2012年3月26日　日本数学会幾何学分科会特別講演

ラグランジュ部分多様体の交叉とハミルトン体積最小性問題

入江　博　(東京電機大学)

1　概要

Lagrange部分多様体のHamilton体積最小性問題(1990年頃, Y.-G.Oh)の全般的な解説

- 平面上の閉曲線についての等周不等式の高次元化の一つ

(1) コンパクト型Hermite対称空間の実形の場合 [進展中]

(2) $\mathbb{C}P^n$のCliffordトーラス [未解決]

(3) $\mathbb{C}^n$の標準的Lagrangeトーラス [未解決]

2　定義と問題

Definition.

(M^{2n}, ω) : **シンプレクティック多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega \in \Omega^2(M),\ d\omega = 0,\ \omega$: **非退化**.

Definition.

$L \subset (M, \omega)$: Lagrange**部分多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim L = \frac{1}{2} \dim M,\ \omega|_L = 0.$

Example.

(M, ω, J) : **コンパクト**Kähler**多様体**

$\sigma : M$ **の対合的な反正則等長変換** $\Rightarrow L = \mathrm{Fix}\ \sigma$

とくに,

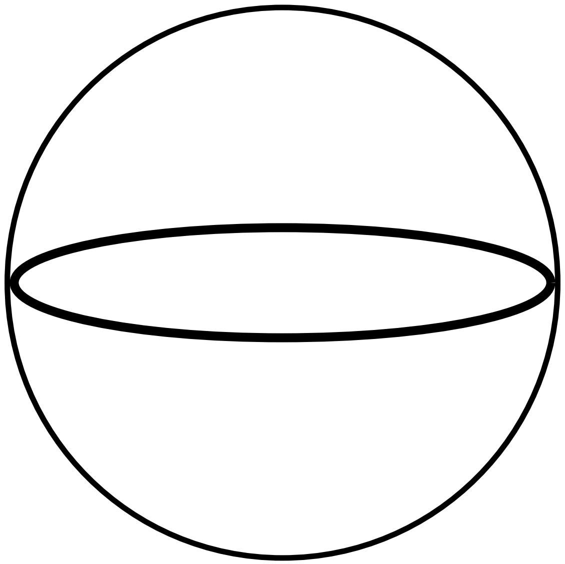
(M, ω, J_0) : コンパクト型Hermite対称空間

$\sigma : M$ の対合的な反正則等長変換

$L = \mathrm{Fix}\ \sigma$ ($\Rightarrow$ 全測地的Lagrange部分多様体)

実形

- $L \subset S^2 = \mathbb{C}P^1$: 大円



Hamilton微分同相写像

(M, ω) : シンプレクティック多様体

- $H \in C_0^\infty([0,1] \times M)$

$\longrightarrow \quad \omega(X_t, \cdot) = dH_t \quad \longrightarrow \quad \{\phi_H^t\} : X_t$ の flow

$\longrightarrow \quad \phi_H^1$: **Hamilton微分同相写像**

- $\mathrm{Ham}(M, \omega) := \{\phi_H^1 \mid H \in C_0^\infty([0,1] \times M)\}$

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega = \iota_{X_t} d\omega + d(\iota_{X_t}\omega) = 0.$$

- $\mathrm{Ham}(M, \omega) \subset \mathrm{Symp}_0(M, \omega)$

※コンパクト型Hermite対称空間 M では,「$=$」

Definition (Y.-G. Oh, 1990).

(M, ω, J) : Kähler**多様体**

$L \subset M$: **閉**Lagrange**部分多様体**

- L : **Hamilton体積最小**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \mathrm{vol}(\phi L) \geq \mathrm{vol}(L)$$

が任意の$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$**について成り立つ**.

- L : **Hamilton体積最小**

$\Longrightarrow$ L : Hamilton**極小かつ**Hamilton**安定**.

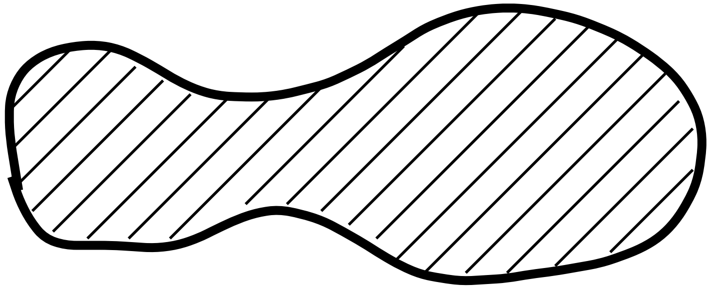
Example.

$M = (\mathbb{C}, dx \wedge dy, J_0)$, $L = S^1(r)$: **円**

$\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}, dx \wedge dy) \Longleftrightarrow \phi$: **面積保存**

$S^1(r)$: Hamilton **体積最小**

$$\Longleftrightarrow \mathrm{vol}(\phi S^1(r)) \geq \mathrm{vol}(S^1(r)).$$



l : **周の長さ**

A : **面積** $(= \pi r^2)$

$$\Longleftrightarrow \quad l \geq 2\pi r.$$

$$\Longleftrightarrow \quad l^2 - 4\pi A \geq 0.$$ **(等周不等式)**

Example.
$(S^2 = \mathbb{C}P^1, \omega_{FS}, J_0)$ **の大円** $L = \mathbb{R}P^1$ **は**
Hamilton **体積最小**.

Theorem 1 (Kleiner-Oh, 1990)
$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ **は** Hamilton **体積最小**.

- **証明のアイデア**

Arnold-Givental **不等式** ＋ Crofton **型公式**
(積分幾何)

Conjecture (Oh, 1990).

M : Ric > 0 の Kähler-Einstein 多様体

σ : 対合的な反正則等長変換

$L = \mathrm{Fix}\ \sigma$

L : Ric > 0 の Einstein 多様体, と仮定

$\Longrightarrow L$ は Hamilton 体積最小.

主結果 (酒井-田崎- I., 2011)

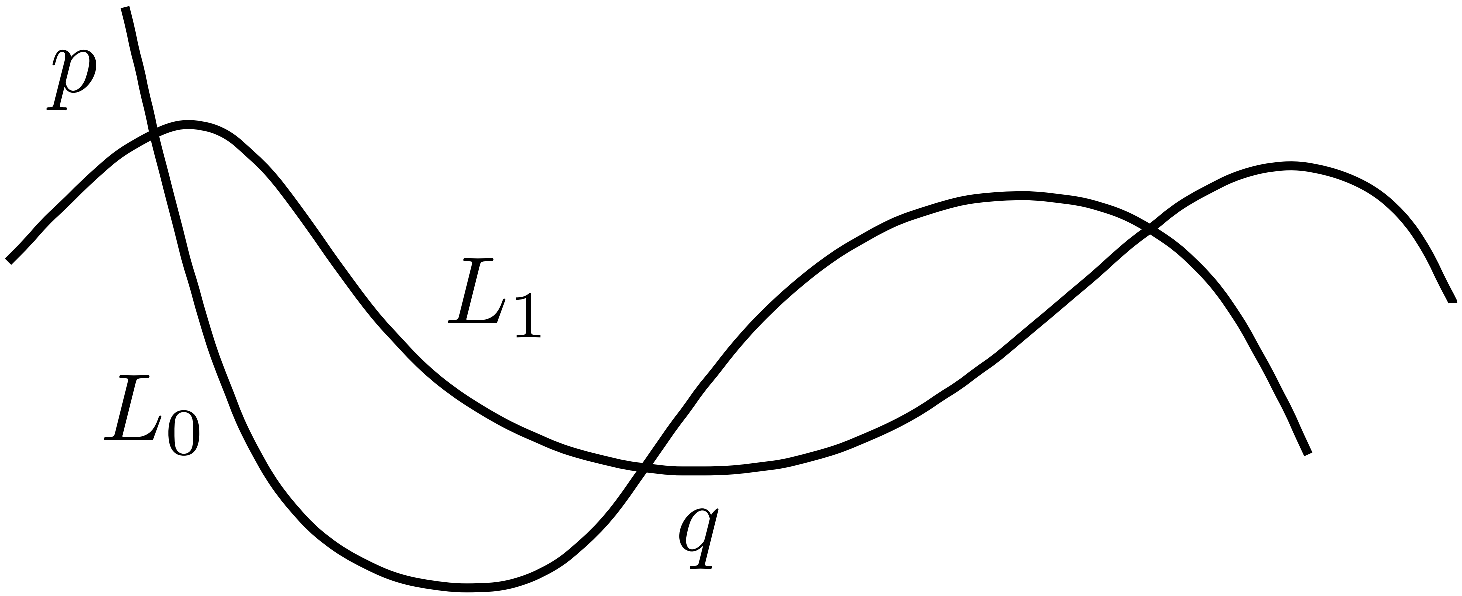
複素 2 **次超曲面** $M = Q_n(\mathbb{C})$ **の実形** $L = S^n$ **は** Hamilton **体積最小**.

3　Floer ホモロジー

(M, ω) : 閉シンプレクティック多様体

$J_t : \omega$ と compatible な概複素構造

L_0, L_1 : 閉 Lagrange 部分多様体, $L_0 \pitchfork L_1$

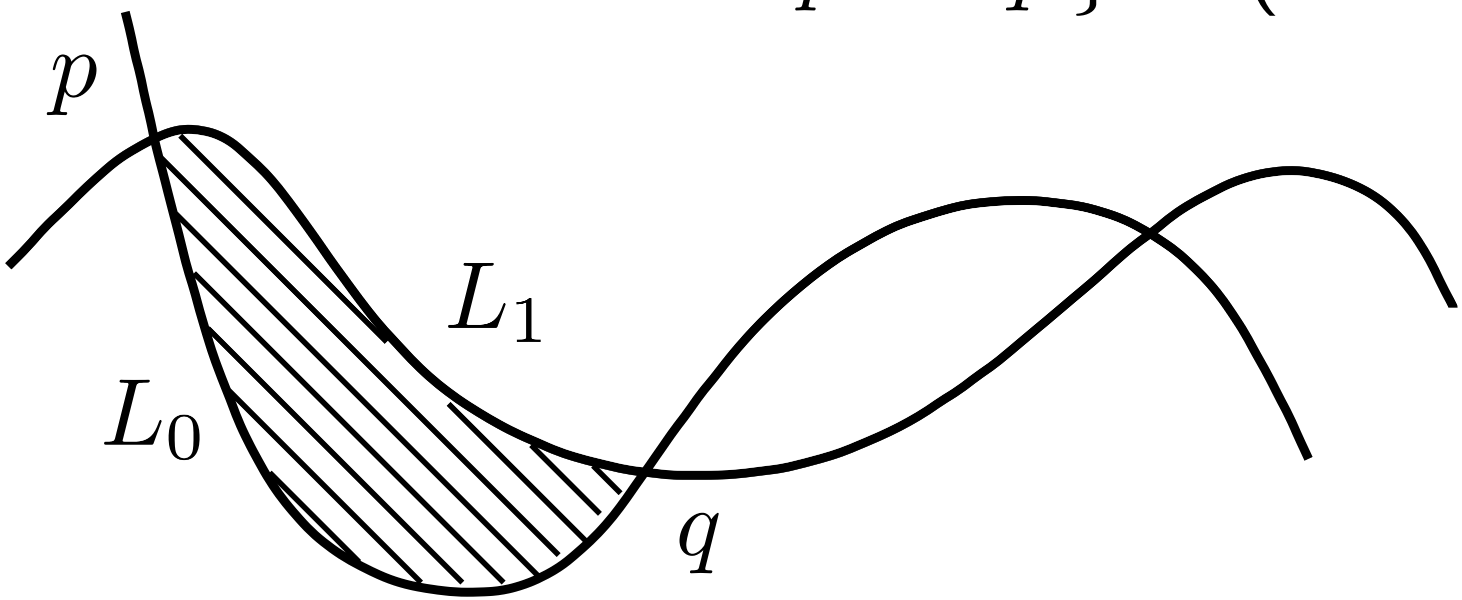


$CF(L_0, L_1)$: $L_0 \cap L_1$ で生成される自由 $\mathbb{Z}_2$-加群

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

$n(p,q) :=$ #{ isolated J-**holomorphic strip** from p to q } (mod 2)



- $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot,0) \in L_0,\ u(\cdot,1) \in L_1, \\ u(-\infty,\cdot) = p,\ u(+\infty,\cdot) = q. \end{cases}$$

- $\partial^2 = 0 \implies HF(L_0, L_1) := \ker \partial / \mathrm{im} \partial$

Lagrange部分多様体の対(L_0, L_1)の$\mathbb{Z}_2$係数 Floerホモロジー

$L \subset M$: 閉Lagrange部分多様体

- $I_\mu : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$: Maslov指数
- $I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$,

$I_\omega([u]) := \int_{D^2} u^*\omega$ for $u : D^2 \to (M, L)$.

Definition.

- L : **単調 (monotone)**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha > 0$: const. s.t. $I_\omega = \alpha I_\mu$.

- $\Sigma_L \geq 0$: L**の最小Maslov数**

$\Longleftrightarrow \{I_\mu(u) \mid [u] \in \pi_2(M, L)\} = \Sigma_L \cdot \mathbb{Z}$

Theorem 2 (Oh)

L_0, L_1 : **単調**, **最小**Maslov**数** $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$

$\pi_1(M) = 0 \implies$

- ∂ : well-defined.
- $\partial^2 = 0$.
- $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong HF(L_0, \phi L_1 : \mathbb{Z}_2)$,

$$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega).$$

$L_0 \pitchfork \phi L_1$ **ならば**,

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \mathrm{rank}\ HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2).$$

4　Hermite対称空間の場合

(M, ω, J_0) : コンパクト型既約Hermite対称空間
$\Longrightarrow$ 実形$L \subset M$は単調,
$(M, L) = (\mathbb{C}P^1, \mathbb{R}P^1)$を除いて$\Sigma_L \geq 3$.

Theorem 3 (Oh)
(M, ω, J_0) : コンパクト型既約Hermite対称空間
$L_0, L_1 : M$の実形
$\Longrightarrow J_0$ はregular.

- HFの計算にMの標準的複素構造J_0が使える.

Theorem 4 (酒井-田崎- I., to appear)

(M, ω, J_0) : **コンパクト型**Hermite**対称空間**,

Kähler-Einstein

L_0, L_1 : M **の実形で**, $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$,

$L_0 \pitchfork L_1$

$$\Longrightarrow \quad HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

Remark.

- $L_0 \cap L_1$: **対蹠集合 (田中-田崎)**
- $L_0 \cong L_1 \Longrightarrow HF \cong H_*(L_0 : \mathbb{Z}_2)$ **(Oh)**

M が既約の場合

Theorem 5 (酒井-田崎- I.)
(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ **であり**，L_0 **は** $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ **と合同**，L_1 **は** $U(2m)$ **と合同ならば**，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

- $2^m < \binom{2m}{m} = SB(L_0, \mathbb{Z}_2) < SB(L_1, \mathbb{Z}_2)$

(2) **それ以外では**，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{SB(L_0), SB(L_1)\}}.$$

Corollary 6 (generalized Arnold-Givental)

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり，L_0 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同，L_1 は $U(2m)$ と合同ならば，

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2^m.$$

(2) それ以外では，

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\}.$$

ここで，$SB(L, \mathbb{Z}_2) := \sum_i \mathrm{rank} H_i(L, \mathbb{Z}_2)$.

Table.

M	L_0	L_1
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G^{\mathbb{C}}_{2q}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G^{\mathbb{H}}_{q}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G^{\mathbb{R}}_{2q}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G^{\mathbb{C}}_{n}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G^{\mathbb{R}}_{n}(\mathbb{R}^{2n})$
$G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$	$G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T\cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G^{\mathbb{H}}_{2}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T\cdot E_6$	$T\cdot(E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

ここで, $S^{k,n-k}=(S^k\times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$.

とくに, $L_0 \cong L_1$ のとき,

Corollary 7 (Arnold-Givental: Oh, 1993)
(M, ω, J_0) : コンパクト型既約Hermite対称空間
L : M の実形
$\Longrightarrow \ \forall \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ s.t. $L \pitchfork \phi(L)$ に対して,

$$\#(L \cap \phi L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2).$$

- 現在では, かなり一般的な設定の下で証明されている. (深谷-Oh-太田-小野)

5　対蹠集合と HF の計算

Definition (Chen-長野, 1988)

M : Riemann **対称空間**

s_x : **点** x **に関する点対称** $(s_x^2 = id)$

$M \supset S$: **部分集合**

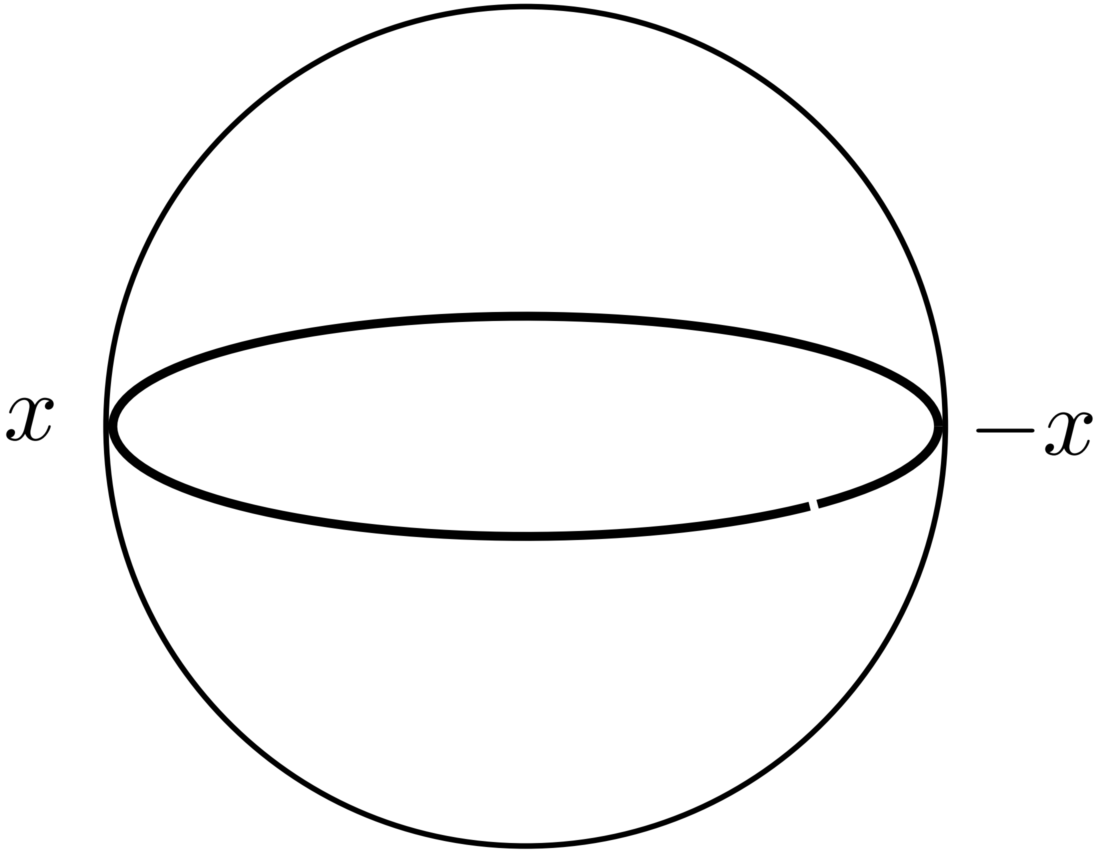
- $S : M$ **の対蹠集合**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y \in S$ **に対して**, $s_x y = y$.

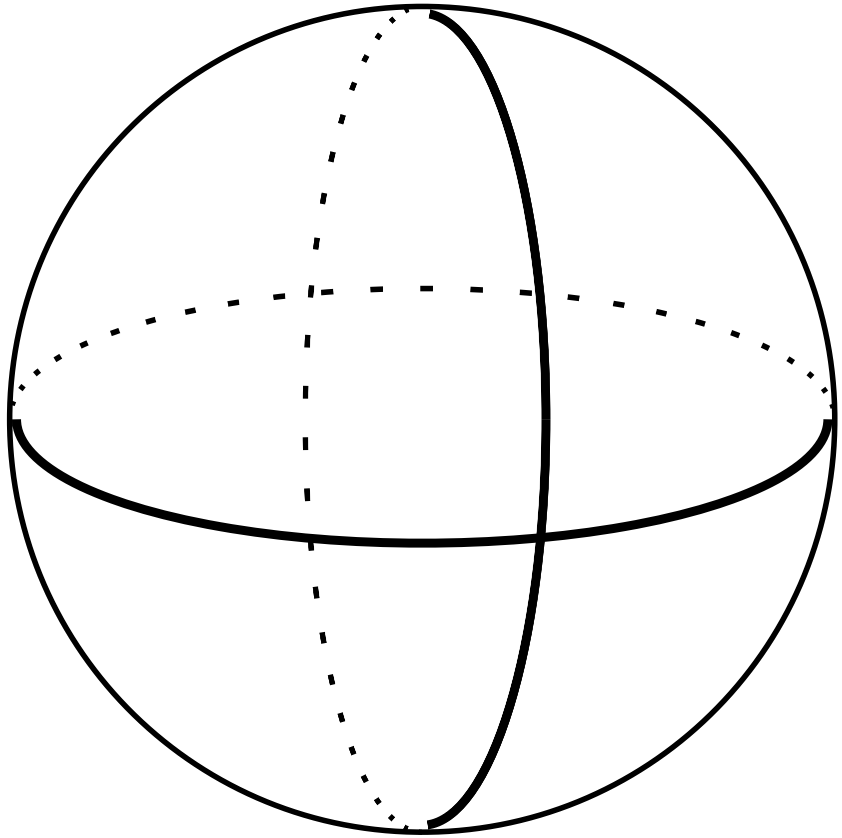
Example.

Fix $x \in S^2 = \mathbb{C}P^1$.　$s_x(x) = x$,　$s_x(-x) = -x$.

$\{x, -x\}$ **は** S^2 **の一つの対蹠集合**



x
$-x$



Theorem 8 (田中-田崎, 2010, to appear)

(M, ω, J_0) : コンパクト型Hermite対称空間

$L_0, L_1 : M$ の実形, $L_0 \pitchfork L_1$

$\Longrightarrow L_0 \cap L_1 : M$ の対蹠集合

$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p]$ の証明

任意の$p \in L_0 \cap L_1$に対して,

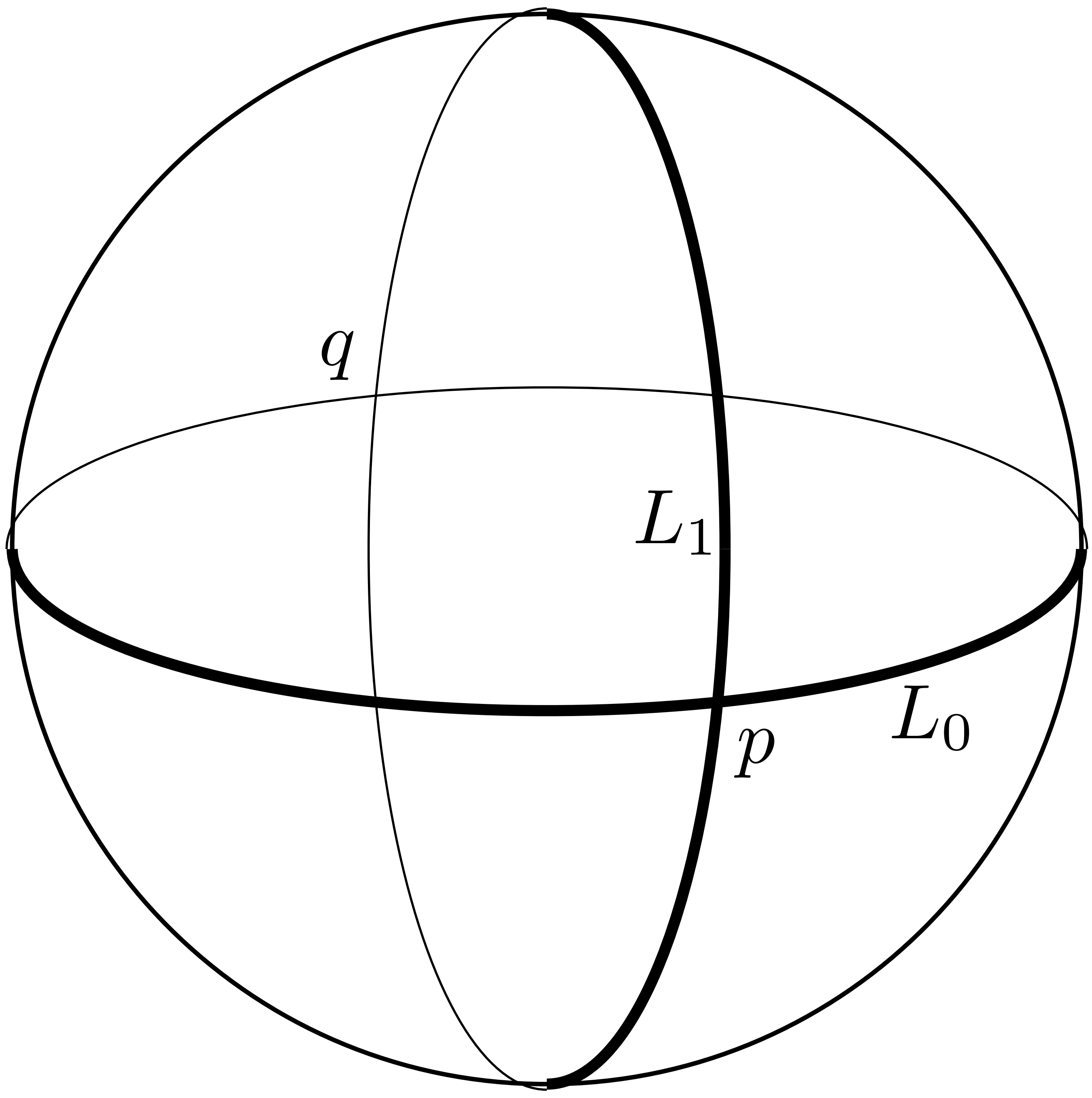
$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q = 0$$

を示したい.

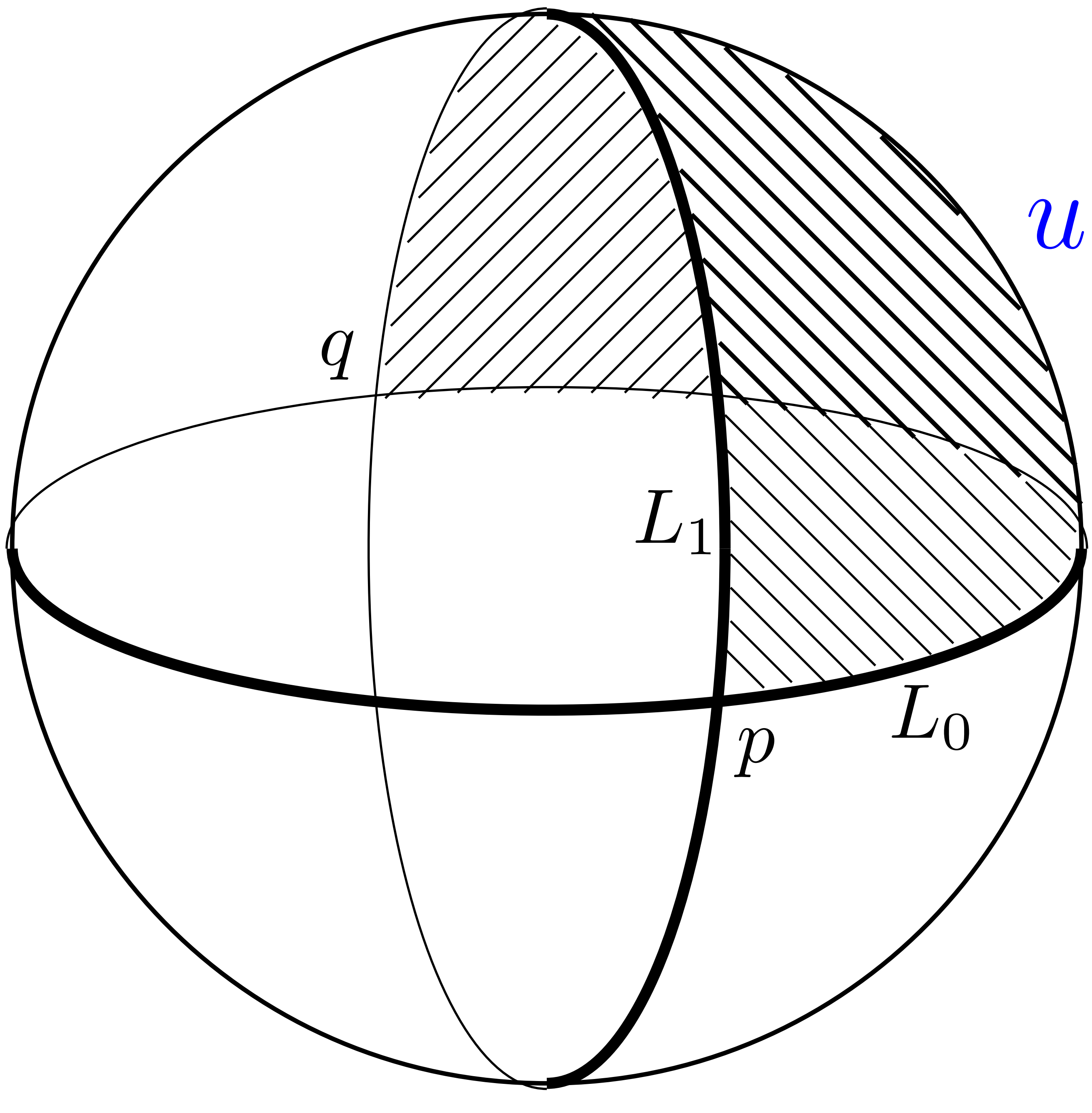
- J_0-holomorphic strip uがあったとする.
- 点対称s_pを考えると, $L_0 \cap L_1$: 対蹠集合

$s_p(p) = p,\ s_p(q) = q$.

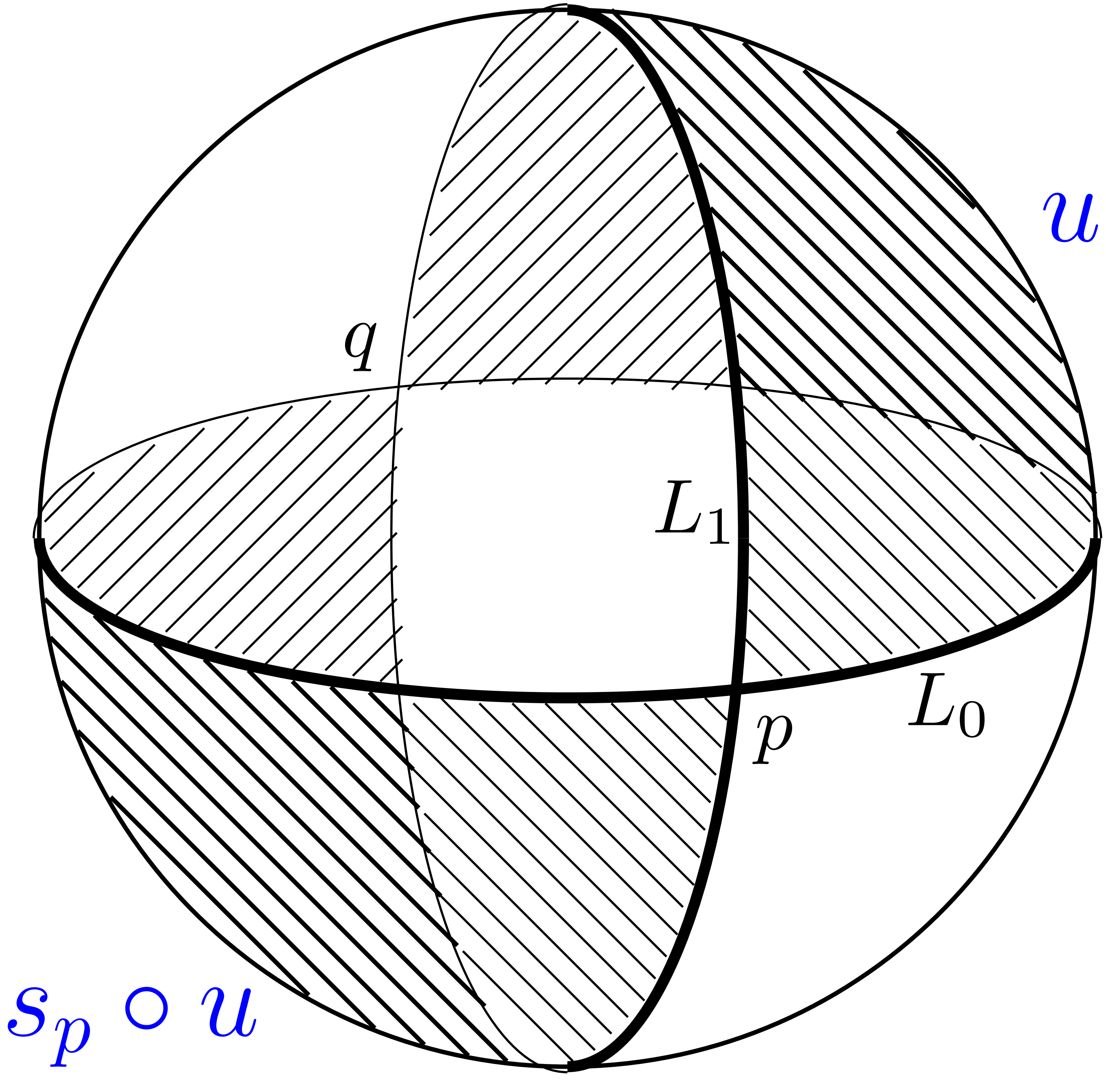
- $s_p \circ u$を考える.



q
L_1
p
L_0



u
q
L_1
p
L_0



u
q
L_1
p
L_0
$s_p \circ u$

よって, $\partial(p) = 0.$

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

Hamilton 体積最小性問題へ

6　複素２次超曲面の実形 (1)

- $Q_n(\mathbb{C}) = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_0^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\}$
$$\cong SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$$
- $S^{k,n-k} = \{[x] \in \mathbb{R}P^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_k^2 - (x_{k+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2) = 0\} \cong (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$
(実形)
- $S^{0,n} = S^n$

- $L_0 \cong S^{k,n-k}, L_1 \cong S^{l,n-l} \quad (k \leq l \leq [n/2])$

generalized Arnold-Givental**不等式より**,
$L_0 \pitchfork \phi L_1$ **ならば**,

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq SB(L_0, \mathbb{Z}_2) = 2(k+1).$$

$k = 0$ **とおくと**, $\#(S^n \cap \phi S^{l,n-l}) \geq 2.$

$SO(n+2)$ **上で積分**

$$\int_{SO(n+2)} \#(S^n \cap g\phi S^{l,n-l}) d\mu \geq 2 \operatorname{vol}(SO(n+2)).$$

Crofton型公式 (Lê Hông Vân).

$N \subset Q_n(\mathbb{C})$: n **次元部分多様体**

$$\int_{SO(n+2)} \#(S^n \cap gN) d\mu \leq 2 \frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^n)} \mathrm{vol}(N).$$

$N = \phi S^{l,n-l}$ **を代入**

$$2 \frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^n)} \mathrm{vol}(\phi S^{l,n-l}) \geq 2 \, \mathrm{vol}(SO(n+2)).$$

Proposition 9

実形 $S^{l,n-l} \subset Q_n(\mathbb{C})$ について,

$$\mathrm{vol}(\phi S^{l,n-l}) \geq \mathrm{vol}(S^n)$$

が $\forall \phi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega)$ に対して成立.

とくに, $l = 0$ とおくと,

$$\mathrm{vol}(\phi S^n) \geq \mathrm{vol}(S^n).$$

Theorem 10 (酒井-田崎-I., 2011, to appear)
$M = Q_n(\mathbb{C})$: n **次元複素** 2 **次超曲面**
$L = S^n$: **実形**
$\Longrightarrow L$: Hamilton **体積最小**.

実は, **次が知られている**.

Theorem 11 (Gluck-Morgan-Ziller, 1989)
n **が偶数のとき**, $S^n \subset Q_n(\mathbb{C})$ **はそのホモロジー類の中で体積最小** (homologically volume minimizing).

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

$$
\begin{array}{c|c c c c}
Q_2(\mathbb{C}) & \boxed{S^2} & S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2 & & \\
Q_3(\mathbb{C}) & \boxed{S^3} & S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2 & & \\
Q_4(\mathbb{C}) & \boxed{S^4} & S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2 & S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2 & \\
Q_5(\mathbb{C}) & \boxed{S^5} & S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2 & S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2 & \\
Q_6(\mathbb{C}) & \boxed{S^6} & S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2 & S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2 & S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2 \\
Q_7(\mathbb{C}) & \boxed{S^7} & S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2 & S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2 & S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2
\end{array}
$$

Hamilton 体積最小
(酒井-田崎-I.)

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$\boxed{S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2}$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

Hamilton **体積最小**
(**小野肇-酒井**-I., 2003)

Hamilton **体積最小**
(**酒井-田崎**-I.)

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

Hamilton 体積最小
(小野肇-酒井-I., 2003)

H-安定 (Oh, Amarzaya-大仁田)

Hamilton 体積最小
(酒井-田崎-I.)

H-不安定 (Oh, Amarzaya-大仁田)

7　$\mathbb{C}P^n$ の Clifford トーラス (2)

- $T^n := \{[z] \in \mathbb{C}P^n \mid |z_0| = |z_1| = \cdots = |z_n|\}$
- $T^n \subset \mathbb{C}P^n$: **極小** Lagrange **部分多様体**,
  Hamilton **安定 (Oh)**

Problem (Oh, 1990).
$T^n \subset \mathbb{C}P^n$ **は**, Hamilton **体積最小か？**

Arnold-Givental **不等式**　＋　Crofton **型公式**
を使ってみる.

Theorem 12 (C. H. Cho)

$\forall \phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega)$ s.t. $T^n \pitchfork \phi(T^n)$ に対して,

$$\#(T^n \cap \phi T^n) \geq 2^n = SB(T^n, \mathbb{Z}_2).$$

Crofton型公式 (Howard).

$L, N \subset \mathbb{C}P^n$: Lagrange**部分多様体**

$$\int_{U(n+1)} \#(L \cap gN) d\mu = \frac{(n+1)\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}P^n)^2} \mathrm{vol}(L)\mathrm{vol}(N).$$

これらより, $\forall \phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega)$ **について**,

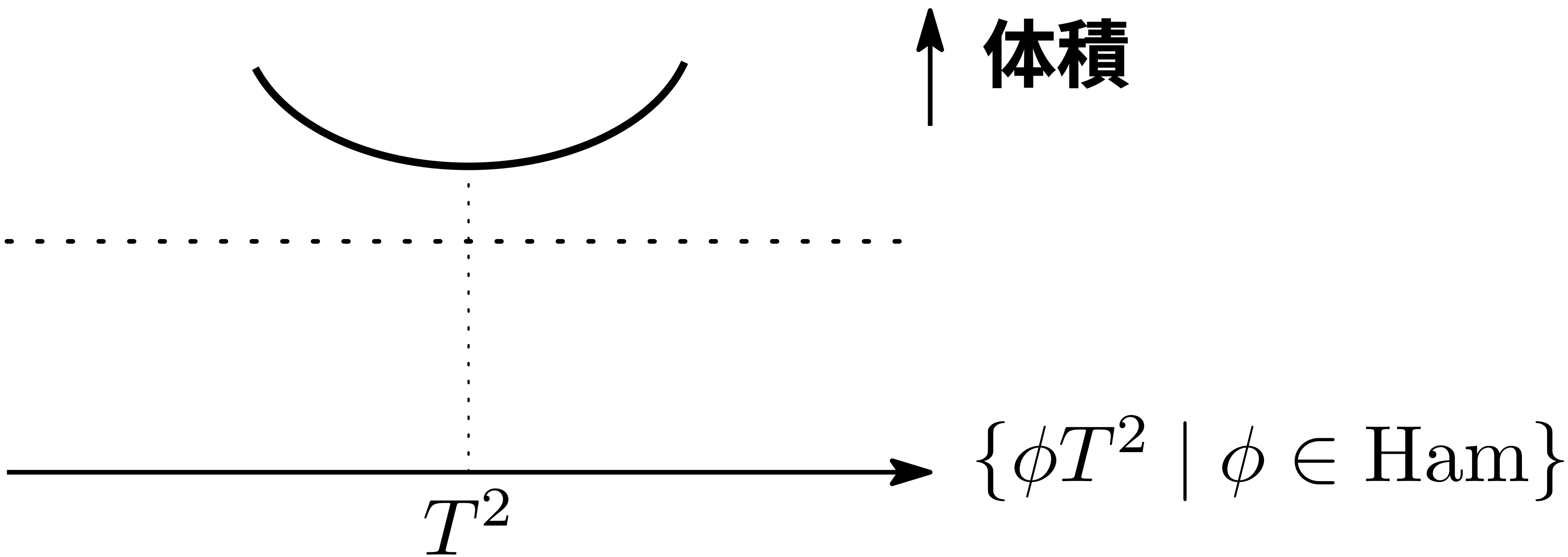
$$\mathrm{vol}(\phi T^n) \geq \frac{2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}P^n)^2}{(n+1)\mathrm{vol}(T^n)}.$$

n=2のとき

$\mathrm{vol}(\phi T^2) \geq \frac{4\mathrm{vol}(\mathbb{R}P^2)^2}{3\mathrm{vol}(T^2)} = 4\sqrt{3} = 6.92\cdots$

$\mathrm{vol}(T^2) = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} = 7.59\cdots$

Theorem 13 (Urbano) $\mathbb{C}P^2$ **の** Hamilton **安定な極小** Lagrange **トーラスは**, T^2 **に限る**.



8　$\mathbb{C}^n$ のLagrangeトーラス (3)

- $M = (\mathbb{C}^n, \sum dx_i \wedge dy_i, J_0)$
- $T(b_1, \ldots, b_n) := S^1(b_1) \times \cdots \times S^1(b_n)$
  ここで, $S^1(b) \subset \mathbb{C}$ は面積 b のdiscの境界
- $T(b_1, \ldots, b_n) \subset \mathbb{C}^n$ は,
  Hamilton極小Lagrange部分多様体,
  Hamilton安定 **(Oh)**

Conjecture (Oh, 1993).
$T(b_1, \ldots, b_n) \subset \mathbb{C}^n$ は, Hamilton体積最小.

- $L = T(b_1, \ldots, b_n)$ について,

$$s(L) := \min_i(b_i),\ m_s(L) := \#\{i \mid b_i = s(L)\},$$
$$\Gamma(L) := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(b_1 - s(L), \ldots, b_n - s(L)) \subset \mathbb{Z}.$$

Theorem 14 (Chekanov)
$L, L' \subset \mathbb{C}^n$: 直積Lagrangeトーラス
$L \cong L'$ (Hamilton同位)

$$\iff s(L) = s(L'),\ m_s(L) = m_s(L'),$$
$$\Gamma(L) = \Gamma(L').$$

n=3のとき

- $L = T(1, b_2, b_3) \subset \mathbb{C}^3$.

  $1 < b_2 \leq b_3,\ b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$とする.

$s(L) = 1,\ m_s(L) = 1,$

$\Gamma(L) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(b_2 - 1, b_3 - 1)$.

$b_2 - 1$と$b_3 - 1$が互いに素ならば, $\Gamma(L) = \mathbb{Z}$.

Chekanovの定理より，そのような直積Lagrangeトーラスは Hamilton同位.

$$T(1,2,3),\ T(1,2,5),\ T(1,3,4),\ \ldots$$

同様に, $n \geq 3$ **のとき Oh の予想には反例がある**.

Problem.

$T(b_1, b_2) \subset \mathbb{C}^2$ **は**, Hamilton **体積最小か？**