非連結コンパクトLie群の極地

田中 真紀子（東京理科大学）

研究集会「カンドルと対称空間」

2020．12．17–18

オンライン開催（**Zoom**）

田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

内容

1. 研究の背景

2. 極大対蹠集合の分類における基本原理

3. 非連結コンパクト**Lie**群の極地

4. 応用例

1. 研究の背景

M : **Riemann**多様体

M : **Riemann対称空間** $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in M, \exists s_x : M$の等長変換 s.t. (i) $s_x \circ s_x = \mathrm{id}$, (ii) xはs_xの孤立不動点

$s_x : x$における点対称

例：ユークリッド空間E^n、球面S^n、射影空間P^n

Mが連結 $\Rightarrow$ s_xは一意的、

$$s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x \quad (x, y \in M)$$が成立

連結**Riemann**対称空間はカンドル

$F(s_x, M) = \{y \in M | s_x(y) = y\}$の連結成分を$x$に関する極地**(polar)**という

$\{x\}$: 自明な極地

$F(s_x, E^n) = \{x\}, F(s_x, S^n) = \{x, -x\},$

$F(s_x, P^n) = \{x\} \cup P^{n-1}$

M が非コンパクト型 $\Rightarrow F(s_x, M) = \{x\}$

以下では M がコンパクトの場合を考える

A : M の部分集合

A : **対蹠集合 (antipodal set)**

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x, y \in A, \;\; s_x(y) = y$

対蹠集合は有限集合

M の **2-number**

$\#_2 M = \max\{|A| \mid A : \text{対蹠集合}\}$

例：$\{x,-x\}$はS^nの極大な対蹠集合で$\#_2 S^n = 2$

$\{\langle e_1\rangle,\ldots,\langle e_{n+1}\rangle\}$は$P^n$の極大な対蹠集合で

$\#_2 P^n = n+1$

Chen-Nagano (1988) 2-numberの詳細な研究

$N \subset M$：全測地的部分多様体（誘導計量に関するNの測地線はMの測地線）

Mの点対称s_xはxを始点とする測地線$\gamma(t)$に対して

$s_x(\gamma(t)) = \gamma(-t)$

$x \in N$のときs_xはNを保ちNの点対称を定める

$\Rightarrow$ Nは誘導計量に関して**Riemann**対称空間

正次元の極地は全測地的部分多様体

正次元の極地はコンパクト**Riemann**対称空間

A：Mの対蹠集合　　$x \in A$

$A \subset F(s_x, M) = \bigcup_{j=1}^{r} M_j^+$　　極地への分解

$A \cap M_j^+$はM_j^+の対蹠集合

$\#_2 M \leq \sum_{j=1}^{r} \#_2 M_j^+$

M：対称R空間 $\Rightarrow$ 等号成立（**Takeuchi 1989)**

コンパクト型**Hermite**対称空間Mの**2**つの実形L_1, L_2

の交叉は離散的ならば対蹠集合

L_1, L_2がMの等長変換で合同ならば交叉は大対蹠集合

(T.-Tasaki 2012)

対蹠集合 A は $|A| = \#_2 M$ のとき大対蹠集合 (**great antipodal set**)

例 : $\mathbb{C}P^1 = S^2$ はコンパクト型**Hermite**対称空間で大円 $\mathbb{R}P^1 = S^1$ はその実形（対合的反正則等長変換の不動点集合）

２つの異なる大円 S^1 は対蹠的な２点 $\{x, -x\}$ で交わり、これは S^1 の大対蹠集合

大対蹠集合は極大対蹠集合、逆は一般には成立しない

対称 R 空間の極大対蹠集合は大対蹠集合で等長変換を除いて一意的 **(T.-Tasaki 2013)**

目的: コンパクト**Riemann**対称空間の極大対蹠集合の構造の理解、応用

そのためにコンパクト**Riemann**対称空間の極大対蹠集合を分類（現在進行中）

古典型コンパクト**Lie**群とその商群の極大対蹠部分群の分類 **(Griess 1991, Yu 2013, T.-Tasaki 2017)**

例外型コンパクト**Lie**群　G_2, F_4 については既知

いくつかの古典型コンパクト**Riemann**対称空間の極大対蹠集合の分類 **(T.-Tasaki 2020)**

コンパクト**Lie**群Gには両側不変**Riemann**計量が存在して**Riemann**対称空間になる

G_0：単位連結成分

G_0上で点対称が$s_x(y) = xy^{-1}x$により一意的に定まる

Gの群構造だけで定まっているので自然にG全体に拡張できる

例：$U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$

A：Gの対蹠集合, $e \in A$

$\Rightarrow \forall x, y \in A, x^2 = y^2 = e, xy = yx$

$e \in A$が極大対蹠集合ならばAは部分群で$\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$と同型

$\#_2 G = 2^r$, r は G の 2-**rank**

例：$U(n)$ の極大対蹠部分群は $\{\mathrm{diag}(\pm 1, \cdots, \pm 1)\}$ に共役、$\#_2 U(n) = 2^n$

$U(4)/\{\pm 1_4\}$ には元の個数が 2^5 と 2^4 の極大対蹠部分群がある、$\#_2 U(4)/\{\pm 1_4\} = 2^5$

2. 極大対蹠集合の分類における基本原理

コンパクトLie群の極大対蹠部分群の分類を利用してコンパクトRiemann対称空間の極大対蹠集合を分類する際の基本原理について述べる

G : コンパクトLie群　G_0 : 単位連結成分　e : 単位元

eに関する極地を単にGの極地とよぶ

$g \in G, I_g(x) = gxg^{-1} (x \in G)$　I_gはGの等長変換

M : Gの極地　　$x_0 \in M$

$M = \{I_g(x_0) | g \in G_0\}$

$\mathrm{Iso}_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$

（$\mathrm{Iso}_0(M)$：Mの等長変換群の単位連結成分）

$A \subset M$：対蹠集合

$A \cup \{e\}$：Gの対蹠集合

$\exists \tilde{A}$：極大対蹠部分群 $A \cup \{e\} \subset \tilde{A}$

AがMで極大 $\Rightarrow A = M \cap \tilde{A}$

$B_1, \ldots, B_k$：Gの極大対蹠部分群のG_0共役類の代表元

$\exists g \in G_0, 1 \leq \exists s \leq k$ s.t. $\tilde{A} = I_g(B_s)$

$A = M \cap \tilde{A} = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$

Aは$M \cap B_s$に$\mathrm{Iso}_0(M)$合同

Mの極大対蹠集合の$\mathrm{Iso}_0(M)$合同類の代表元は
$M \cap B_1, \ldots, M \cap B_k$のいずれか

[T.-Tasaki 2017]で古典型コンパクト**Lie**群とその商群の極大対蹠部分群の共役類を求め、代表元の具体的表示を与えた。**[T.-Tasaki 2020]**で上記の基本原理を使って古典型コンパクト**Lie**群（の商群）の極地として実現されるコンパクト**Riemann**対称空間Mの極大対蹠集合の$\mathrm{Iso}_0(M)$合同類を求め、代表元の具体的表示を与えた。連結コンパクト**Lie**群の極地としては実現されないコンパクト**Riemann**対称空間がある。

3. 非連結コンパクトLie群の極地

極地が１点$\{x\}$のとき極という

G：コンパクトLie群　G_0：単位連結成分

$x \in F(s_e, G)$　$G^+(x)$：xを含む極地

$G^+(x) = \{I_g(x) \mid g \in G_0\}$

極の全体　$Z_G(G_0) \cap F(s_e, G)$

（$Z_G(G_0)$はGにおけるG_0の中心化群）

$$F(s_e, G) = (Z_G(G_0) \cap F(s_e, G)) \cup \bigcup_{i=1}^{k} G^+(x_i)$$

$\dim G^+(x_i) > 0$, $G^+(x_i) \cap G^+(x_j) = \emptyset \ (i \neq j)$

$G = G_0 \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$　　連結成分への分解

$G_0 \cap F(s_e, G)$ については **Chen-Nagano** が研究

$G_\lambda \cap F(s_e, G)$ を調べる

$x_\lambda \in G_\lambda \cap F(s_e, G) \neq \emptyset$　　$G_\lambda = G_0 x_\lambda$

I_{x_λ} は G_0 の対合的自己同型写像

T_λ : $F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の単位連結成分の極大トーラス

G_0 の G_0 への捩れた共役作用 $g.h = ghI_{x_\lambda}(g)^{-1}$ の性質

（**Hermann** 作用の性質）から次を得る

<u>命題１</u>　$G_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} g(x_\lambda T_\lambda)g^{-1}$

$$G_\lambda \cap F(s_e, G) = \bigcup_{g \in G_0} g\{x \in x_\lambda T_\lambda \,|\, x^2 = e\} g^{-1}$$

$\{x \in x_\lambda T_\lambda \,|\, x^2 = e\}$を決定し、$G_0$共役軌道の具体的表示を与える

<u>命題2</u>　$G_\lambda \cap F(s_e, G) \neq \emptyset$ならば

(1) $G_0 \cup G_\lambda$は部分群

(2) $x_\lambda \in G_\lambda \cap F(s_e, G)$に対して、$G_0 \cup G_\lambda$は半直積 $G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle$に同型

$$G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle = \{(g, \mathrm{id}) \,|\, g \in G_0\} \cup \{(g, I_{x_\lambda}) \,|\, g \in G_0\}$$

　連結成分への分解

命題2の証明：$G_\lambda G_\lambda = G_0 x_\lambda G_0 x_\lambda = G_0 G_0 = G_0$
$\varphi : G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle \to G_0 \cup G_\lambda$を$\varphi(g, \mathrm{id}) = g, \varphi(g, I_{x_\lambda}) = gx_\lambda$で定義すると$\varphi$はLie群の同型写像

G：連結コンパクトLie群　　e：Gの単位元
σ：Gの対合的自己同型写像
$M = \{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$
$\hat{e} = (e, \mathrm{id})$：$G \rtimes \langle \sigma \rangle$の単位元

命題3　$F(s_{\hat{e}}, G \rtimes \langle \sigma \rangle) = (F(s_e, G), \mathrm{id}) \cup (M, \sigma)$
特に、(M, σ)の各連結成分は$G \rtimes \langle \sigma \rangle$の極地

命題３の証明：

$F(s_{\widehat{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) = F(s_{\widehat{e}}, (G, \mathsf{id})) \cup F(s_{\widehat{e}}, (G, \sigma))$

$F(s_{\widehat{e}}, (G, \mathsf{id})) = (F(s_e, G), \mathsf{id})$

$F(s_{\widehat{e}}, (G, \sigma)) = (M, \sigma)$が次からわかる

$g \in G,\ s_{\widehat{e}}(g, \sigma) = (g, \sigma) \Leftrightarrow$

$(g, \sigma) = (g, \sigma)^{-1} = (\sigma(g^{-1}), \sigma) \Leftrightarrow$

$\sigma(g) = g^{-1}$

4. 応用例

$U(n)$：ユニタリ群　　　1_n：単位元

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \{x \in U(n) \mid x^2 = 1_n\}$$
$$= \bigcup_{i=0}^{n} \{g\, x_i\, g^{-1} \mid g \in U(n)\}$$

$$x_i = \mathrm{diag}(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i})$$

$U(n)$の極地

$\{1_n\}$, $\{-1_n\}$,

$U(n)/(U(i) \times U(n-i))$ $(1 \leq i \leq n-1)$

複素**Grassmann**多様体

$\tau(g) = \bar{g} \qquad U(n)$の対合的自己同型写像

$G = U(n) \rtimes \langle\tau\rangle \qquad \langle\tau\rangle = \{e, \tau\}$

$G = \{(g, e) \mid g \in U(n)\} \cup \{(g, \tau) \mid g \in U(n)\}$

連結成分への分解

Gの演算

$(g, e)(h, e) = (gh, e) \qquad (g, e)(h, \tau) = (gh, \tau)$

$(g, \tau)(h, e) = (g\tau(h), \tau) \quad (g, \tau)(h, \tau) = (g\tau(h), e)$

(g, e)をg, (g, τ)を$g\tau$とも書く

$G = U(n) \cup U(n)\tau$

$\tau g = (1_n, \tau)(g, e) = (\tau(g), \tau) = (\bar{g}, \tau) = \bar{g}\tau$

$\widehat{e} : G = U(n) \rtimes \langle\tau\rangle$の単位元

$$F(s_{\widehat{e}}, G) = (F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)) \cup (F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)\tau)$$

$$F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n) = F(s_{1_n}, U(n))$$

$= \bigcup_{i=0}^{n} \{g\,x_i\,g^{-1} \mid g \in U(n)\}$（極地への分解）

極と複素**Grassmann**多様体

$F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)\tau$について命題1を利用して調べる

$T : F(\tau, U(n)) = O(n)$の極大トーラス

$$U(n)\tau = \bigcup_{g \in U(n)} g(\tau T)g^{-1}$$

$$F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)\tau = \bigcup_{g \in U(n)} g\{x \in \tau T \mid x^2 = 1_n\}g^{-1}$$

$\{x \in \tau T \mid x^2 = 1_n\}$を調べる

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_k) & \\ & & & (1) \end{bmatrix} \middle| \, \theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad k = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor$$

$$t \in T \quad \tau t = \bar{t}\tau = t\tau \quad (\tau t)^2 = \tau^2 t^2 = t^2$$

$$\{x \in \tau T \mid x^2 = 1_n\} = \tau\{t \in T \mid t^2 = 1_n\}$$

$$= \tau \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 1_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \epsilon_k 1_2 & \\ & & & (1) \end{bmatrix} \middle| \, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_k = \pm 1 \right\}$$

・$t \in T, g \in U(n)$に対して$g(\tau t)g^{-1} = g\, t\, {}^t g\, \tau$

・$(i1_2)(-1_2)(i1_2) = 1_2$から$t \in T, t^2 = 1_n$に対して$\exists g \in U(n)$ s.t. $g\, t\, {}^t g = 1_n$

これらのことから$\forall t \in T, t^2 = 1_n$に対して次が成立

$\{g(\tau t)g^{-1} \,|\, g \in U(n)\} = \{g\, t\, {}^t g \,|\, g \in U(n)\}\tau$

$= \{g\, 1_n\, {}^t g \,|\, g \in U(n)\}\tau$

したがって

$$F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)\tau = \bigcup_{g \in U(n)} g\{x \in \tau T \mid x^2 = 1_n\} g^{-1}$$

$$= \{g(\tau t)g^{-1} \mid t \in T, t^2 = 1_n, g \in U(n)\}$$

$$= \{g\, 1_n\, {}^t g \mid g \in U(n)\}\tau$$

これが命題3の記号のもとでの(M, σ)

$U(n)$の1_nにおけるイソトロピー部分群

$g\, 1_n\, {}^t g = 1_n \Leftrightarrow {}^t g = g^{-1} = {}^t \bar{g} \Leftrightarrow g \in O(n)$

$F(s_{\widehat{e}}, G) \cap U(n)\tau \cong U(n)/O(n)$、特に連結

$U(n)/O(n)$は連結コンパクトLie群の極地としては実現されない