古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合とその分類*

田中 真紀子

東京理科大学創域理工学部

1　コンパクト対称空間の極大対蹠集合

コンパクト対称空間 M の部分集合 A は、A の任意の点 x における点対称 s_x が A の各点を固定するときに対蹠集合とよばれる。x は s_x の孤立不動点であるから、対蹠集合はコンパクトハウスドルフ空間の離散集合で有限である。Chen–Nagano[1] はコンパクト Lie 群の 2-rank（可換部分群 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ の階数の最大値）のある意味での拡張と考えられるコンパクト Riemann 対称空間の 2-number（対蹠集合の位数の最大値）について詳細に研究し、多くのコンパクト Riemann 対称空間に対して 2-number を決定し大対蹠集合（位数が 2-number に等しい対蹠集合）を与えた。大対蹠集合は極大対蹠集合であるが、逆は一般には成立しない。著者は田崎博之氏との共同研究でコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類に取り組んできた。[2] において古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の共役類を分類し、共役類の代表元の具体的表示を与え、極大対蹠部分群の位数の最大値および最大値を与える極大対蹠部分群を決定した。[3] においていくつかの古典型コンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合の合同類を分類し、合同類の代表元を具体的に表示し、極大対蹠集合の位数の最大値および最大値を与える極大対蹠集合を決定した。[3] で扱ったコンパクト対称空間は、Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{K}^n)$, $G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, $CI(n) = Sp(n)/U(n)$, $CI(n)/\mathbb{Z}_2$, $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$, $DIII(n)/\mathbb{Z}_2$ (n は偶数) である。分類においては、コンパクト対称空間の連結コンパクトリー群の極地としての埋め込みを利用した。$U(n)/O(n), SU(n)/SO(n), U(2n)/Sp(n), SU(2n)/Sp(n)$ などのいわゆる外部型コンパクト対称空間は、連結コンパクト Lie 群に極地として埋め込むことはできないが、連結ではないコンパクト Lie 群に極地として埋め込むことはできる ([4])。これを利用して、$U(n)/O(n), SU(n)/SO(n), U(2n)/Sp(n), SU(2n)/Sp(n)$ およびこれらの商空間の極大対蹠集合の合同類を分類し、合同類の代表元を具体的に表示し、極大対蹠集合の位数の最大値および最大値を与える極大対蹠集合を決定した ([5])。

2　古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類

コンパクト Lie 群 G には両側不変 Riemann 計量が存在し、$s_x(y) = xy^{-1}x$ $(x, y \in G)$ により x における点対称 s_x が定まり、G は Riemann 対称空間である。点対称は群演算を用

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2023」2023 年 11 月 20 日–21 日（東京理科大学神楽坂キャンパス森戸記念館）記録集

いて定義されるので、G が連結でない場合でも点対称が同様に定義できる。

A を G の対蹠集合とする。左移動と右移動は G の等長変換であり、$e \in A$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、任意の $x \in A$ に対して $s_e(x) = x^{-1} = x$、すなわち、$x^2 = e$ が成り立つ。さらに、任意の $x, y \in A$ に対して、$s_x(y) = y$ が成立するための必要十分条件は x と y が可換なことである。A が極大対蹠集合であれば A は部分群で、$\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群である。これを極大対蹠部分群とよぶ。

[2] において、G が $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $O(n)$, $SO(2n)$ の商群の場合に、極大対蹠部分群の共役類を分類し、代表元を行列を用いて具体的に表示した。ここでは $U(n)$ の商群の場合について述べる。結果を述べるために必要な記号を準備する。正方行列からなる集合 X に対して、$X^{\pm} := \{x \in X \mid \det x = \pm 1\}$ と定める。

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とおく。Δ_n は対角成分が ± 1 の n 次対角行列全体である。Δ_n は $U(n), O(n), Sp(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群であり、Δ_n^+ は $SU(n), SO(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群である。1_m で m 次単位行列を表す。

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in O(2)$$

とおく。

$$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$$

は正方形を不変にする二面体群である。自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解し、$0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$\begin{aligned} D(s,n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \\ &= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4]\,(1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \subset O(n) \end{aligned}$$

とおく。$D(s,n)$ の位数は $|D(s,n)| = 2^{2s + 2^{k-s} \cdot l}$ である。

$U(n)$ の中心は $\{\alpha 1_n \mid \alpha \in U(1)\}$ であり、これを $U(1)$ と同一視する。自然数 μ に対して、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(1)$ に含まれる μ 次巡回群とする。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ はコンパクト Lie 群であり、自然な射影 $\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は μ 重被覆準同型写像である。以下において、$n = 2^k \cdot l$ （l は奇数）であり、θ は 1 の原始 2μ 乗根である。

定理 2.1 ([2] Theorem 5.1) $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\} D(0,n)) = \pi_n(\{1, \theta\} \Delta_n)$$

(2) n, μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\} D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

注意 2.2 $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より $D(k-1, 2^k) \subsetneq D(k, 2^k)$ となるので $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外される。

定理 2.3 ([2] Corollary 5.3) $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の大対蹠部分群とその位数 $(= \#_2 U(n)/\mathbb{Z}_\mu)$ は次の通りである。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$ は共役を除いてただ一つの大対蹠部分群であり、その位数は 2^n である。

(2) n, μ が偶数の場合、

(2-1) $n = 2$ のとき、$\pi_2(\{1, \theta\}D[4])$ は共役を除いてただ一つの大対蹠部分群であり、その位数は 2^3 である。

(2-2) $n = 4$ のとき、$\pi_4(\{1, \theta\}D(2, 4))$ は共役を除いてただ一つの大対蹠部分群であり、その位数は 2^5 である。

(2-3) $n \neq 2, 4$ のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$ は共役を除いてただ一つの大対蹠部分群であり、その位数は 2^n である。

注意 2.4 一般には、大対蹠部分群は共役を除いて一意的であるとは限らない。

定理 2.1 の証明の概略を述べる。A を $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群とし、$B = \pi_n^{-1}(A)$ とおく。B が可換な場合には、A は $\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$ と共役であることがわかる。B が可換でない場合、$a, b \in B$ で $ab \neq ba$ となるものが存在する。このとき、$ab = -ba$ であることがわかり、$\mathrm{tr}(a) = \mathrm{tr}(b) = 0$ となること、および、n と μ は偶数であることがわかる。さらに、$n' = n/2$ とすると、$\{a, b\}$ は $\{I_1 \otimes I_{n'}, K_1 \otimes K_{n'}\}$ と共役であることがわかる。これより、a, b が生成する部分群は $D[4] \otimes 1_{n'}$ と同型である。さらに、B は $D[4] \otimes U(n')$ の部分群と共役であることがわかり、$A = \pi(B)$ は $\pi_n(D[4] \otimes U(n'))$ の部分群と共役である。さらに、$U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ のある極大対蹠部分群 A' に対して、A は $\pi_n(D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(A'))$ と共役である。逆に、$U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 C' に対して、$\pi_n(D[4] \otimes \pi_{n'}^{-1}(C'))$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群である。これより、k に関する数学的帰納法を用いることで主張を得る。

[2] で同様の方法で $O(n), SO(n), Sp(n)$ の商群の極大対蹠部分群の共役類の分類を与え (Theorem 7.1)、大対蹠部分群とその位数を決定した (Corollary 7.2)。$SU(n)$ の商群 $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$（μ は n を割り切る）の極大対蹠部分群の共役類の分類 (Theorem 6.1) については、任意の $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 A は、ある $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 $\tilde{A}$ に対して $A = \tilde{A} \cap SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ となり、その逆も成立するという事実を利用した。得られた分類結果を用いて大対蹠部分群とその位数を決定した (Corollary 6.3)。

3 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類

Lie 群ではないコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類については、主に次の方針で考える。G をコンパクト Lie 群とし、G_0 を G の単位連結成分とする。M を G の e に関する極地、すなわち、s_e の不動点集合 $F(s_e, G)$ の連結成分の一つとする。$g \in G$ に対して I_g で g による共役が定める G の内部自己同型写像を表す。I_g は G の等長変換である。

$x_0 \in M$ に対して $M = \{I_g(x_0) \mid g \in G_0\}$ が成り立ち、M の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ は $I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$ である ([3, Lemma 3.1])。A を M の対蹠集合とすると、$A \subset M \subset F(s_e, G)$ なので、$A \cup \{e\}$ は G の対蹠集合である。$A \cup \{e\}$ を含む G の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとると、$\tilde{A}$ は G の極大対蹠部分群である。さらに A が M の極大対蹠集合ならば、

$$A = M \cap \tilde{A}$$

が成り立つ。

$$B_0, \ldots, B_k$$

を G の極大対蹠部分群の G_0 による共役類の代表元とすると、ある $0 \leq s \leq k$ と $g \in G_0$ が存在して

$$\tilde{A} = I_g(B_s)$$

が成り立つ。したがって、$I_g(M) = M$ より

$$A = M \cap \tilde{A} = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$$

となる。すなわち、A は M 内で $M \cap B_s$ と $I_0(M)$ により合同になる。これより、M 内の極大対蹠集合の $I_0(M)$ による合同類の代表の候補は

$$M \cap B_0, \ldots, M \cap B_k$$

である。以下では、$I_0(M)$ による合同を単に合同という。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とし、$G_k(\mathbb{K}^n)$ を $\mathbb{K}^n$ 内の k 次元 $\mathbb{K}$ 部分ベクトル空間全体からなる Grassmann 多様体とする。$G_k(\mathbb{K}^n)$ はコンパクト対称空間である。$x \in G_k(\mathbb{K}^n)$ における点対称 s_x は、$\mathbb{K}^n$ における x に沿う鏡映から誘導される。このことから、$G_k(\mathbb{K}^n)$ の極大対蹠集合は、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{K}^n$ の標準的正規直交基底とすると、

$$\{\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k} \rangle \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

に合同であることがわかる。

次に、Grassmann 多様体の商空間について考える。$G_m(\mathbb{K}^{2m})$ には直交補空間を対応させる対合的等長変換 $\gamma : G_m(\mathbb{K}^{2m}) \to G_m(\mathbb{K}^{2m})$; $x \mapsto x^\perp$ が定まり、この作用による商空間 $G_m(\mathbb{K}^{2m})^* := G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{1, \gamma\}$ も対称空間になり、自然な二重被覆写像 $G_m(\mathbb{K}^{2m}) \to G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ が定まる。

$$O(n, \mathbb{K}) := \begin{cases} O(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \\ U(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \\ Sp(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

とおくと、$G_k(\mathbb{K}^n)$ は $O(n, \mathbb{K})$ の極地とみなせる ([3, Section 4])。$G_m(\mathbb{K}^{2m})$ を $O(2m, \mathbb{K})$ の極地とみなすと、γ は -1_{2m} をかける写像になるので、$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* \subset O(2m, \mathbb{K})^* := O(2m, \mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}$ となり、$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ は $O(2m, \mathbb{K})^*$ の極地である。これにより、[2] で得られている $O(2m, \mathbb{K})^*$ の極大対蹠部分群の分類結果を用いて $G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ の極大対蹠集合

の分類を得た（[3, Theorems 4.2, 4.3, 4.4]）。$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ の大対蹠集合とその位数も決定した（[3, Theorems 4.8]）。

コンパクト対称空間 $U(n)/O(n), SU(n)/SO(n), U(2n)/Sp(n), SU(2n)/Sp(n)$ は連結コンパクト Lie 群の極地として実現できないが、非連結コンパクト Lie 群の極地として実現できるので、それを利用してこれらのコンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合を分類することが可能になる。

以下で、$SU(n)/SO(n)$ の場合について説明する。$\sigma_I : SU(n) \to SU(n)$ を $\sigma_I(x) = \bar{x}$ $(x \in SU(n))$ で定義する。ここで、$\bar{x}$ は x の複素共役である。σ_I は $SU(n)$ の対合的自己同型写像である。$\langle \sigma_I \rangle$ を σ_I が生成する $SU(n)$ の自己同型群の部分群とする。$G := SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ とおく。$G = (SU(n), 1) \cup (SU(n), \sigma_I)$ を連結成分への直和分解とする。G の単位元を e とするとき、

$$F(s_e, G) = (F(s_{1_n}, SU(n)), 1) \cup (\{g \in SU(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\}, \sigma_I) \tag{1}$$

である。$g, x \in SU(n)$ に対して $\rho_{\sigma_I}(g)(x) = g x \sigma_I(g^{-1})$ と定義し、これにより定まる $SU(n)$ の $SU(n)$ への作用 ρ_{σ_I} を σ_I による捩れた共役作用という。

$$AI(n) := \{g \in SU(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\}$$

とおくと、$AI(n) = \rho_{\sigma_I}(SU(n))(1_n) \cong SU(n)/SO(n)$ であることがわかる。$AI(n)$ は連結コンパクト対称空間である。(1) により $(AI(n), \sigma_I)$ は G の極地である。これを利用して $AI(n)$ の極大対蹠集合の分類を得るために、まず、$G = SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群を分類する。

定理 3.1 ([5]) $SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n^+ \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ に $(SU(n), 1)$ の元で共役である。

これより次を得る。

定理 3.2 ([5]) $AI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n^+ に合同である。

系 3.3 Δ_n^+ は $AI(n)$ の合同を除いてただ一つの大対蹠集合である。$\#_2 AI(n) = |\Delta_n^+| = 2^{n-1}$ である。

次に $AI(n)$ の商空間を考える。μ を n を割り切る自然数とし、$\mathbb{Z}_\mu = \{z 1_n \mid z^\mu = 1\}$ とおくと、$\mathbb{Z}_\mu$ は $SU(n)$ の中心に含まれる。よって、$z 1_n \in \mathbb{Z}_\mu$ と $x \in AI(n)$ に対して、$\sigma_I(zx) = \overline{zx} = \bar{z}\bar{x} = z^{-1}x^{-1} = (zx)^{-1}$ より $\mathbb{Z}_\mu AI(n) \subset AI(n)$ で、$\mathbb{Z}_\mu$ は $AI(n)$ に作用し、$\mathbb{Z}_\mu$ の左からの作用と右からの作用は等しい。よって、商空間 $AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ が定義される。さらに、σ_I は $\mathbb{Z}_\mu$ を保つので、σ_I は $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対合的自己同型写像を誘導する。これも同じ σ_I で表すことにすると、

$$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu \subset M := \{x \in SU(n)/\mathbb{Z}_\mu \mid \sigma_I(x) = x^{-1}\}$$

がわかる。M は連結とは限らない。$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は σ_I による捩れた共役作用の単位元を通る軌道であり、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地である。$(\mathbb{Z}_\mu, 1)$ は $SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の正規部分群

であり、$SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の $(\mathbb{Z}_\mu, 1)$ による商群を $(SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ と書くことにすると、$(SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ は自然に同一視できる。$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合を分類を得るために、まず $(SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群を分類する。

$$D[4]^+ = \{d \in D[4] \mid \det d = 1\} = \{\pm 1_2, \pm J_1\},$$
$$D[4]^- = \{d \in D[4] \mid \det d = -1\} = \{\pm I_1, \pm K_1\}$$

である。

定理 3.4 ([5]) $\pi_n : SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle \to (SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とする。$n' := n/\mu$, $n = 2^k \cdot l$ (l は奇数) とする。θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$(SU(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は、次のいずれかに $\pi_n((SU(n), 1))$ の元で共役である。

(1) μ が奇数の場合　　$\pi_n(\Delta_n^+ \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$

(2) μ が偶数の場合

(2-1) n' が奇数のとき

$$\pi_n((\Delta_n^+ \cup \theta \Delta_n^-) \rtimes \langle \sigma_I \rangle),$$
$$\pi_n(D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \quad (1 \leq s \leq k),$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。さらに、$k = 1$ の場合、$\pi_n(D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ は $\pi_n(((D[4]^+ \cup \theta D[4]^-) \otimes \Delta_l) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ に置き換える。

(2-2) n' が偶数のとき

$$\pi_n(\{1, \theta\} \Delta_n^+ \rtimes \langle \sigma_I \rangle),$$
$$\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \quad (1 \leq s \leq k),$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外し、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1, \theta\} \Delta_4^+ \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ も除外する。

$\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = D(2, 4)$ より $\pi_4(\{1, \theta\} \Delta_4^+ \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ は極大ではない。

上の定理から次を得る。$PD(s, n) := \{d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n\}$ とする。

定理 3.5 ([5]) $\pi_n : SU(n) \to SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とする。$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同である。

(1) μ が奇数の場合　　$\pi_n(\Delta_n^+)$

(2) μ が偶数の場合

(2-1) n' が奇数のとき

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta \Delta_n^-),$$
$$\pi_n(PD(s, n)) \quad (1 \leq s \leq k),$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。さらに、$k = 1$ の場合、$\pi_n(PD(s, n))$ は $\pi_n(\{\pm 1_2, \theta I_1, \theta K_1\} \otimes \Delta_l)$ に置き換える。

(2-2) n' が偶数のとき

$$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+),$$
$$\pi_n(\{1,\theta\}PD(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k),$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合は除外し、$n=4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ も除外する。

$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の大対蹠集合とその位数について次を得る。

定理 3.6 ([5]) (1) μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 2^{n-1} である。

(2) μ が偶数の場合

(2-1) n' が奇数のとき
$n=\mu=2$ ならば、$\pi_2(\{\pm 1_2, \theta I_1, \theta K_1\}$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 3 である。
$n=\mu=4$ ならば、$\pi_4(PD(2,4))$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 10 である。
それ以外の場合、$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 2^{n-1} である。

(2-2) n' が偶数のとき
$n=4, \mu=2$ ならば、$\pi_4(\{1,\theta\}PD(2,4))$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 20 である。
それ以外の場合、$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+)$ は合同を除いてただ一つの大対蹠集合であり、その位数は 2^{n-1} である。

$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の 2-number は次の通りである。

系 3.7 $n=\mu=2$ のとき、$\#_2 AI(2)/\mathbb{Z}_2 = 3$ である。
$n=4, \mu=2$ のとき、$\#_2 AI(4)/\mathbb{Z}_2 = 20$ である。
$n=\mu=4$ のとき、$\#_2 AI(4)/\mathbb{Z}_4 = 10$ である。
それ以外の場合は、$\#_2 AI(n)/\mathbb{Z}_\mu = 2^{n-1}$ である。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory, **27** (2017), 801–829.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of some classical compact symmetric spaces, Differ. Geom. Appl., **73** (2020), 101682.

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Polars of disconnected compact Lie groups, Contemp. Math. **777** (2022), 211–225.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of some classical compact symmetric spaces II, in preparation.