コンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の交叉

田中 真紀子（東京理科大学）

部分多様体幾何とリー群作用2012

2012年9月3日-4日 東京理科大学

田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

《研究の経緯》

田崎:複素２次超曲面の**2**つの実形の交叉の研究 **(Tohoku Math.J., 2010)**

・$Q_n(\mathbb{C})$の実形$(S^p \times S^{n-p})/\mathbb{Z}_2$ $(0 \leq p \leq [n/2])$ に対して**2**つの実形の交叉を具体的に決定

・交叉は**(**大**)**対蹠集合でその個数は実形の**2-number**に一致

T.-田崎：既約コンパクト型 **Hermite**対称空間の実形の交叉の研究 **(J.Math.Soc.Japan, 2012)**

★コンパクト型**Hermite**対称空間の２つの実形の交叉は対蹠集合

·既約コンパクト型**Hermite**対称空間の２つの実形の交点数を決定

$\Longrightarrow$ **Floer**ホモロジーへの応用**(**入江-酒井-田崎**)**

（これらについては昨年の理科大研究集会で田崎氏が講演）

T.-田崎　**(preprint)**

★の証明の不備を修正

非既約コンパクト型**Hermite**対称空間の２つの実形の交点数を決定

《講演の内容》

1．準備

2．非既約コンパクト型**Hermite**対称空間の実形

3．**2**つの実形の交叉

1．準備

M : **Riemann** 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: <u>対蹠集合</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^{\forall}x, y \in S,\ s_x(y) = y$

M の <u>**2-number**</u> $\#_2 M$

$$\#_2 M := \textbf{sup}\{\#S \mid S \subset M \ : \ 対蹠集合\}$$

対蹠集合 S は $\#S = \#_2 M$ を満たすとき <u>大対蹠集合</u>

・**B.-Y.Chen - 長野 (Trans.A.M.S, 1988)** により導入

・$\#_2 M < \infty$

・M が対称 R 空間ならば $\#_2 M = \textbf{dim} H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ **(竹内)**

$M = S^n$

$S = \{x, -x\}$：大対蹠集合，$\#_2 S^n = 2$

$M = \mathbb{R}P^n$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$：$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底

$S = \{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$：大対蹠集合，$\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$

$M = U(n)$

$S = \{\textbf{diag}\{\pm 1, \ldots, \pm 1\}\}$：大対蹠集合，　$\#_2 U(n) = 2^n$

M：コンパクト**Riemann**対称空間

G：Mの等長変換群の単位連結成分

K：$o \in M$におけるイソトロピー部分群

$$F(s_o, M) = \{x \in M \mid s_o(x) = x\} = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

ただし、$M_0^+ = \{o\}$とする。

各連結成分M_j^+はoに関する<u>極地</u>とよばれる。極地はK-軌道である。

$M = S^n$，　$F(s_o, M) = \{o, -o\}$

$M = \mathbb{R}P^n$，　$o = \mathbb{R}e_1$

$F(s_o, M)$

$= \{o\} \cup \{\langle e_2, \ldots, e_{n+1}\rangle$ の1次元部分空間全体$\}(\cong \mathbb{R}P^{n-1})$

M：**Hermite**対称空間

τ：Mの対合的反正則等長変換

$F(\tau, M)$は連結全測地的**Lagrange**部分多様体でMの<u>実形</u>とよばれる。

既約コンパクト型**Hermite**対称空間の実形の分類：**Leung**，竹内

既約でない場合の実形の分類：**T.**-田崎（今回の結果）

$M = G_k(\mathbb{C}^n)$:$\mathbb{C}^n$のk次元複素線形部分空間全体からなる**Grassmann**多様体

Mの実形：$G_k(\mathbb{R}^n)$,

$G_l(\mathbb{H}^m)$　($k = 2l, n = 2m$のとき),

$U(k)$　($n = 2k$のとき)

2．非既約コンパクト型Hermite対称空間の実形

M：Hermite対称空間，　τ：Mの反正則等長変換

写像$M \times M \ni (x, y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x)) \in M \times M$はHermite対称空間$M \times M$の対合的反正則等長変換

これにより定まる実形は$D_\tau(M) := \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$

$D_\tau(M)$をτにより定まるMの対角実形とよぶ。

$I(M)$：Mの等長変換全体のなす群

$A(M)$：Mの正則等長変換全体のなす群

命題2.1

M：既約コンパクト型Hermite対称空間

$\Longrightarrow$ $I(M) - A(M)$の元は反正則等長変換，$I(M) - A(M)$の連結成分と対角実形の合同類は対応$\tau \mapsto D_\tau(M)$により1：1

ここで、**2**つの対角実形は$A(M \times M)$の単位連結成分の元で互いに写り合うとき<u>合同</u>であるという。

注意： $g_1, g_2 \in A(M)$に対して

$$(g_1, g_2) D_\tau(M) = D_{g_2 \tau g_1^{-1}}(M)$$

補題2.2 (村上, 竹内)

M **：** 既約コンパクト型**Hermite**対称空間

$I_0(M), A_0(M)$ **：** $I(M), A(M)$の単位連結成分

$\Longrightarrow$

(A) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})(m \geq 2),\ G_m(\mathbb{C}^{2m})(m \geq 2)$

$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ A(M)/A_0(M) \cong \mathbb{Z}_2$

(B) それ以外のM

$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2,\ A(M) = A_0(M)$

仮定のもとで$I_0(M) = A_0(M)$

したがって、いずれも場合も$I(M)/A(M) \cong \mathbb{Z}_2$

特に、**(A)**のMの積内の対角実形の合同類は**2**つであり、**(B)**のMの積内の対角実形の合同類は**1**つである。

定理2.3（T.-田崎）

コンパクト型**Hermite**対称空間の実形は、既約因子の実形と既約因子から定まる対角実形の積になる。

定理2.4（T.-田崎）

$M = M_1 \times \cdots \times M_m$：コンパクト型**Hermite**対称空間$M$の既約因子への分解

L_1, L_2：Mの実形

$\Longrightarrow \quad L_i = L_{i,1} \times \cdots \times L_{i,n} \quad (i = 1, 2)$

$L_{1,a}, L_{2,a}$ $(1 \leq a \leq n)$の組み合わせは次のいずれか。

(1) ともに同じ既約因子の実形

(2) 必要なら$M_j (1 \leq j \leq m)$を並べ替えて

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}$$

ただし、$N_1 \subset M_1,\ N_{2s+1} \subset M_{2s+1}$は実形、$\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s)$は反正則等長写像

(3) 必要なら$M_j (1 \leq j \leq m)$を並べ替えて

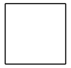
$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3}) \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

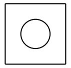
ただし、$N_1 \subset M_1$, $N_{2s} \subset M_{2s}$は実形、$\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s-1)$は反正則等長写像

(4) 必要なら$M_j (1 \leq j \leq m)$を並べ替えて

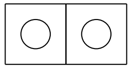
$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

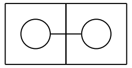
ただし、$\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s-1)$, $\tau_{2s} : M_{2s} \to M_1$は反正則等長写像

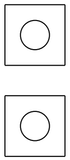
 ： 既約コンパクト型**Hermite**対称空間

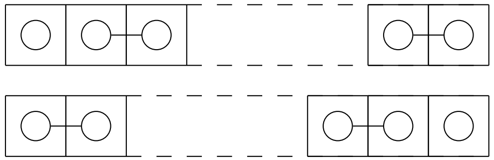
 ： その実形

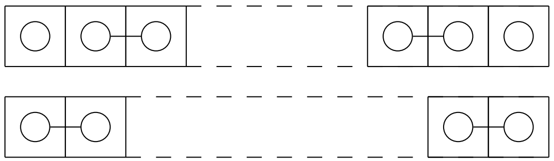
 ： **2**つの既約コンパクト型**Hermite**対称空間の積

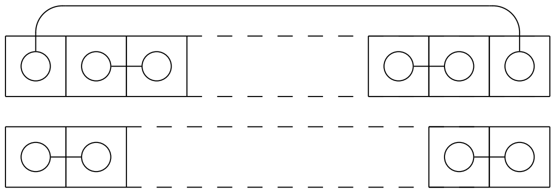
 ： 各既約因子の実形の積

 ： 対角実形

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

3．2つの実形の交叉

定理**3.1**（**T.**-田崎）

M：コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2：Mの実形，交叉は離散的

$\Longrightarrow$

$L_1 \cap L_2$はL_1とL_2の対蹠集合

証明の概略：

Mの正則断面曲率> 0より$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$（田崎）

Mの原点$o \in L_1 \cap L_2$と仮定してよい

${}^\forall p \in L_1 \cap L_2 - \{o\}$に対して$s_o(p) = p$を示せばよい

A_i：o, pを含むL_iの極大トーラス $(i = 1, 2)$

$\mathfrak{a}_i$：A_iに対応する極大可換部分空間

A_i'：A_i を含む M の極大トーラス

$\mathfrak{a}_i'$：A_i' に対応する極大可換部分空間

$\mathbf{Exp}_o tH_2$ $(H_2 \in \mathfrak{a}_2)$：A_2 における o と p を結ぶ最短測地線

$\Longrightarrow$ A_2' においても最短（A_2 の凸性）

$\Longrightarrow$ $\mathfrak{a}_2'$ に関する制限ルート系の基本形 Π_2 をうまく選び、Π_2 に対して定まる基本胞体 S_2 が $H_2 \in \bar{S}_2$ を満たすようにできる

$\bar{S}_2 = \bigcup_{\Delta \subset \Pi_2^{\#}} S_2^{\Delta}$（直和）より $H_2 \in S_2^{\Delta_2}$ $(\exists^1 \Delta_2 \in \Pi_2^{\#})$

竹内による基本胞体に関する結果を用いることにより

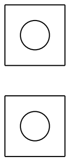
$$\mathbf{Exp}_o S_2^{\Delta_2} \subset A_1' \cap A_2'$$

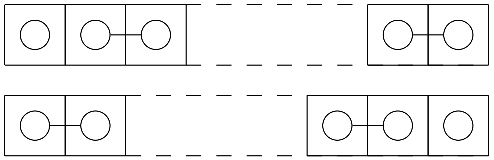
既約な場合、M の制限ルート系は C 型か BC 型であることと竹内の基本胞体に関する結果を用いた議論により

$$\mathbf{Exp}_o S_2^{\Delta_2} \subset A_1 \cap A_2$$

交叉が離散の仮定 $\Longrightarrow$ $S_2^{\triangle 2}$ は $\bar{S}_2$ の頂点 $\Longrightarrow$ $s_o(p) = p$

非既約の場合、定理**2.4**の**(1)-(4)**の場合を考えれば十分

(1)  $\Longrightarrow$ 既約の場合

(2) 

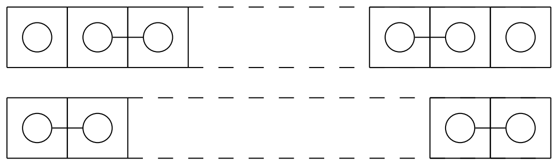
$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \\ \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s+1})\}$$

$\Longrightarrow$ 既約の場合に帰着

注意：$(\tau_{2s}\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ は M_1 の実形

(3) 

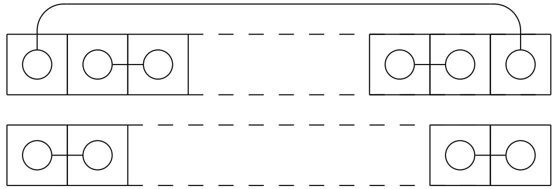
$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$

$$D_{\tau_1}(M_1)\times D_{\tau_3}(M_3)\times\cdots\times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3})\times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s-1}\cdots\tau_1)^{-1}(N_{2s})\}$$

$\Longrightarrow$ 既約の場合に帰着

(4) 

$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1}\cdots\tau_1(x)) \\ \mid (x, \tau_{2s}^{-1}(x)) \in D_{\tau_{2s-1}\cdots\tau_1}(M_1) \cap D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)\}$$

$\Longrightarrow$ **2**つの対角実形の交叉

以上により、非既約の場合には**2**つの対角実形の交叉について議論すれば十分 $\Longrightarrow$ 既約の場合と類似の議論

M：コンパクト型**Hermite**対称空間

$A_0(M)$：Mの正則等長変換群の単位連結成分

L_1, L_2：Mの実形

L_1とL_2は$A_0(M)$の元で互いに写り合うとき<u>合同</u>であるという。

定理**3.2**（**T.**-田崎）

M：コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2：Mの合同な実形，交叉は離散的

$\Longrightarrow$

$L_1 \cap L_2$はL_1とL_2の大対蹠集合

i.e., $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$

定理**3.3**（**T.**-田崎）

M：既約コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2：Mの実形，交叉は離散的，$\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

$\Longrightarrow$

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})(m \geq 2)$で、$L_1$は$G_m(\mathbb{H}^{2m})$と合同、$L_2$は$U(2m)$と合同ならば

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2$$

(2) それ以外の場合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 \ (\leq \ \#_2 L_2)$$

定理**3.2**、定理**3.3**の証明には極地に関する数学的帰納法を用いる。

補題3.4

M：コンパクト型**Hermite**対称空間，$o \in M$

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

(1) L：Mの実形，$o \in L$

$$\Longrightarrow \quad F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+)$$

(2) L_1, L_2：Mの実形，$o \in L_1 \cap L_2$，交叉は離散的

$$\Longrightarrow \quad L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\}$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\right\}$$

定理3.5（T.-田崎）

M：既約コンパクト型**Hermite**対称空間

τ_1, τ_2：Mの反正則等長変換

$D_{\tau_1}(M)$，$D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$の交叉が離散的

$\Longrightarrow$

(1) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})\ (m \geq 2)$，$\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$ならば

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M$$

(2) $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})\ (m \geq 2)$，$\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$ならば

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M$$

(3) それ以外の場合

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M$$

まとめ

コンパクト型**Hermite**対称空間 M の**2**つの実形 L_1, L_2 の交点数を調べることは、L_1, L_2 が

(1) 既約因子の**2**つの実形

(2) **2**つの対角実形

の場合に帰着される。

(1)のとき: $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$, $\{L_1, L_2\} = \{G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m)\}$ の場合を除いて交点数は**min**$\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$ に一致

(2)のとき： 対角実形 $L_1 = D_{\tau_1}(M), L_2 = D_{\tau_2^{-1}}(M)$ の交点数は、$M = Q_{2m}(\mathbb{C}), G_m(\mathbb{C}^{2m}), \tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$ の場合を除いて $\#_2 M$ に一致