは、任意の元 $p \in L_0 \cap L_1$ が Floer サイクルであり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元であることを示している。

2.5. 複素 2 次超曲面の実形の Hamilton 変形の下での体積の評価

定理 2 の証明を行う。複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形は分類されており、$S^{k,n-k} := (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ $(k = 0, 1, \ldots, [n/2])$ のいずれかと合同である ([21])。

任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega)$ に対して、$S^{0,n}$ と $\phi S^{k,n-k}$ が横断的に交われば、一般化された Arnold-Givental 不等式 (2.1) より

$$\#(S^{0,n} \cap \phi S^{k,n-k}) \geq \min\{SB(S^{0,n}, \mathbb{Z}_2), SB(S^{k,n-k}, \mathbb{Z}_2)\} = 2 \tag{2.3}$$

が成り立つ。また、Lê Hông Vân により次の Crofton 型の公式が知られている。

定理 15 (Le [14]). 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \cong \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の実 n 次元部分多様体 N に対して

$$\int_{SO(n+2)} \#(gS^n \cap N) d\mu_{SO(n+2)}(g) \leq 2 \frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^n)} \mathrm{vol}(N) \tag{2.4}$$

が成り立つ。

証明　[25] の定理 4.4.2 を参照。 □

ここで、$N = \phi S^{k,n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, [n/2])$ とおくと、(2.4), (2.3) より

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\phi S^{k,n-k}) &\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))} \int_{SO(n+2)} \#(gS^n \cap \phi S^{k,n-k}) d\mu_{SO(n+2)}(g) \\ &\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))} \int_{SO(n+2)} 2 d\mu_{SO(n+2)}(g) \\ &= \mathrm{vol}(S^n) \end{aligned}$$

が成立する。この式は $Q_n(\mathbb{C})$ のすべての実形の Hamilton 変形下での体積の下限を与えている。特に、$k = 0$ とおけば、実形 $S^n = S^{0,n}$ が Hamilton 体積最小であることがわかる。

3. $\mathbb{C}P^n$ の Clifford トーラス

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の実形 $\mathbb{R}P^n$ は Lagrange 部分多様体であると同時に、微分幾何的には全測地的である。$\mathbb{C}P^n$ の全測地的な Lagrange 部分多様体は $\mathbb{R}P^n$ に合同なものしかないので、次に考えるものとして極小 Lagrange 部分多様体のクラスがある。$\mathbb{C}P^n$ の実形以外の極小 Lagrange 部分多様体で最も典型的なものは Clifford トーラス

$$T^n = \{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = |z_1| = \cdots = |z_n|\}$$

である。この節では、Oh [15] の問題「Clifford トーラス $T^n \subset \mathbb{C}P^n$ は Hamilton 体積最小であるか？」を考察する。この問題は未解決である。

3.1. Clifford トーラスの Lagrange 交叉と体積評価

Clifford トーラス $T^n \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ はシンプレクティック幾何の観点からも重要である。Lagrange 交叉について次の結果がある。

定理 16 (Cho [7]). 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ の Clifford トーラス T^n を考える。T^n と ϕT^n が横断的に交わるような任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について

$$\#(T^n \cap \phi T^n) \geq 2^n = SB(T^n, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。

$\mathbb{C}P^n$ の Lagrange 部分多様体についても Crofton 型公式が知られている。この場合は次のように等式で与えられる。

定理 17 (Howard [11]). $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}, J_0)$ の 2 つの Lagrange 部分多様体 L, N について、

$$\int_{U(n+1)} \#(L \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g) = \frac{(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}P^n)^2} \mathrm{vol}(L)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。

定理 16 と 17 により、任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について、

$$\mathrm{vol}(\phi T^n) \geq \frac{2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}P^n)^2}{(n+1)\mathrm{vol}(T^n)}$$

という評価を得るが、T^n が Hamilton 体積最小になることまでは言えない。

$\mathbb{R}P^n$ と T^n を含む $\mathbb{C}P^n$ の極小 Lagrange 部分多様体の性質のよいクラスとして第 2 基本形式が平行な Lagrange 部分多様体がある。その Hamilton 安定性については [3] で研究されている。大仁田義裕氏により提出されている次の問題は、Oh の問題の自然な一般化である。

問題 18 (大仁田 [3]). 複素射影空間の第 2 基本形式が平行な Lagrange 部分多様体は Hamilton 体積最小であるか？

4. $\mathbb{C}^n$ の直積 Lagrange トーラス

標準的なシンプレクティック構造 ω_0 をもつ $\mathbb{C}^n$ の直積 Lagrange トーラス $T(b_1, \ldots, b_n) := S^1(b_1) \times \cdots \times S^1(b_n)$ を考える。ここで、$S^1(b)$ は $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ の面積 b の disc の境界を表す。$T(b_1, \ldots, b_n) \subset \mathbb{C}^n$ は Hamilton 極小かつ Hamilton 安定である ([16])。

4.1. Oh の予想

次の予想は、等周不等式の自然な高次元化である。

予想 19 (Oh [16]). 複素 Euclid 空間 $(\mathbb{C}^n, \omega_0, J_0)$ の直積 Lagrange トーラス $T(b_1, \ldots, b_n)$ は Hamilton 体積最小である。

4.2. Chekanov の定理

$(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ の Lagrange 部分多様体 L, L' について、ある $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ が存在して $\phi(L) = L'$ となるとき、L と L' は Hamilton 同位であるという。直積 Lagrange トーラス $L = T(b_1, \ldots, b_n)$ について、3 つの不変量

$$s(L) := \min_i(b_i), \quad m_s(L) := \#\{i \mid b_i = s(L)\},$$
$$\Gamma(L) := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(b_1 - s(L), \ldots, b_n - s(L)) \subset \mathbb{Z}$$

を定義する。

定理 20 (Chekanov [5]). $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ の直積 Lagrange トーラス L, L' について、L と L' が Hamilton 同位であるための必要十分条件は、

$$s(L) = s(L'), \quad m_s(L) = m_s(L'), \quad \Gamma(L) = \Gamma(L')$$

が成り立つことである。

Chekanov の定理を利用すると、Oh の予想に反例があることがわかる。ここでは、$\mathbb{C}^3$ の場合にこれを説明し、Oh の予想を修正する。$\mathbb{C}^3$ の直積 Lagrange トーラス $T(b_1, b_2, b_3)$ を考える。以下、$b_1 = 1,\ 1 \le b_2 \le b_3$ と正規化し、さらに $b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ の場合を考察する。

$1 < b_2 < b_3$ のときを考えると、$L := T(1, b_2, b_3)$ について

$$s(L) = 1, \quad m_s(L) = 1, \quad \Gamma(L) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(b_2 - 1, b_3 - 1)$$

となる。ここで、$b_2 - 1$ と $b_3 - 1$ が互いに素ならば、$\Gamma(L) = \mathbb{Z}$ となる。よって、$L = T(1, b_2, b_3)$ と表される直積トーラスで、$1 < b_2 < b_3$ かつ $b_2 - 1$ と $b_3 - 1$ が互いに素であるものは Hamilton 同位である。例えば、

$$T(1,2,3),\ T(1,2,5),\ T(1,3,4),\ \ldots$$

などは互いにHamilton同位である。この系列は$T(1,2,2)$ともHamilton同位であり、この系列内では$T(1,2,2)$の体積が一番小さい。したがって、

命題 21. $\mathbb{C}^3$の直積Lagrangeトーラス$L=T(1,b_2,b_3)$において、b_2,b_3が1より大きい整数でかつb_2-1とb_3-1が互いに素ならば、LはHamilton体積最小ではない。

したがって、$L=T(1,b_2,b_3),\ b_2,b_3\in\mathbb{Z},\ 1\le b_2<b_3$の場合、Ohの予想は次のように修正される。

予想 22. $\mathbb{C}^3$の直積Lagrangeトーラス$T(1,2,2)$および$T(1,1,n), n\in\mathbb{N},$はHamilton体積最小である。

$\mathbb{C}^2$の場合には同じ方法でOhの予想の反例を構成することはできない。Ohの予想について$T(b_1,b_1)$の場合にいくつかの関連する研究があるが、まだ解決には至っていないようである。

参考文献

[1] G. Alston, *Lagrangian Floer homology of the Clifford torus and real projective space in odd dimensions*, arXiv:0902.0197v2.

[2] G. Alston and L. Amorim *Floer cohomology of torus fibers and real Lagrangians in Fano toric manifolds*, arXiv:1003.3651v1.

[3] A. Amarzaya and Y. Ohnita *Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex projective spaces*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 583–610.

[4] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.

[5] Yu. V. Chekanov, *Lagrangian tori in a symplectic vector space and global symplectomorphisms*, Math. Z. **223** (1996), 547–559.

[6] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[7] C. H. Cho, *Holomorphic discs, spin structures, and Floer cohomology of the Clifford torus*, Int. Math. Res. Not. **35** (2004), 1803-1843.

[8] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differ. Geom. **28** (1988), 513–547.

[9] K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory of Lagrangian submanifolds over* $\mathbb{Z}$, preprint.

[10] H. Gluck, F. Morgan and W. Ziller, *Calibrated geometries in Grassmann manifolds*, Comm. Math. Helv. **64** (1989), 256–268.

[11] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian Homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993)

[12] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, *Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in* $S^2\times S^2$, Proc. Japan Acad. **79** Ser. A (2003), 167–170.

[13] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, arXiv:1108.0260.

[14] Lê Hông Vân, *Application of integral geometry to minimal surfaces*, Int. J. Math. **4** (1993), 89–111.

[15] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501-519.

[16] Y.-G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z. **212** (1993), 175-192.

[17] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[18] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, II:* $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}P^n)$, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 995–1012.

[19] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[20] Y.-G. Oh, *Fredholm-Regularity of Floer's Holomorphic Trajectories on Kähler Manifolds*, Kyungpook Math. J. **37** (1997), 153–164.

[21] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 293–314.

[22] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[23] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, to appear in J. Math. Soc. of Japan.

[24] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.

[25] 田崎博之, 積分幾何学, 上智大学数学講究録 no. 37 (1994)