実形の交叉と対称三対

井川治　(京都工芸繊維大学)

筑波大学 田崎博之氏と東京理科大学 田中真紀子氏との共同研究.

1　導入

2 次元球面 S^2 内に異なる大円を二つかくと，それらは二点で交わり，その二点は互いに対蹠点になる．S^2 を複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ と見ると，大円は $\mathbb{C}P^1$ の実形と見ることができる．

これを拡張して compact 型既約 Hermite 対称空間内に二つの実形を考え，その交叉について考える．一般に compact 型既約 Hermite 対称空間内に二つの実形を考えるとそれらは合同とは限らない．合同な二つの実形については，それらの交叉が離散的になるための条件を制限ルート系の言葉を用いて表現することができる．また，交叉が離散的のとき，交叉を制限ルート系の定める Weyl 群による特性元 (複素構造) の軌道として表現することができる．特に交叉は実形の大対蹠集合になる．

一方，対称三対は Hermann 作用の軌道の性質を調べるために導入された既約ルート系の拡張概念である．compact 型既約 Hermite 対称空間内に合同でない二つの実形を考えると，compact 対称三対が定まるので，そこから対称三対を定義することができる．二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉を用いて表現することができる．この条件が講演者にとって驚くべきことに，丁度，Hermann 作用の軌道が正則軌道になることに対応している．また，交叉が離散的のとき，交叉を対称三対の定める Weyl 群による特性元 (複素構造) の軌道として表現することができる．具体的に与えられた compact 型既約 Hermite 対称空間とその二つの実形について，それらの離散的な交叉の交点数は田中-田崎により Chen-長野理論を用いて得られていたが，今回の結果を用いてそれらを再証明することができる．

2　ルート系に付随する特性元

$(\mathfrak{a}, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．R を $\mathfrak{a}$ のルート系とする．$J \in \mathfrak{a} - \{0\}$ が R に付随した **(第一種の) 特性元**であるとは，任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, J\rangle = 0, \pm 1$ となるときをいう．J が R に付随した特性元ならば，$-J$ もそうである．R の Weyl 群を $W(R)$ と表す．J が R に付随した特性元ならば，任意の $s \in W(R)$ に対して，sJ も R に付随した特性元である．R の基本系 Π を任意の $\lambda \in \Sigma^+$ について $\langle \lambda, J\rangle = 0, 1$ となるようにとることができる．$R = E_8, F_4, G_2$ のとき，最高ルートを Π の元の線形結合で表すと，その全ての係数が 2 以上になるので，R に付随した特性元は存在しない．

以下，ルートの番号付けは [1] に合わせる．

例 2.1. $R = B_r$ のとき，特性元 J は本質的にただ一つで

$$\langle J, \alpha_1\rangle = 1, \quad \langle J, \alpha_i\rangle = 0 \quad (i \geq 2)$$

によって与えられる．すなわち，$J = e_1$ であり，全ての特性元は

$$W(R)J = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\}$$

によって与えられる．特に $\#(W(R)J) = 2r$.

例 2.2. $R = C_r$ のとき，特性元 J は本質的にただ一つで

$$\langle J, \alpha_r\rangle = 1, \quad \langle J, \alpha_i\rangle = 0 \quad (i \leq r-1)$$

によって与えられる．すなわち，$J = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \cdots + e_r)$ であり，全ての特性元は

$$W(R)J = \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i e_i \mid \epsilon_i = \pm 1 \right\}$$

によって与えられる．特に $\#(W(R)J) = 2^r$.

例 2.1, 例 2.2 より $R = BC_r$ のとき，特性元は存在しない．

例 2.3. $R = A_r$ のとき，特性元は r 個存在する．それらを J_i $(1 \leq i \leq r)$ で表すと，$\langle J_i, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$．すなわち，

$$J_i = (e_1 + \cdots + e_i) - \frac{i}{r+1}\sum_{j=1}^{r+1} e_j$$

このとき,

$$W(R)J_i = \left\{ \sum_{j \in A} e_j - \frac{i}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} e_j \mid A \in P_i(r+1) \right\},$$
$$\#(W(R)J_i) = \binom{r+1}{i}$$

ここで，$P_i(r+1) = \{A \subset \{1, 2, \cdots, r+1\} \mid \#A = i\}$ とおいた．

$$\begin{aligned}\{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 0\} =& \{e_j - e_k \mid i+1 \leq j < k \leq r+1\} \\ & \cup \{e_j - e_k \mid 1 \leq j < k \leq i\}, \\ \{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 1\} =& \{e_j - e_k \mid 1 \leq j < i, i+1 \leq k \leq r+1\}\end{aligned}$$

となるので

$$\#\{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 0\} = \binom{r+1-i}{2} + \binom{i}{2},$$
$$\#\{\alpha \in \Sigma^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 1\} = i(r+1-i)$$

$r = 2$ のときは,

$$J_1 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3), \quad J_2 = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 - 2e_3)$$

であり

$$W(R)J_1 = \left\{ J_1, -J_2, \frac{1}{3}(2e_2 - e_1 - e_3) \right\},$$
$$W(R)J_2 = \left\{ J_2, -J_1, -\frac{1}{3}(2e_2 - e_1 - e_3) \right\}$$

となる．$W(R)J_k$ $(k = 1, 2)$ は正三角形である． □

例 2.4. $R = E_6$ のとき，特性元は2個存在する．それらを J_1, J_2' で表すと,

$$\langle J_1, \alpha_i \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle J_2', \alpha_6 \rangle = 1, \quad \langle J_2', \alpha_i \rangle = 0 \quad (1 \leq i \leq 5)$$

すなわち,

$$J_1 = \frac{2}{3}(e_8 - e_7 - e_6) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$
$$J_2' = \frac{1}{3}(e_8 - e_7 - e_6) + e_5 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6)$$

したがって,

$$\#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_1 \rangle = 1\} = \#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_2' \rangle = 1\} = 16,$$
$$\#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_1 \rangle = 0\} = \#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_2' \rangle = 0\} = 20$$

$W(E_6)J_1$ の元 J_k $(2 \leq k \leq 27)$ を

$$J_2 = s_1J_1,\ J_3 = s_3J_2,\ J_4 = s_4J_3,\ J_5 = s_2J_4,\ J_6 = s_5J_4,\ J_7 = s_5J_5,$$
$$J_8 = s_6J_6,\ J_9 = s_4J_7,\ J_{10} = s_6J_7,\ J_{11} = s_6J_9,\ J_{12} = s_3J_9,\ J_{13} = s_6J_{12},$$
$$J_{14} = s_5J_{11}, J_{15} = s_1J_{12},\ J_{16} = s_1J_{13},\ J_{17} = s_5J_{13},\ J_{18} = s_5J_{16},$$
$$J_{19} = s_4J_{17},\ J_{20} = s_4J_{18},\ J_{21} = s_2J_{19},\ J_{22} = s_2J_{20},\ J_{23} = s_3J_{20},$$
$$J_{24} = s_3J_{22},\ J_{25} = s_4J_{24},\ J_{26} = s_5J_{25},\ J_{27} = s_6J_{26}$$

とおくと,$W(E_6)J_1 = \{J_i \mid 1 \leq i \leq 27\}$, $J_2' = -J_{27}$ が成り立つ.特に,$W(E_6)(J_2') = W(E_6)(-J_1)$, $\#(W(E_6)J_1) = 27$. $W(E_6)J_1$ の中に J_1 を含む正三角形は全部で五つあり,それらは

$$\triangle_1 = \{J_1, J_{15}, J_{27}\},\ \triangle_2 = \{J_1, J_{16}, J_{26}\},\ \triangle_3 = \{J_1, J_{18}, J_{25}\},$$
$$\triangle_4 = \{J_1, J_{20}, J_{24}\},\ \triangle_5 = \{J_1, J_{22}, J_{23}\}$$

で与えられる.$\mathfrak{a}^{(i)} = \mathrm{span}(\triangle_i)$ $(1 \leq i \leq 5)$ とおくと,$1 \leq i \leq 5$ に対して

$$\triangle_i = \mathfrak{a}^{(i)} \cap W(E_6)J_1 \tag{2.1}$$

が成り立つ.

例 2.5. $R = D_r$ のとき,

$$J_1 = e_1,\ J_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} e_j,\ J_3 = -J_2$$

とおくと,これらは特性元で全ての特性元は,これらの Wely 群の軌道になる.

$$W(D_r)J_1 = \{\pm e_1, \cdots, \pm e_r\},$$
$$W(D_r)J_2 = \left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \epsilon_j e_j \mid \epsilon_j = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_r = 1\right\}$$

となるので,$\#(W(D_r)J_1) = 2r$, $\#(W(D_r)J_2) = 2^{r-1}$. $J_3 \in W(D_r)J_2$ となるための条件は r が偶数になることである.

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$(定義は [5]) に付随した特性元とは,既約ルート系 $\tilde{\Sigma}$ に付随した特性元のことを指す.対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の Weyl 群とは,$\tilde{\Sigma}$ の Weyl 群 $W(\tilde{\Sigma})$ のことを指す.

3 compact 型既約 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉

$\mathfrak{g}$ を compact 単純 Lie 環とし，$J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ ととる．$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とし，$M = G \cdot J$ とおく．$\mathfrak{g}$ 上に G-不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れる．G の閉部分群 K を $K = \{k \in G \mid k \cdot J = J\}$ とおく．K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [J, X] = 0\}$$

$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m} = \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}J$ と定めると

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (\text{直交直和}).$$

$\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型写像 $e^{\pi \mathrm{ad}J}$ の $(+1)$-固有空間と (-1)-固有空間がそれぞれ $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{m}$ になる．J は $\mathfrak{m}$ 上の K-作用と可換な複素構造を定める．このようにして $M \cong G/K$ は compact 型既約 Hermite 対称空間になる．逆に全ての compact 型既約 Hermite 対称空間は，このようにして得られる．L を M の実形とする．すなわち，L は M のある対合的反正則等長同型写像 τ の固定点集合である．実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体である．正の正則断面曲率を持つ compact ケーラー多様体 (compact 型 Hermite 対称空間はこの条件を満たす) の実形は連結になる ([13, Lemma 4.1])．compact 型既約エルミート対称空間の実形については [7], [9] で分類されている．G 上の対合的自己同型写像 I_τ を

$$I_\tau : G \mapsto G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

と定める．G における I_τ の固定点集合を $F(I_\tau)$ と表すと $(G, F(I_\tau))$ は compact 対称対になる．この対称対による $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ と表すと $J \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ ([13, Theorem 4.3])．$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を $J \in \mathfrak{a}$ となるようにとり，$\mathfrak{a}$ に関する $(G, F(I_\tau))$ の制限ルート系を R と表す．$\lambda \in R$ の重複度を $m_R(\lambda)$ と表す．任意の $\lambda \in R^+$ に対して $\langle J, \lambda \rangle \geq 0$ としてよい．$\mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ を R により制限ルート分解し，

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in R^+} \mathfrak{l}_\lambda, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in R^+} \mathfrak{p}_\lambda$$

と表す．J は R に付随する特性元である．このとき，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 0} (\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{l}_\lambda), \quad \mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} (\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{l}_\lambda)$$

特に

$$\dim M = 2 \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} m_R(\lambda) \tag{3.2}$$

3.1 合同な二つの実形の交叉

交叉 $L \cap gL$ $(g \in G)$ について考察する．$G = F(I_\tau)(\exp \mathfrak{a})F(I_\tau)$ だから，ある $b_i \in F(I_{\tau_i}), a \in \exp \mathfrak{a}$ が存在して，$g = b_1 a b_2$．このとき，

$$L \cap gL = L \cap b_1 aL = b_1(L \cap aL)$$

ゆえに交叉 $L \cap gL$ を調べるためには $g = a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ としてよい．[13, Theorem 4.3] より

$$L = M \cap \mathfrak{p}, \quad aL = M \cap a\mathfrak{p}, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p} \cap a\mathfrak{p})$$

補題 3.1. $\mathfrak{p} \cap a\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_\lambda$

証明 $X \in \mathfrak{p}$ を

$$X = H_1 + \sum_{\lambda \in R^+} T_\lambda \qquad (H_1 \in \mathfrak{a}, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda)$$

と分解する．このとき，$aH_1 = H_1$,

$$aT_\lambda = \cos(\langle \lambda, H \rangle) T_\lambda + \sin(\langle \lambda, H \rangle) \frac{[H, T_\lambda]}{\langle \lambda, H \rangle}$$

が成り立つ．この等式は $\langle \lambda, H \rangle = 0$ の場合でも意味を持ち，全ての場合で成り立つ．これより主張が得られる． $\square$

上の補題から H が正則元（任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ ）ならば，交叉 $L \cap aL$ は離散的になることがわかる．この逆も成立することを次に示す．

定理 3.2. 交叉 $L \cap aL$ $(a = \exp H)$ が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである．

証明　H が正則元でなければ，交叉 $L_1 \cap aL_2$ が離散的にならないことを示せばよい．H を正則元でないとすると，ある $\lambda \in R^+$ が存在して，$\langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$．ある $X \in W(R)J$ が存在して，$\langle \lambda, X \rangle \neq 0$．$S_\lambda \in \mathfrak{l}_\lambda, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda$ を $||S_\lambda|| = ||T_\lambda|| = 1$，かつ，任意の $H' \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H', S_\lambda] = \langle \lambda, H' \rangle T_\lambda,\ [H', T_\lambda] = -\langle \lambda, H' \rangle S_\lambda,\ [S_\lambda, T_\lambda] = \lambda$$

を満たすようにとることができる ([10, p. 89, Lemma 1])．このとき，

$$\exp(tS_\lambda)X = X + \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|^2}(\cos(t\|\lambda\|) - 1)\lambda - \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|}\sin(t\|\lambda\|)T_\lambda \in L_1 \cap aL_2$$

よって，交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない．□

上の補題と [4, Ch. VII, Prop. 2.2] より，次が成り立つ．

定理 3.3. [13, Theorem 4.3] 交叉 $L \cap aL$ が離散的のとき，

$$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$$

$M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合を表している．用語の説明をしておこう．部分集合 $S \subset L$ が対蹠集合であるとは，任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となるときをいう．ここで，s_x は x に関する点対称である．L の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい，$\#_2 L$ で表す．$\#_2 L$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という．これらの概念は Chen-長野が導入した ([2])．

3.2　合同でない二つの実形の交叉

L_1, L_2 を M の二つの実形とする．L から決まる対象物に対する記号と対応する L_i から決まる対象物には同じ記号を用いる．ただし，添え字 i をつける．

以下，$\mathfrak{g}$ は単純で，L_1 と L_2 は互いに合同でないと仮定する．このとき，M は compact 型既約 Hermite 対称空間になる．合同でないという仮定から $I_{\tau_1} \not\sim I_{\tau_2}$ (τ_1 と τ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない) が成り立つ．compact 対称三対の分類と実形の分類から I_{τ_1} と I_{τ_2} は可換にとれる．このとき，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ を極大可換部分空間を $J \in \mathfrak{a}$ ととり，compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$ の定める重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す．$\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ の重複度をそれぞれ $m(\lambda), n(\alpha)$ と表す．任意の $\lambda \in \tilde{\Sigma}^+$ に対して $\langle \lambda, J \rangle \geq 0$ としてよい．対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ による分解

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2 &= \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{l}_\lambda, \quad \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{p}_\lambda, \\
\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2 &= V(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2), \\
\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1 &= V(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，J は $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に随伴した特性元であり，

$$\dim M = 2 \left(\sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} m(\lambda) + \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, J \rangle = 1} n(\alpha) \right) \tag{3.3}$$

交叉 $L_1 \cap gL_2$ $(g \in G)$ について考察する．$\exp \mathfrak{a}$ は G 内のトーラスで，$G = F(I_{\tau_1})(\exp \mathfrak{a})F(I_{\tau_2})$ が成り立つ ([3])．よって，任意の $g \in G$ について，$b_i \in F(I_{\tau_i}), a \in \exp \mathfrak{a}$ が存在して，$g = b_1 a b_2$．このとき，

$$L_1 \cap gL_2 = L_1 \cap b_1 a L_2 = b_1(L_1 \cap aL_2)$$

ゆえに交叉 $L_1 \cap gL_2$ を調べるためには $g = a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ としてよい．[13, Theorem 4.3] より

$$L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1, \quad aL_2 = M \cap a\mathfrak{p}_2, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p}_1 \cap a\mathfrak{p}_2)$$

補題 3.4. $\mathfrak{p}_1 \cap a\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a} \oplus \displaystyle\sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}} V_\alpha(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{l}_2)$

証明 $X \in \mathfrak{p}_2$ を

$$X = H_1 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} T_\lambda + Y + \sum_{\alpha \in W^+} X_\alpha$$
$$(H_1 \in \mathfrak{a}, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda, X_\alpha \in V_\alpha(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1), Y \in V(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1))$$

と分解する．このとき，$aH_1 = H_1, aY = Y$,

$$\begin{aligned}
aT_\lambda &= \cos(\langle \lambda, H \rangle) T_\lambda + \sin(\langle \lambda, H \rangle) \frac{[H, T_\lambda]}{\langle \lambda, H \rangle}, \\
aX_\alpha &= \cos(\langle \alpha, H \rangle) X_\alpha + \sin(\langle \alpha, H \rangle) \frac{[H, X_\alpha]}{\langle \alpha, H \rangle}
\end{aligned}$$

が成り立つ．この等式は $\langle \lambda, H\rangle = 0$ や $\langle \alpha, H\rangle = 0$ の場合でも意味を持ち，全ての場合で成り立つ．これより主張が得られる． □

上の補題から H が正則元（任意の $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ に対して $\langle \lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ）ならば，交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的になることがわかる．この逆も成立することを次に示す．

定理 3.5. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ $(a = \exp H)$ が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである．

証明　H が正則元でなければ，交叉 $L_1 \cap aL_2$ が離散的にならないことを示せばよい．H を正則元でないとすると，(i) ある $\lambda \in \Sigma^+$ が存在して，$\langle \lambda, H\rangle \in \pi\mathbb{Z}$，または，(ii) ある $\alpha \in W$ が存在して，$\langle \alpha, H\rangle \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ となる．

(i) の場合 : ある $X \in W(\Sigma)J$ が存在して，$\langle \lambda, X\rangle \neq 0$．$S_\lambda \in \mathfrak{l}_\lambda, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda$ を $||S_\lambda|| = ||T_\lambda|| = 1$，かつ，任意の $H' \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H', S_\lambda] = \langle \lambda, H'\rangle T_\lambda,\ [H', T_\lambda] = -\langle \lambda, H'\rangle S_\lambda,\ [S_\lambda, T_\lambda] = \lambda$$

を満たすようにとることができる ([10, p. 89, Lemma 1])．このとき，

$$\exp(tS_\lambda)X = X + \frac{\langle \lambda, X\rangle}{\|\lambda\|^2}(\cos(t\|\lambda\|) - 1)\lambda - \frac{\langle \lambda, X\rangle}{\|\lambda\|}\sin(t\|\lambda\|)T_\lambda \in L_1 \cap aL_2$$

よって，交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない．

(ii) の場合 : $\mathrm{span}(W(\Sigma)\alpha) = \mathfrak{a}$ となるので，$X \in W(\Sigma)J$ が存在して，$\langle \alpha, X\rangle \neq 0$．$V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2)$ と $V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$ の基底 $\{X_{\alpha,i}\}$ と $\{Y_{\alpha.i}\}$ を [5, Lemma 4.16] のようにとる．このとき，

$$\exp(tX_{\alpha,i})X = X + \frac{\langle \alpha, X\rangle}{\|\alpha\|^2}(\cos(t\|\alpha\|) - 1)\alpha - \frac{\langle \alpha, X\rangle}{\|\alpha\|}\sin(t\|\alpha\|)Y_{\alpha,i} \in L_1 \cap aL_2$$

よって，交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない． □

以下，交叉は離散的と仮定する．$M \cap \mathfrak{a}_i$ は L_i の大対蹠集合であり，

$$L_1 \cap aL_2 = M \cap \mathfrak{a} = G \cdot J \cap \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2, \quad M \cap \mathfrak{a}_i = W(R_i)J$$

が成り立つ．これより

$$W(\tilde{\Sigma})J \subset L_1 \cap aL_2 \subset M \cap \mathfrak{a}_i = W(R_i)J$$

が成り立つ．以上の準備の下で次の主結果を示す．

定理 3.6. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的であるとする．このとき，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

命題 3.7. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的であるとする．$\tilde{\Sigma}$ が B 型か C 型ならば，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2 = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}_1$$

証明 $W(\tilde{\Sigma})J \subset L_1 \cap aL_2 \subset W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ となることは証明済みである．$\tilde{\Sigma}$ は C 型または B 型なので $\tilde{\Sigma}$ に付随した $\mathfrak{a}$ の特性元全体は $W(\tilde{\Sigma})J$ で与えられる．$W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ の任意の元 X は $\mathfrak{a} - \{0\}$ の元で $(\mathrm{ad}X)^3 = -\mathrm{ad}X$ を満たす．よって $X \in W(\tilde{\Sigma})J$ となり $W(\tilde{\Sigma})J = L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ が成り立つ．同様に $L_1 \cap aL_2 = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}_1$ も成り立つ． □

定理 3.8. ([12, Theorems 5.1,5.2,5.4–5.7], [11, Theorem 1.1]) 以下の (M, L_1, L_2) について $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ．

(1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$．このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^n$.

(2) $(Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(3) $(SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(4) $(E_7/T \cdot E_6, T \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 8$.

(5) $(Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1})(s > 0, r < t)$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2r$.

(6) $(E_6/T \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 3$.

(7) $(G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = \begin{pmatrix} m+q \\ q \end{pmatrix}$.

証明　(1) から (5) については上の定理と下の表から直ちに従う (表の作成に [6],[8] を用いる).

	$(I_0(M), F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$
(1)	$(SU(2n), S(U(n) \times U(n)), SO(2n))$
(2)	$(Sp(2m), Sp(m) \times Sp(m), U(2m))$
(3)	$(SO(4m), U(2m), SO(2m) \times SO(2m))$
(4)	$(E_7, T \cdot E_6, SU(8))$
(5)	$(SO(r+s+t), SO(r) \times SO(s+t), SO(r+s) \times SO(t))$
(6)	$(E_6, F_4, Sp(4))$
(7)	$(SU(2(m+q)), Sp(m+q), SO(2(m+q)))$

	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	R_1
(1)	(I'-C_n)$= (C_n, D_n, C_n)$	C_n
(2)	(III-C_m)$= (C_m, C_m, C_m)$	C_m
(3)	(I-C_m)$= (C_m, C_m, D_m)$	C_m
(4)	(I-C_3)$= (C_3, C_3, D_3)$	C_3
(5)	(I-B_r)$= (B_r, B_r, A_1^r)$	B_r
(6)	(III-A_2)$= (A_2, A_2, A_2)$	A_2
(7)	(III-A_{m+q-1})$= (A_{m+q-1}, A_{m+q-1}, A_{m+q-1})$	A_{m+q-1}

(6) については包含関係 $W(\tilde{\Sigma})J \subset L_1 \cap aL_2 \subset W(R_1)J$ において $\#(W(\tilde{\Sigma})J) = \#(W(R_1)J) = 3$ だから主張が成り立つ.

(7) の場合は $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の重複度は 2 で，R_1 の重複度は 4 となる．J を R_1 に付随した特性元と見ると例 2.3 の J_i $(1 \leq i \leq m+q-1)$ のどれかであり，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に付随した特性元と見ると J_j $(1 \leq j \leq m+q-1)$ のどれかである．$\dim M = 8mq$ となることと (3.2), (3.3) より

$$8mq = \dim M = 2 \cdot 4 \cdot i(m+q-i) = 2 \cdot 2 \cdot 2j(m+q-j)$$

これより i と j は m または q となる．よって主張が成り立つ．　$\square$

定理 3.9. [12, Theorem 5.3] $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ のとき，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J,\ \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m,\ \#_2(L_1) = \binom{2m}{m},\ \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

証明　$(I_0(M), F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2})) = (SU(4m), Sp(2m), S(U(2m)\times U(2m)))$ となるので

$$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) = (\text{III-}C_m) = (C_m, C_m, C_m), \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$

命題 3.7 より $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J$, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$. $R_2 = C_{2m}$ だから $\#_2(L_2) = 2^{2m}$. $R_1 = A_{2m-1}$ だから例 2.3 における J_i $(1 \le i \le 2m-1)$ が存在して $J = J_i$. R_1 の重複度は 4 だから (3.2) より

$$8m^2 = \dim M = 2 \sum_{\lambda \in R_1^+, \langle \lambda, J\rangle = 1} 4 = 8i(2m-i)$$

これより $i = m$. よって $\#_2(L_1) = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}$ となる. □

定理 3.10. $(M, L_1, L_2) = (G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$ のとき, $L_1 \cap aL_2 = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$.

証明　$R_2 = A_{2m+2q-1}$ (重複度 1). J を R_2 に随伴した特性元と見たものは例 2.3 における $J_k (1 \le k \le 2m+2q-1)$ のどれかになる. (3.2) より

$$8mq = 2\#\{\lambda \in A_{2m+2q-1}^+ \mid \langle \lambda, J_k\rangle = 1\} = 2k(2m+2q-k)$$

よって, $k = 2m$ または $k = 2q$ であり,

$$\#_2(L_2) = \#(W(A_{2m+2q-1})J) = \begin{pmatrix} 2m+2q \\ 2m \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{so}(2(m+q))$, $\mathfrak{p}_2 = \{\sqrt{-1}X \mid X \in \mathfrak{sl}(2(m+q)), \mathbb{R}), {}^tX = X\}$,

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathfrak{su}(m+q), {}^tb = b \in \mathfrak{gl}(m+q, \mathbb{C}) \right\}$$

なので $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2$ として次がとれる.

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m+q} x_i & \\ & \sum_{i=1}^{m+q} x_i \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\},$$
$$\mathfrak{a}_2 = \left\{ H = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m+q} x_i & \\ & \sum_{i=1}^{m+q} y_i \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = 0 \right\}$$

ここで

$$S^1_{jk}=\begin{pmatrix}0 & E_{jk}\\ -E_{kj} & 0\end{pmatrix},\ S^2_{jk}=\begin{pmatrix}E_{jk}-E_{kj} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ S^3_{jk}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{jk}-E_{kj}\end{pmatrix}\in\mathfrak{l}_2,$$
$$T^1_{jk}=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}0 & E_{jk}\\ E_{kj} & 0\end{pmatrix},\ T^2_{jk}=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}E_{jk}+E_{kj} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$T^3_{jk}=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{jk}+E_{kj}\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_2$$

とおくと，$\{S^1_{jk},S^2_{jk},S^3_{jk}\}$ は $\mathfrak{l}_2$ の基底であり，任意の $H\in\mathfrak{a}_2$ に対して

$$\begin{aligned}
[H,S^1_{jk}]&=(x_j-y_k)T^1_{jk}, \quad [H,T^1_{jk}]=-(x_j-y_k)S^1_{jk},\\
[H,S^2_{jk}]&=(x_j-x_k)T^2_{jk}, \quad [H,T^2_{jk}]=-(x_j-x_k)S^2_{jk},\\
[H,S^3_{jk}]&=(y_j-y_k)T^3_{jk}, \quad [H,T^3_{jk}]=-(y_j-y_k)S^3_{jk}
\end{aligned}$$

よって，次のように同一視される．

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_2&=\left\{\sum_{i=1}^{p+q}(x_ie_i+y_ie_{i+p+q})\in\mathbb{R}^{2(m+q)}\mid\sum_{i=1}^{p+q}(x_i+y_i)=0\right\},\\
\mathfrak{a}&=\left\{\sum_{i=1}^{p+q}x_i(e_i+e_{i+p+q})\in\mathbb{R}^{2(m+q)}\mid\sum_{i=1}^{p+q}x_i=0\right\},\\
R_2^+&=\{e_i-e_j\mid 1\le i<j\le 2m+2q\}=A_{2m+2q-1}
\end{aligned}$$

J を R_2 に随伴した特性元と見たものは J_{2m} または J_{2q} であるが，たとえば $J=J_{2m}$ とする．$W(R_2)J$ を記述するために次の記号を準備する．$P_a(m+q)$ で $\{1,2,\cdots,m+q\}$ 内の a 個の元からなる部分集合全体を表す．$A\in P_a(m+q)$ に対して，$\bar{A}$ で A の $\{1,2,\cdots,m+q\}$ における補集合を表す．$A'=\{x+m+q\mid x\in A\}\subset\{m+q+1,\cdots,2m+2q\}$ とおく．任意の $X\in W(R_2)J$ に対して，ある $A\in P_a(m+q), B\in P_b(m+q), a+b=2m$ が存在して

$$\begin{aligned}
X&=\sum_{j\in A}e_j+\sum_{k\in B'}e_k-\frac{2m}{2m+2q}(\sum_{j\in A}e_j+\sum_{j\in\bar{A}}e_j+\sum_{k\in\bar{B}}e_k+\sum_{k\in\bar{B}'}e_k)\\
&=\frac{q}{m+q}(\sum_{j\in A}e_j+\sum_{k\in B'}e_k)-\frac{m}{m+q}(\sum_{j\in\bar{A}}e_j+\sum_{k\in\bar{B}'}e_k)
\end{aligned}$$

よって，$X \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow a = b = m, A = B$．このとき，

$$X = \frac{q}{m+q}\sum_{j\in A}(e_j + e_{j+m+q}) - \frac{m}{m+q}\sum_{j\in \bar{A}}(e_j + e_{j+m+q})$$

よって，

$$\#(W(R_2)J \cap \mathfrak{a}) = \binom{m+q}{q}$$

となり，主張が成り立つ．$J = J_{2q}$ のときも同様である． □

定理 3.11. $(M, L_1, L_2) = (E_6/T \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$ のとき，$L_1 \cap aL_2 = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$.

証明 $R_2 = E_6$．部分空間 $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_2$ は例 2.4 における $\mathfrak{a}^{(i)}$ のいずれかに一致する．(2.1) よりいずれの場合も $\#(W(R_2)J \cap \mathfrak{a}) = 3$．ゆえに主張が成り立つ． □

4 今後の課題

既約の仮定を落として，compact 型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉を考えると，どのようになるのだろうか？この場合には，対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の $\tilde{\Sigma}$ に当たる部分が既約ルート系ではなくなるので，これについて調べるためには対称三対の概念を拡張する必要があると思われる．また，二つの制限ルート系 $(R_1, \mathfrak{a}_1)$，$(R_2, \mathfrak{a}_2)$ と対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の関係を詳しく知るような理論（佐武図形のようなイメージ）があれば，より便利と思われる．

二つの実形と Hermann 作用 (の特別なもの) とは，今のところ対称三対を通じて間接的に関係しているが，直接的な関係はあるのだろうか？一般的な Hermann 作用も交叉の理論と関係があるのだろうか？

参考文献

[1] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Hermann, Paris, 1975.

[2] B.-Y.-Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to Borel and Serre, Trans. Amer. ¡ath. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 214–245.

[4] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[5] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, **63** (2011) 79–136.

[6] O. Ikawa, A note on symmetric triad and Hermann action, Proceedings of the workshop on differential geometry of submanifolds and its related topics, Saga, August 4–6, (2012), 203– 212, to appear.

[7] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmeric spaces, J. Differential Geom., **14** (1979), 179–185.

[8] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[9] M. Takeuchi, Stability of cretain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. Journ. **36** (1984), 293–314.

[10] M. Takeuchi, Modern spherical functions, Translations of mathematical monographs, **135**, Amer. Math. Soc.

[11] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.

[12] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **64** (2012) 1297–1332.

[13] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.