コンパクト対称空間の対蹠集合

田中 真紀子

（東京理科大学理工学部）

OCAMI談話会

2015年12月16日

講演の内容　（田崎博之氏との共同研究）

1. 準備

2. 対称R空間の対蹠集合

3. コンパクト**Lie**群の対蹠集合

4. $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$の極大対蹠部分群の分類

5. $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$の商群の極大対蹠部分群の分類

6. **Lie**環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類

7. G_2および$G_2/SO(4)$の極大対蹠集合の分類

1．準備

M：Riemann多様体

M：<u>Riemann対称空間</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x \in M,\ {}^\exists s_x$: 等長変換 s.t. $s_x^2 = \mathrm{id}$, xはs_xの孤立不動点

s_x：xにおける<u>点対称</u>

例：ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$、球面S^n、トーラスT^n

$S \subset M$：<u>対蹠集合</u>（antipodal set）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x, {}^\forall y \in S$ に対して$s_x(y) = y$が成立

対蹠集合Sが<u>大対蹠集合</u>（great antipodal set）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $|S| = \max\{|A| \mid A \subset M$ 対蹠集合$\} =: \#_2 M$：Mの<u>2-number</u>

例（**1**）$M=\mathbb{R}^n$　　$\{x\}$：大対蹠集合（$x\in\mathbb{R}^n$）

（**2**）$M=S^n$

$\{x,-x\}$：大対蹠集合（$x\in S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$）

（**3**）$M=\mathbb{R}P^n$

$\{\mathbb{R}e_1,\ldots,\mathbb{R}e_{n+1}\}$：大対蹠集合（$e_1,\ldots,e_{n+1}$は$\mathbb{R}^{n+1}$の**o.n.b.**）

（**4**）$M=T^n$　　$\#_2T^n=2^n$

$I(M)$：Mの等長変換群　$I(M)$はMに推移的

M：連結 $\Rightarrow$ 単位連結成分$G:=I_0(M)$が推移的

$M=G/K$　　$K:=\{g\in G\mid go=o\}$　（$o\in M$）

$Ko = o \Rightarrow K \curvearrowright T_oM$ 線形イソトロピー作用

対称R空間はコンパクト型**Riemann**対称空間G/Kの線形イソトロピー軌道として実現されるコンパクト**Riemann**対称空間

コンパクト型**Hermite**対称空間は対称R空間（G/Kがコンパクト半単純**Lie**群の場合）

例 : コンパクト**Lie**群$SO(n)$、$U(n)$、$Sp(n)$、**Grassmann**多様体$G_k(\mathbb{K}^n)$（$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$)、$S^n$

対称R空間 $\leftrightarrow$ コンパクト型**Hermite**対称空間の実形

二つの実形の交叉は対蹠集合（**T.**-田崎 **2012**）

2．対称R空間の対蹠集合

定理**1**（**T.**-田崎 **2013**）

対称R空間Mに対して次が成り立つ。

（**1**）Mの極大対蹠集合は大対蹠集合である。

（**2**）Mの大対蹠集合同士は$I_0(M)$の元の作用で互いに写り合う。

（**3**）Mの大対蹠集合は**Weyl**群Wの軌道である。

対称R空間はコンパクト型**Hermite**対称空間$\hat{M} = \hat{G}/\hat{K}$の実形$M = F(\tau, \hat{M})$ （τは$\hat{M}$の対合的反正則等長変換）であり、Wは$\hat{G}$の対合的自己同型$I_\tau : g \mapsto \tau g \tau^{-1}$が定める対称対の**Weyl**群である。

対称R空間ではないコンパクト**Riemann**対称空間の対蹠集合についてはよくわかっているとは言えない。

例：有向実**Grassmann**多様体$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$（$2k \leq n$）は、$\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$、$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^n) = Q_{n-2}(\mathbb{C})$（複素**2**次超曲面）で対称$R$空間である。$k \geq 3$のとき対称$R$空間ではない。

（田崎 **2013**）階数$k = 3, 4$の場合の$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$の極大対蹠集合の分類

コンパクト**Lie**群の商群は一般には対称R空間ではない。

3．コンパクトLie群の対蹠集合

コンパクトLie群G $\quad {}^{\exists}$両側不変Riemann計量

$\Rightarrow$ コンパクトRiemann対称空間

$x \in G$における点対称 $\quad s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$

1：Gの単位元

$s_1(y) = y \Leftrightarrow y^2 = 1$

$x^2 = 1, y^2 = 1$のとき $s_x(y) = y \Leftrightarrow xy = yx$

$1 \in S \subset G$：極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$S \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$（$r$個の積） $\qquad |S| = 2^r$

$r \geq \mathrm{rank}(G)$（$r > \mathrm{rank}(G)$も起こり得る）

4. $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$の極大対蹠部分群の分類

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

$$\Delta_n^{\pm} := \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

$O(n), U(n), Sp(n)$の極大対蹠部分群はΔ_nに共役である。$SO(n), SU(n)$の極大対蹠部分群はΔ_n^{+}に共役である。(行列の対角化の理論からわかる。)

5. $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$の商群の極大対蹠部分群の分類

$U(n)$の中心$Z \stackrel{\text{id}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
$\mathbb{Z}_\mu \subset Z$: 位数μの巡回部分群 $\Rightarrow U(n)/\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$と局所同型なコンパクト**Lie**群
$SU(n)$の中心$\stackrel{\text{id}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}_\mu \subset \mathbb{Z}_n$: 位数μの巡回部分群（μ : nの約数）
$\Rightarrow SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$: $SU(n)$と局所同型なコンパクト**Lie**群

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

$D[4]$: 二面体群　　正四角形を不変にする

$$D^{\pm}[4] := \{g \in D[4] \mid \det g = \pm 1\}$$

n：自然数　　$n = 2^k \cdot l,\ l$：奇数

$0 \leq s \leq k$に対して

$$C(s, n) := D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

（s個の$D[4]$と$\Delta_{n/2^s}$のテンソル積）

<u>定理2</u>（**T.**-田崎）　μ：自然数

$\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$の中心のμ次巡回部分群

θ：1の原始2μ乗根

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$：自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

（**1**）nまたはμが奇数の場合

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$$

（**2**）nかつμが偶数の場合

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \qquad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く

<u>注意</u>　$\Delta_2 \subsetneq D[4]$より

$$C(k-1,2^k) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_2$$

$$\subsetneq D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes D[4] = C(k,2^k)$$

$C(k-1,2^k)$は極大ではない

定理3（T.-田崎）　μ：nの約数

$\mathbb{Z}_\mu$：$SU(n)$の中心のμ次巡回部分群

θ：1の原始2μ乗根

$\pi_n : SU(n) \to SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$：自然な射影

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

（1）nまたはμが奇数の場合

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

（2）nかつμが偶数の場合

（a）$k = 1$のとき

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n=\mu=2$のときは$\pi_2(\Delta_2^+\cup\theta\Delta_2^-)$を除く

（**b**）$k\geq 2$のとき　　$\mu=2^{k'}\cdot l',\ l'$：奇数

（**b1**）$k'=k$ならば

$\pi_n(\Delta_n^+\cup\theta\Delta_n^-),\quad \pi_n(C(s,n))$　$(1\leq s\leq k)$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合を除く

（**b2**）$1\leq k'<k$ならば

$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+),\ \pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(1\leq s\leq k)$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合を除き、$n=4$の場合はさらに$\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$を除く

<u>注意</u>　$\Delta_4^+=\Delta_2\otimes\Delta_2\subsetneq D[4]\otimes D[4]=C(2,4)$

$\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$は極大ではない

$O(n)$の中心$= \{\pm 1_n\} \cong \mathbb{Z}_2$

$O(n)/\{\pm 1_n\}$は$O(n)$と局所同型なコンパクトLie群

nが奇数 $\Rightarrow$ 連結成分の個数は２

nが偶数 $\Rightarrow$ $SO(n)$と同型

$SO(n)$の中心はnが偶数のとき$\{\pm 1_n\}$、nが奇数のとき$\{1_n\}$

nが偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$は$SO(n)$と局所同型なコンパクトLie群

$Sp(n)$の中心$= \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$

$Sp(n)/\{\pm 1_n\}$は$Sp(n)$と局所同型なコンパクトLie群

四元数の標準的な基底の± 1倍の全体:

$$Q[8] := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$$

定理4（**T.-田崎**）自然数nを2の冪2^kと奇数lの積$2^k \cdot l$に分解する。

(**I**) $O(n)/\{\pm 1_n\}$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く。

(**II**) nが偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

（**1**）$k=1$の場合

$$\pi_n(\Delta_n^+),\ \pi_n(D^+[4]\otimes\Delta_l)$$

ただし、$n=2$の場合は$\pi_2(\Delta_2^+)$を除く。

（**2**）$k\geq 2$の場合

$$\pi_n(\Delta_n^+),\ \pi_n(C(s,n))\ (1\leq s\leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合を除き、$n=4$の場合はさらに$\pi_4(\Delta_4^+)$を除く。

（**III**）$Sp(n)/\{\pm 1_n\}$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(Q[8]\cdot C(s,n))\ (0\leq s\leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合を除く。

6．Lie環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類

G：連結コンパクト半単純Lie群

Z：Gの中心（Gの離散部分群）

$G/Z \cong \mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$（$G$のLie環$\mathfrak{g}$の内部自己同型群）

$\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$の極大対蹠部分群 $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{g}$の対合的内部同型で互いに可換なものがどれだけ多く取れるか

定理3、定理4（**II**）、（**III**）は$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(n)$ の$\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$の極大対蹠部分群の分類を含む。

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$：$\mathfrak{g}$の自己同型群（$\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$は単位連結成分）

自然な射影$G \to G/Z$をAdで表す。

<u>定理**5**</u>（**T.**-田崎）自然数nを2の冪2^kと奇数lの積$2^k \cdot l$に分解する。

（**I**）$\tau : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)$； $X \mapsto \bar{X}$ とする。Aut$(\mathfrak{su}(n))$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\{e, \tau\}\mathrm{Ad}(C(s, n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く。

（**II**）Aut$(\mathfrak{so}(n))$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\mathrm{Ad}(C(s, n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く。

（**III**）$\mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(n))$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\mathrm{Ad}(Q[8]\cdot C(s,n)) \qquad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合を除く。

7. G_2および$G_2/SO(4)$の極大対蹠集合の分類

例外型**Lie**群G_2：**Cayley**代数の自己同型群

G_2はコンパクト単連結、G_2の中心$= \{e\}$

$F(s_e, G_2) = \{g \in G_2 \mid g^2 = e\} = \{e\} \cup M_1^+$

$M_1^+ \cong G_2/SO(4) \qquad o \in M_1^+$

$F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+$

$M_{1,1}^+ \cong (S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$

ここで、$x \in \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$は$x \cdot (p, q) = (xp, xq)$により$S^2 \times S^2$に作用

$\pi : S^2 \times S^2 \to (S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ 自然な射影

$[p, q] := \pi(p, q) \ \left((p, q) \in S^2 \times S^2\right)$

e_1, e_2, e_3 : $S^2 \times S^2$の第一因子のS^2の直交系

f_1, f_2, f_3 : $S^2 \times S^2$の第二因子のS^2の直交系

$(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$の極大対蹠集合は

$$A := \{[e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$$

と合同である。

Aに対応する$M^+_{1,1}$の極大対蹠集合を$A_{1,1}$とする。これらの記号のもとで次が成り立つ。

<u>定理6</u>（T.-田崎）

（1）$G_2/SO(4)$の極大対蹠集合は$\{o\} \cup A_{1,1}$に合同であり、その元の個数は7である。

（2）G_2の極大対蹠部分群は$\{e, o\} \cup A_{1,1}$に共役であり、その位数は8である。

（3）$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_2)$の極大対蹠部分群は$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_2) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}_2) \cong G_2$の同一視のもとで（2）で与えられる。