コンパクト対称空間の対蹠集合と全測地的部分多様体の交叉

田中 真紀子（東京理科大学理工学部）

日本数学会2013年度年会

2013年3月20日-23日 京都大学

講演の内容

1. **Chen-Nagano** 理論

2. 対蹠集合と **2-number**

3. コンパクト型**Hermite**対称空間の実形

4. コンパクト対称空間の全測地的部分多様体の交叉

1．Chen-Nagano 理論

M：**Riemann**対称空間（以下、単に対称空間）

i.e., ${}^{\forall}x \in M$, ${}^{\exists}s_x : M$の等長変換　**s.t.**

$$\begin{cases} s_x \circ s_x = \mathbf{id}_M \\ x\text{は}s_x\text{の孤立不動点} \end{cases}$$

s_x：xにおける点対称

・$(ds_x)_x = -\mathbf{Id}_{T_xM}$

・連結対称空間は等長変換群の等質空間

以下、対称空間は連結とする。

$o \in M$

$F(s_o, M) := \{x \in M \mid s_o(x) = x\}$

$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$,　　M_j^+ : 連結成分

ただし　$M_0^+ = \{o\}$

M_j^+ : M の o に関する<u>極地</u>(**<u>polar</u>**)

特に $M_j^+ = \{\mathbf{1}\text{点}\}$ のとき<u>極</u>(**<u>pole</u>**)

M_0^+ は自明な極地(自明な極)

M : 非コンパクト型対称空間，　$o \in M$

$\mathbf{Exp}_o : T_oM \to M$ は微分同相

$s_o(x) = x \iff x = o$

・極地 M_j^+ は M の全測地的部分多様体

M：対称空間

$N \subset M$：全測地的部分多様体

$x \in N$，　$s_x(N) \subset N$

点対称 $s_x^N := s_x|_N$ により N は対称空間

極地の例

(1) 球面 S^n　$M_0^+ = \{o\},\ M_1^+ = \{-o\}$

(2) 射影空間 $\mathbb{K}P^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$：$\mathbb{K}^{n+1}$ の直交基底

$$o = \langle e_1 \rangle$$
$$M_0^+ = \{o\}$$
$$M_1^+ = \{1\text{次元部分空間} \subset o^\perp = \langle e_2, \ldots, e_{n+1} \rangle\}$$
$$\cong \mathbb{K}P^{n-1}$$

M : コンパクト対称空間， $o \in M$

M_j^+ : oに関する極地， $p \in M_j^+$

${}^\exists M_j^-(p)$: pを含む全測地的部分多様体

s.t. $T_p M_j^-(p)$: $(ds_o)_p$の-1固有空間

$M_j^-(p)$:pにおけるM_j^+に対する<u>子午空間</u>**(<u>meridian</u>)**

・$M_j^-(p)$は$F(s_p \circ s_o, M)$のpを含む連結成分

・**dim**$M_j^-(p)$ + **dim**M_j^+ = **dim**M

・M_j^+が極なら$M_j^-(p) = M$

・**rank**$M_j^-(p) =$ **rank**M

(rank$M$はMの平坦全測地的部分多様体の最大次元**)**

M：コンパクト対称空間，　$G = I_0(M)$

$M = G/K$，　$K = \{g \in G \mid g(o) = o\}$

命題 1.1 (Chen-Nagano)

Mのoに関する極地M_j^+はK軌道である。

$p, q \in M_j^+$

$M_j^-(p)$と$M_j^-(q)$はK合同

以下、M_j^-と書く

$o, o' \in M$

$F(s_o, M)$と$F(s_{o'}, M)$はG合同

原点oに関する極地を考えれば十分

定理 1.2 (Nagano)

既約コンパクト対称空間M, Nが等長的であるための必要十分条件は、Mにおける一組の(M_j^+, M_j^-)と、Nにおける一組の(N_k^+, N_k^-)で、M_j^+がN_k^+に、M_j^-がN_k^-にそれぞれ等長的なものが存在すること。

2．対蹠集合と2-number

M：コンパクト対称空間

$S \subset M$：部分集合

$\quad {}^{\forall}x, y \in S$, $\quad s_x(y) = y$

Sは<u>対蹠集合</u>(<u>**antipodal set**</u>)

・対蹠集合は有限離散集合

Mの<u>**2-number**</u> $\quad \#_2 M$

$\#_2 M := \textbf{sup}\{\#S \mid S \subset M$：対蹠集合$\}$

・$\#_2 M < \infty$

S：対蹠集合，$\#S = \#_2 M$のとき

Sは<u>大対蹠集合</u>(<u>**great antipodal set**</u>)

対蹠集合の例

(1) S^n

$\{x, -x\}$：大対蹠集合，　$\#_2 S^n = 2$

(2) $\mathbb{K}P^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$

$\{\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_{n+1} \rangle\}$：大対蹠集合，　$\#_2 \mathbb{K}P^n = n+1$

S：コンパクト対称空間 M の大対蹠集合

$o \in S$ に対して $S \subset F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$

$S \cap M_j^+$ は M_j^+ の対蹠集合

$\therefore \quad \#(S \cap M_j^+) \leq \#_2 M_j^+$

$$\#_2 M = \# S = \sum_{j=0}^{r} \#(S \cap M_j^+) \leq \sum_{j=0}^{r} \#_2 M_j^+$$

対称空間 M はあるコンパクト型対称空間の線形イソトロピー軌道として実現されるとき対称 R 空間

定理 2.1 (Takeuchi)

M が対称 R 空間のとき

$$\#_2 M = \mathbf{dim} H_*(M, \mathbb{Z}_2) = \sum_{j=0}^{r} \#_2 M_j^+$$

定理 2.2 (T-Tasaki)

M : 対称 R 空間

(1) $^\forall S$: M の対蹠集合, $^\exists T$: 大対蹠集合 **s.t.** $S \subset T$

(2) S_1, S_2: M の大対蹠集合 $\Rightarrow S_1$ と S_2 は $I_0(M)$ 合同

3. コンパクト型Hermite対称空間の実形

M：コンパクト型Hermite対称空間

τ：Mの対合的反正則等長変換

$F(\tau, M)$：Mの実形(**real form**)

・実形は連結全測地的Lagrange部分多様体

$I(M)$：Mの等長変換群

$A(M)$：Mの正則等長変換群

$I_0(M), A_0(M)$：$I(M), A(M)$の単位連結成分

・$I_0(M) = A_0(M)$

以下では「$I_0(M)$合同」を単に「合同」とよぶ。

実形の例

(1) $\mathbb{C}P^n$の実形は$\mathbb{R}P^n$に合同

(2) $G_k(\mathbb{R}^n)$は$G_k(\mathbb{C}^n)$の実形

$k = 2l, n = 2m$のとき$G_l(\mathbb{H}^m)$も$G_k(\mathbb{C}^n)$の実形

$n = 2k$のとき$U(k)$も$G_k(\mathbb{C}^{2k})$の実形

$G_k(\mathbb{C}^n)$の実形はこれらのいずれかと合同

・M：既約のときの実形の分類（**Leung, Takeuchi**）

M：**Hermite**対称空間

τ：Mの反正則等長変換

$$M \times M \ni (x,y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x)) \in M \times M$$

：$M \times M$の対合的反正則等長変換

$$D_\tau(M) := \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$$

τにより定まるMの<u>対角実形</u>**(<u>diagonal real form</u>)**

命題3.1 (T-Tasaki)

Mが既約のとき$^\forall \tau \in I(M) - A(M)$は反正則等長変換で、対応$\tau \mapsto D_\tau(M)$により$I(M) - A(M)$の連結成分と対角実形の合同類は1：1

定理3.2 (T-Tasaki)

コンパクト型**Hermite**対称空間の実形は、既約因子の実形と２つの正則等長的な既約因子の直積の対角実形のいくつかの積である。

・対称R空間はコンパクト型**Hermite**対称空間の実形、逆も成立。**(Takeuchi)**

4. コンパクト対称空間の全測地的部分多様体の交叉

定理 4.1 (T-Tasaki)

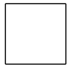
$M = M_1 \times \cdots \times M_m$: コンパクト型**Hermite**対称空間Mの既約因子への分解

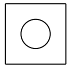
L_1, L_2 : Mの実形

$\Longrightarrow$

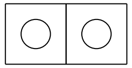
$L_i = L_{i,1} \times \cdots \times L_{i,n} \quad (1 \leq n \leq m,\ i = 1, 2)$

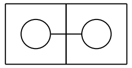
$L_{1,a}, L_{2,a}$ $(1 \leq a \leq n)$の組み合わせは次の**(1)-(4)**のいずれか。

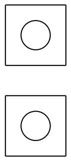
 : 既約コンパクト型**Hermite**対称空間

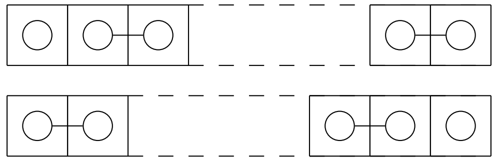
 : その実形

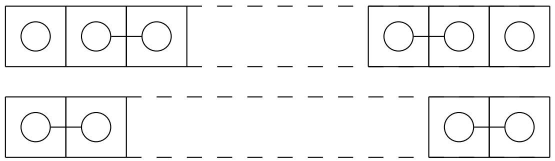
 : **2**つの既約コンパクト型**Hermite**対称空間の積

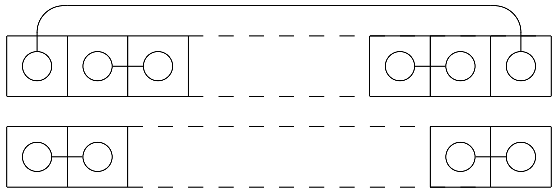
 : 各既約因子の実形の積

 : 対角実形

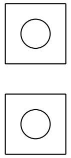
(1) 

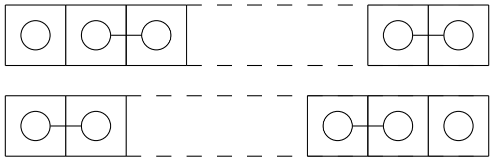
(2) 

(3) 

(4) 

交叉について

(1)  $\Longrightarrow$ 既約の場合

(2) 

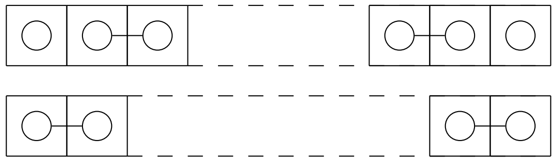
$$\begin{cases} N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}) \\ D_{\tau_1}(M_1) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1} \end{cases}$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \\ \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s+1})\}$$

N_1，$(\tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ は M_1 の実形

$\Longrightarrow$　既約の場合に帰着

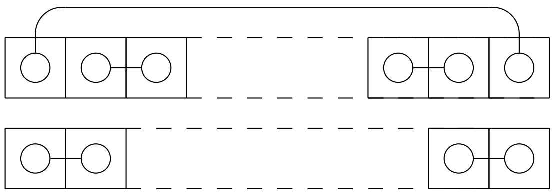
(3) 

$$\begin{cases} N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s} \\ D_{\tau_1}(M_1) \times \cdots\cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \end{cases}$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s})\}$$

$\Longrightarrow$　既約の場合に帰着

(4) 

$$\begin{cases} D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}) \\ D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \end{cases}$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \\ \mid (x, \tau_{2s}^{-1}(x)) \in D_{\tau_{2s-1}\cdots\tau_1}(M_1) \cap D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)\}$$

$\Longrightarrow$ **2**つの対角実形の交叉

定理 4.2 (T-Tasaki)

M：コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2：Mの実形，交叉は離散的

$\Longrightarrow$ $L_1 \cap L_2$はL_1とL_2の対蹠集合

証明には**Takeuchi**による極大トーラスの基本胞体に関する結果を用いる。非既約の場合には定理**4.1**を用いる。

定理 4.3 (T-Tasaki)

M：コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2：Mの合同な実形，交叉は離散的

$\Longrightarrow$ $L_1 \cap L_2$はL_1とL_2の大対蹠集合

定理 4.4 (T-Tasaki)

M：既約コンパクト型Hermite対称空間

L_1, L_2：Mの実形，交叉は離散的，$\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

$\Longrightarrow$

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$，$L_1 \sim G_m(\mathbb{H}^{2m})$，$L_2 \sim U(2m)$

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1$$
$$< 2^{2m} = \#_2 L_2$$

(2) それ以外の場合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 \ (\leq \ \#_2 L_2)$$

定理 **4.5 (T-Tasaki)**

M：既約コンパクト型**Hermite**対称空間

τ_1, τ_2：Mの反正則等長変換

$D_{\tau_1}(M),\ D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$，交叉が離散的

$\Longrightarrow$

(1) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})\ (m \geq 2)$，$\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$

$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m+2 = \#_2 M$

(2) $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})\ (m \geq 2)$，$\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$

$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M$

(3) それ以外の場合

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M$$

補題 4.6

M：コンパクト型**Hermite**対称空間，$o \in M$

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

(1) $L : M$ の実形，$o \in L$

$$F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

$L \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $L \cap M_j^+$ は M_j^+ の実形

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+)$$

(2) $L_1, L_2 : M$ の実形，$o \in L_1 \cap L_2$

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

$$\#_2(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \#_2\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

定理 4.7 (T-Tasaki)

M：コンパクト対称空間，**rank**$(M) = 1$

N_1, N_2：全測地的部分多様体

dim$N_1 +$ **dim**$N_2 =$ **dim**M，交叉は離散的

$\Longrightarrow$

$N_1 \cap N_2$は対蹠集合

(1) $M = S^n$，$N_1 \sim S^k$，$N_2 \sim S^{n-k}$

$\#(N_1 \cap N_2) = 2 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$

(2) $M = \mathbb{C}P^n$，$N_1, N_2 \sim \mathbb{R}P^n$

$\#(N_1 \cap N_2) = n + 1 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$

(3) $M = \mathbb{H}P^n$，$N_1, N_2 \sim \mathbb{C}P^n$

$\#(N_1 \cap N_2) = n + 1 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$

(4) $M = \mathbb{O}P^2$, $N_1, N_2 \sim \mathbb{H}P^2$

$$\#(N_1 \cap N_2) = 3 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$$

(5) それ以外の場合

$$\#(N_1 \cap N_2) = 1 < \min\{\#_2 N_1, \#_2 N_2\}$$

定理 4.8 (T-Tasaki)

M : 既約対称R空間

N_1, N_2 : Mの鏡映部分多様体，交叉は離散的

$\Longrightarrow \quad N_1 \cap N_2$は$N_1$と$N_2$の対蹠集合