コンパクト対称空間の極大対蹠集合

田中 真紀子

東京理科大学

RIMS 共同研究（公開型）

部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合

遠隔開催（Zoom ウェビナー）

2021 年 6 月 21 日–23 日

田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

1. 研究の背景
2. 極大対蹠集合の分類の方針
3. 非連結コンパクトLie群の極地
4. $U(n)/O(n)$とその商空間の極大対蹠集合の分類

研究の背景

M：コンパクト Riemann 対称空間

s_x：$x \in M$ における点対称

s_x は x を孤立不動点とする対合的等長変換

s_x による不動点集合 $F(s_x, M)$ の連結成分を x の**極地**という

正次元の極地 M^+ は全測地的部分多様体で、誘導計量に関して Riemann 対称空間であり、$y \in M^+$ における点対称は s_y の M^+ への制限 $s_y|_{M^+}$

M の部分集合 A は、$\forall x, y \in A$ に対して $s_x(y) = y$ となるとき**対蹠集合**という（対蹠集合は離散的）

A が M の対蹠集合のとき、$x \in A$ ならば $A \subset F(s_x, M)$ で、x の極地 M^+ に対して $A \cap M^+$ は M^+ の対蹠集合

逆に、A^+ が M^+ の対蹠集合ならば $\{x\} \cup A^+$ は M の対蹠集合

包含関係に関して極大な対蹠集合を**極大対蹠集合**という

M の 2 つの極大対蹠集合が、M の等長変換群の単位連結成分 $I_0(M)$ の元で移り合うとき、これらは**合同**であるという

一般には、極大対蹠集合は合同を除いて一意的ではないが、M が対称 R 空間ならば極大対蹠集合は合同を除いて一意的（T.-Tasaki 2013）

コンパクト Lie 群 G には両側不変 Riemann 計量が存在し、G はコンパクト Riemann 対称空間である

点対称は $s_x(y) = xy^{-1}x$ で、単位元 e における点対称は $s_e(y) = y^{-1}$ なので $F(s_e, G) = \{g \in G \mid g^2 = e\}$

G においては、単位元 e の極地を単に極地という

A を G の対蹠集合、$e \in A$ とすると、$\forall x \in A$ は $x^2 = e$ を満たし、

$\forall x, y \in A$ に対して y=$s_x(y) = xy^{-1}x = xyx^{-1}$ より x, y は可換

さらに、A が極大対蹠集合ならば A は部分群になり、A は $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型

単位元を含む極大対蹠集合を**極大対蹠部分群**という

コンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の合同類を決定し、その代表元の具体的表示を与える（具体的に記述することで位数を決定することなども可能になる）

- 古典型コンパクト Lie 群 $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$ とその商群の極大対蹠部分群の分類（J. Lie Theory 2017）
- 古典型コンパクト Riemann 対称空間 $G_k(\mathbb{K}^n)\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, $CI(n) = Sp(n)/U(n)$, $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ とその商空間 $G_m(\mathbb{K}^{2m})^* = G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, $CI(n)^* = CI(n)/\mathbb{Z}_2$, $DIII(n)^* = DIII(n)/\mathbb{Z}_2\,(n$ は偶数) の極大対蹠集合の分類（DGA 2020）
- $G_2, G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合の分類（T.-Tasaki-Yasukura, preprint）

極大対蹠集合の分類の方針

連結コンパクト Riemann 対称空間 M が、コンパクト Lie 群 G の極地として実現される場合に、G の極大対蹠部分群の分類結果を利用して、M の極大対蹠集合を分類する方針について述べる

G：コンパクト Lie 群

$M = G_j^+$：G の正次元の極地（M は連結コンパクト Riemann 対称空間）

$I_0(M)$：M の等長変換群の単位連結成分

G_0：G の単位連結成分

$g \in G$ に対して $I_g : G \to G$ を $I_g(h) = ghg^{-1}$ $(h \in G)$ で定義

- M は G_0 による共役作用の軌道, i.e., $p \in M$ に対して

  $M = \{I_g(p) \mid g \in G_0\}$

- $I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$

A を M の極大対蹠集合とする

$A \subset M \subset F(s_e, G)$ より $\{e\} \cup A$ は G の対蹠集合（e は G の単位元）

$\{e\} \cup A$ を含む G の極大対蹠部分群 $\tilde{A}$ が存在

A の M における極大性から $A = \tilde{A} \cap M$

G の極大対蹠部分群の G_0 共役類の分類結果は得られているとする

$B_1, \ldots, B_k$ を各共役類の代表元とすると、$\tilde{A}$ は G_0 の元でこれらのいずれか（B_s とする）に共役：$\exists g \in G_0 \ \text{ s.t. } \ I_g(B_s) = \tilde{A}$

$A = \tilde{A} \cap M = I_g(B_s) \cap M = I_g(B_s \cap M)$ より、A は $B_s \cap M$ と合同

よって M の極大対蹠集合は $B_1 \cap M, \ldots, B_k \cap M$ のいずれかに合同

連結コンパクト Riemann 対称空間 M がコンパクト Lie 群 G の極地として実現されるとき、G の極大対蹠部分群を分類し、それらと M との共通部分を求めることで、M の極大対蹠集合の分類が得られる

例：$U(n)$ の極地

$$F(s_e, U(n)) = \bigcup_{0\le k\le n} \{I_g(\mathrm{diag}(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k},1,\ldots,1)) \mid g\in U(n)\}$$
$$= \{\pm 1_n\} \cup \bigcup_{1\le k\le n-1} G_k(\mathbb{C}^n)$$

$U(n)$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n := \{\mathrm{diag}(\underbrace{\pm 1,\ldots,\pm 1}_{n})\}$ に共役

$\Delta_n \cap G_k(\mathbb{C}^n) = \{d \in \Delta_n \mid d$ の対角成分の -1 の個数は $k\}$
$\underset{\mathrm{id}}{=} \{\langle e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\rangle_{\mathbb{C}} \mid 1\le i_1 < \ldots < i_k \le n\}$（$e_1,\ldots,e_n$: $\mathbb{C}^n$ の標準基底）

連結コンパクト Lie 群の極地としては実現されないが、非連結コンパクト Lie 群の極地として実現される場合がある（$U(n)/O(n), U(2n)/Sp(n)$ など）

非連結コンパクト Lie 群の極地

G : コンパクト Lie 群, e : G の単位元, G_0 : G の単位連結成分

$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: 連結成分への分解 $(0 \in \Lambda)$

$F(s_e, G) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (F(s_e, G) \cap G_\lambda)$

$F(s_e, G) \cap G_0$ については Chen-Nagano の研究でよくわかっているので

$F(s_e, G) \cap G_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$ について調べる

$F(s_e, G) \cap G_\lambda \neq \emptyset$ のとき、$\forall x_\lambda \in F(s_e, G) \cap G_\lambda = \{g \in G_\lambda \mid g^2 = e\}$ に対して I_{x_λ} は G_0 の対合的自己同型写像を誘導

G_0 の G_0 への作用

$$\rho_{I_{x_\lambda}}(g)(h) := g\, h\, I_{x_\lambda}(g)^{-1} \quad (g, h \in G_0)$$

を I_{x_λ} による**捩れた共役作用**とよぶ（これは Hermann 作用）

よく知られているように、G_0 の極大トーラス T に対して

$G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gTg^{-1}$ が成立、つまり、共役作用による G_0 の標準形は T

Hermann 作用の一般論から、共役作用による G_λ の標準形が得られる

T_λ を $F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の極大トーラスとすると

$$G_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} g\,(x_\lambda T_\lambda)\,g^{-1}$$

つまり、共役作用による G_λ の標準形は $x_\lambda T_\lambda$

$F(s_e, G) \cap G_\lambda$

$$= F(s_e, G) \cap (\bigcup_{g \in G_0} g(x_\lambda T_\lambda)g^{-1}) = \bigcup_{g \in G_0} g\,\{x \in x_\lambda T_\lambda \mid x^2 = e\}g^{-1}$$

よって、G_λ 内の極地を求めるには、$\{x \in x_\lambda T_\lambda \mid x^2 = e\}$ の各元の G_0 共役軌道を求め、異なる軌道を決定すればよい（これは個別の G に対して実行可能）

一方、次が成り立つ

Proposition 3.1

G_0：コンパクト Lie 群 G の単位連結成分

G_λ：G の連結成分 $(\neq G_0)$, $x_\lambda \in F(s_e, G) \cap G_\lambda \neq \emptyset$

$\langle I_{x_\lambda} \rangle$：$I_{x_\lambda}$ が生成する $\mathrm{Aut}(G_0)$ の部分群

$\Rightarrow$ $G_0 \cup G_\lambda$ は G の部分群で $G_0 \cup G_\lambda \cong G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle$

よって、非連結コンパクト Lie 群 G の極地を決定することは、半直積 $G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle$ の極地を決定することに帰着される

G：連結コンパクト Lie 群

σ：G の対合的自己同型写像

$\langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$：$\sigma$ が生成する $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群

$G \rtimes \langle \sigma \rangle = (G, 1) \cup (G, \sigma)$：連結成分への分解

$g, h \in G$ に対して

$$(g,1)(h,1) = (gh,1), \qquad (g,1)(h,\sigma) = (gh,\sigma)$$
$$(g,\sigma)(h,1) = (g\sigma(h),\sigma), \qquad (g,\sigma)(h,\sigma) = (g\sigma(h),1)$$
$$(g,1)^{-1} = (g^{-1},1), \qquad (g,\sigma)^{-1} = (\sigma(g^{-1}),\sigma)$$

$I_{(e,\sigma)}(g,1) = (e,\sigma)(g,1)(e,\sigma)^{-1} = (\sigma(g),\sigma)(e,\sigma) = (\sigma(g),1)$

$I_{(e,\sigma)}$ が誘導する単位連結成分 $(G,1)$ の対合的自己同型写像は、$(G,1)$ と G の同一視のもとで σ に一致

$g, h \in G$ に対して

$(g,1)(h,1)(g,1)^{-1} = (ghg^{-1},1) = (I_g(h),1)$

$(g,1)(h,\sigma)(g,1)^{-1} = (gh,\sigma)(g^{-1},1) = (gh\sigma(g^{-1}),\sigma) = (\rho_\sigma(g)(h),\sigma)$

つまり、単位連結成分の元 $(g,1)$ による共役は、$(G,1)$ の G には I_g を誘導し、(G,σ) の G には捩れた共役作用 $\rho_\sigma(g)$ を誘導する

$\hat{e} = (e, 1)$ とおく

Theorem 3.2

G：連結コンパクト Lie 群

σ：G の対合的自己同型写像

$F(s_{\hat{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) = (F(s_e, G), 1) \cup (F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$

特に、$(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の各連結成分は $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地

$(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の (e, σ) を含む連結成分は $(\rho_\sigma(G)(e), \sigma)$ に一致

$\rho_\sigma(G)(e) \cong G/F(\sigma, G)$

（証明）$F(s_{\hat{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) \cap (G, 1) = (F(s_e, G), 1)$

$F(s_{\hat{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) \cap (G, \sigma) \ni (g, \sigma) \Leftrightarrow (g, \sigma) = (g, \sigma)^{-1} = (\sigma(g^{-1}), \sigma)$

$\Leftrightarrow g = \sigma(g^{-1}) = \sigma \circ s_e(g) = s_e \circ \sigma(g)$

(e, σ) を含む極地は、$(G, 1)$ の共役作用による (e, σ) を通る軌道なので

$(\rho_\sigma(G)(e), \sigma)$

$U(n)/O(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類

$U(n)$: n 次ユニタリ群,　　1_n : n 次単位行列

$\sigma_I : U(n) \to U(n),\ \sigma_I(g) = \bar{g}$　　対合的自己同型写像

$UI(n) := \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} = F(s_{1_n} \circ \sigma_I, U(n))$

$UI(n) = \{g1_n{}^t g \mid g \in U(n)\} = \rho_{\sigma_I}(U(n))(1_n) \cong U(n)/O(n)$

連結コンパクト Riemann 対称空間

$\langle \sigma_I \rangle = \{1, \sigma_I\}$: σ_I が生成する $\mathrm{Aut}(U(n))$ の部分群

$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle = (U(n), 1) \cup (U(n), \sigma_I)$: 連結成分への分解

$\hat{e} := (1_n, e)$: $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の単位元

$F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), 1) = (F(s_{1_n}, U(n)), 1)$

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \{\pm 1_n\} \cup \bigcup_{1 \le k \le n-1} G_k(\mathbb{C}^n)$$

$F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), \sigma_I) = (UI(n), \sigma_I)$

$(UI(n), \sigma_I)$ は $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地の 1 つ

$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群の分類を利用して、$UI(n)$ の極大対蹠集合の分類を得ることができる

Theorem 4.1

$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle (= \Delta_n \times \langle \sigma_I \rangle)$ に $(U(n), 1)$ の元で共役

（証明）A を $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群とすると、$A \cap (U(n), \sigma_I) \neq \emptyset$ がわかる（$A \subset (U(n), 1)$ とすると A は $(\Delta_n, 1)$ に共役で、$(\Delta_n, 1)$ の各元は $(1_n, \sigma)$ と可換なことから A の極大性に矛盾が生じる）

$A \subset F(\hat{e}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ より

$A \cap (U(n), \sigma_I) \subset F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), \sigma_I) = (\rho_{\sigma_I}(U(n))(1_n), \sigma_I)$

$F(\sigma_I, U(n)) = O(n) \supset T$：極大トーラス

$$(U(n), \sigma_I) = \bigcup_{g \in U(n)} (g, 1)(T, \sigma_I)(g, 1)^{-1}$$

必要なら A を共役なものに取り換えると $\exists t \in T$ s.t. $(t, \sigma_I) \in A$

さらに、$U(n)$ の作用 ρ_{σ_I} により、(t, σ_I) は $(1_n, \sigma_I)$ と $(U(n), 1)$ の元で共役だから、必要なら A を共役なものに取り換えることにより $(1_n, \sigma_I) \in A$

$g \in U(n)$ に対して、$(g, 1)$ と $(1_n, \sigma_I)$ が可換 $\Leftrightarrow \sigma_I(g) = g$

よって $A \cap (U(n), 1) \subset (F(\sigma_I, U(n)), 1) = (O(n), 1)$

A の極大性から $A \cap (U(n), 1)$ は $(O(n), 1)$ の極大対蹠集合

$A \cap (U(n), 1)$ は $(\Delta_n, 1)$ に $(O(n), 1)$ の元で共役

必要なら A を共役なものに取り換えることにより $A \cap (U(n), 1) = (\Delta_n, 1)$

A の極大性から $A = \Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle$

以上から A は $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ に $(U(n), 1)$ の元で共役

この結果を利用して $UI(n)$ の極大対蹠集合を決定する

A を $UI(n)$ の極大対蹠集合とする

(A, σ_I) は $(UI(n), \sigma_I)$ の極大対蹠集合

$\{\hat{e}\} \cup (A, \sigma_I)$ は $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の対蹠集合

$\exists \tilde{A} : U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群 s.t. $\{\hat{e}\} \cup (A, \sigma_I) \subset \tilde{A}$

A の極大性から $\tilde{A} \cap (UI(n), \sigma_I) = (A, \sigma_I)$ が成立

Theorem 4.1 から $\exists g \in U(n)$ s.t. $\tilde{A} = (g, 1)(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)(g, 1)^{-1}$

$(g, 1)(\Delta_n, \sigma_I)(g, 1)^{-1} = (g\Delta\sigma_I(g)^{-1}, \sigma_I) = (\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n), \sigma_I)$

$(A, \sigma_I) = \tilde{A} \cap (UI(n), \sigma_I) = (\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n), \sigma_I)$

$A = \rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n)$ となり、A は Δ_n に合同

Theorem 4.2

$UI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n に合同

次に $UI(n)$ の商空間について考える

自然数 μ に対して $\mathbb{Z}_\mu := \{z1_n \mid z^\mu = 1\}$

$\mathbb{Z}_\mu \subset U(n)$ の中心

$\mathbb{Z}_\mu$ は積により $UI(n)$ に作用

この作用による商空間を $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ で表す

σ_I は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対合的自己同型写像を誘導するので、それも σ_I で表す

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の単位元を e で表す

$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu \subset F(s_e \circ \sigma_I, U(n)/\mathbb{Z}_\mu)$

$F(s_e \circ \sigma_I, U(n)/\mathbb{Z}_\mu)$ は連結とは限らない

$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は e を含む連結成分に一致

$(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ は $(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地の 1 つ

一方、$(\mathbb{Z}_\mu, 1)$ は $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の正規部分群

商群 $(U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/(\mathbb{Z}_\mu, 1)$ を単に $(U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ と書く

$(U(n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle)/\mathbb{Z}_\mu = (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle \sigma_l \rangle$ に注意する

$(U(n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果を述べるために記号を準備する

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$

自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解

$0 \leq s \leq k$ に対して

$$D(s, n) := \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s}$$

$$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \subset O(n)$$

$\pi_n : U(n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle \to (U(n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$: 自然な射影

Theorem 4.3 (T.-Tasaki 2017)

$n = 2^k \cdot l, \quad l$ は奇数

θ : 1 の原始 2μ 乗根

$(U(n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は、次のいずれかに $\pi_n(U(n), 1)$ の元で共役

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_l \rangle)$

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \sigma_l \rangle)$

ただし、$0 \leq s \leq k$ で、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く

$$\Delta_2 = \{\pm 1_2, \pm I_1\} \subsetneq D[4]$$

$$D(k-1, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2$$

$$\subsetneq \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes D[4] = D(k, 2^k)$$

この結果を利用して $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合を決定することができる

$PD(s,n) := \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\}$

Theorem 4.4

$n = 2^k \cdot l, \quad l$ は奇数

θ : 1 の原始 2μ 乗根

$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 合同

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n)$

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1,\theta\}PD(s,n))$

ただし、$0 \leq s \leq k$ で、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く

（Theorem 4.4 の証明の概略）

射影 $U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ も π_n で表すことにすると、

$\pi_n(U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle) = (U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle)/\mathbb{Z}_\mu = (U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle\sigma_I\rangle = \pi_n(U(n)) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$

A を $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合とする

(A, σ_I) は $(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ の極大対蹠集合

$\{\pi_n(\hat{e})\} \cup (A, \sigma_I)$ は $(U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠集合

$\exists \tilde{A} : (U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 s.t. $\{\pi_n(\hat{e})\} \cup (A, \sigma_I) \subset \tilde{A}$

A の極大性から $\tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) = (A, \sigma_I)$ が成立

(1) μ が奇数のとき

Theorem 4.3 から $\exists g \in U(n)$ s.t. $\tilde{A} = \pi_n((g,1)(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)(g,1)^{-1})$

$(g,1)(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)(g,1)^{-1} = (I_g(\Delta_n), 1) \cup (\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n), \sigma_I)$ より

$(A, \sigma_I) = \tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) = \pi_n((\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n), \sigma_I)) =$
$(\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n)), \sigma_I)$

よって $A = \pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n))$ となり A は $\pi_n(\Delta_n)$ に合同

(2) μ が偶数のとき

Theorem 4.3 から $0 \leq \exists s \leq k,\ \exists g \in U(n)$ s.t.

$\tilde{A} = \pi_n((g,1)(\{1,\theta\}D(s,n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)(g,1)^{-1})$

ただし、$(s,n) \neq (k-1, 2^k)$

$$\tilde{A} = \pi_n((\{1,\theta\}I_g(D(s,n)),1)) \cup \pi_n((\{1,\theta\}\rho_{\sigma_I}(g)(D(s,n)),\sigma_I))$$

$(A,\sigma_I) = \tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ より

$A = \pi_n(\{1,\theta\}\rho_{\sigma_I}(g)(D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n)) =$

$\rho_{\sigma_I}(\pi_n(g))(\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n))$

A は $\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n))$ に $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 合同

$\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n)) =$

$(\pi_n(D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n))) \cup (\pi_n(\theta D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n)))$

$\pi_n(D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n)) = \pi_n(PD(s,n))$

$\pi_n(\theta D(s,n)) \cap \pi_n(UI(n)) = \pi_n(\theta PD(s,n))$

A は $\pi_n(\{1,\theta\}PD(s,n))$ に合同