

コンパクト対称空間の対蹠集合と 全測地的部分多様体の交叉

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*

1. はじめに

Tasaki は [21] で複素 2 次超曲面の全測地的 Lagrange 部分多様体である実形の交叉を具体的に記述し、それらが対蹠集合になっていることを発見した。対蹠集合は Chen-Nagano が 1988 年に [3] で導入した概念で、任意の点での点対称が他のすべての点を固定するような有限部分集合である。[17] では、Tasaki の結果を拡張し、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉が対蹠集合になることを示し、特に、二つの実形が合同のときには、それらの交叉が大対蹠集合になることを示した。さらに、コンパクト型 Hermite 対称空間が既約の場合に、二つの実形が合同でないときにもそれらの交点数を求めた。その後、コンパクト型 Hermite 対称空間が既約でない場合に実形の交叉の対蹠性の証明に不備があることがわかり、[18] でその修正を行った。その際に、非既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形について調べる必要が生じ、[20] で非既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の分類および二つの実形の組み合わせの分類を与え、さらに、二つの実形の交点数を求めた。これらの一連の研究では、極地とよばれる全測地的部分多様体を利用した帰納法の議論を用いる手法が度々使われている。この手法はより広いコンパクト対称空間のクラスの中である種の全測地的部分多様体の交叉を調べる場合にも利用できる。

本講演では、コンパクト対称空間の極地を導入した Chen-Nagano によるコンパクト対称空間の理論を紹介し、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する我々の結果、さらには現在進行中の研究について触れたい。

2. Chen-Nagano 理論

既約コンパクト対称空間は一組の極地と子午空間で決まる、というのが Chen-Nagano 理論の基本原則である。極地と子午空間の概念が最初に登場するのは [2] であるが、この論文では極地、子午空間という用語は用いられておらず、それぞれ M_+ 、 M_- と記されている。この論文では M_+ 、 M_- の基本的な性質を調べ、既約コンパクト対称空間 M について (M_+, M_-) の分類表を与えているが、この表では局所同型類しかわからない表記になっている。(実際には $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ であるものが $S^2 \times S^2$ と記載されている。) [3] では記号 M_+ 、 M_- がそれぞれ M^+ 、 M^- に変わり、この論文以降ではこの記法が用いられる。極地 (polar) という用語はこの論文で初めて用いられ、子午空間 (meridian) という用語は [12] で初めて用いられる。[11] では既約コンパクト対称空間の極地を局所同型類内での区別も込めて完全な形で与えている。また、この論文ではコンパクト対称空間の圏という考え方が導入され、コンパクト対称空間 M の極地の分類を \mathbb{Z}_2 (点対称を恒等写像と定めて離散対称空間とみなす) から M への準同型写像の分類ととらえている。[12] では既約コンパクト対称空間が一組の極地と子午空間で決まることの証明を

本研究は科研費 (課題番号:23540108) の助成を受けたものである。

* 〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部数学科

e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp

与えている。

2.1. 極地と子午空間

以下では対称空間は Riemann 対称空間とする。\$M\$ を対称空間とし、\$M\$ の点 \$x\$ に対して \$s_x\$ を \$x\$ における点対称とする。すなわち、\$s_x : M \to M\$ は \$M\$ の等長変換で (i) \$s_x\$ は対合的 (\$s_x \circ s_x = \text{id}_M\$)、(ii) \$x\$ は \$s_x\$ の孤立不動点、を満たすものである。\$M\$ の点 \$o\$ に対して \$s_o\$ の不動点集合 \$F(s_o, M) = \{x \in M \mid s_o(x) = x\}\$ を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

と連結成分 \$M_j^+\$ の直和として表す。ただし、\$M_0^+ = \{o\}\$ とする。このとき、各 \$M_j^+\$ を \$M\$ の \$o\$ に関する極地 (**polar**) とよぶ。極地が一点だけからなる場合には極 (**pole**) とよぶ。点対称 \$s_o\$ の定義により \$o\$ はつねに極であり、これを自明な極とよぶ。

\$M\$ の極地は全測地的部分多様体である。一般に、\$N\$ が \$M\$ の全測地的部分多様体ならば、任意の点 \$x \in N\$ に対して点対称 \$s_x\$ は \$N\$ を保ち、\$s_x\$ の \$N\$ への制限は誘導計量に関して \$N\$ の点対称になるので、\$N\$ は対称空間である。

例 2.1 \$M = S^n\$ (\$n\$ 次元球面) の点 \$o\$ に対して \$F(s_o, M) = \{o, -o\}\$ となるので、極地は \$M_0^+ = \{o\}\$ と \$M_1^+ = \{-o\}\$ であり、ともに極である。

例 2.2 \$M = \mathbb{R}H^n\$ (\$n\$ 次元実双曲空間) の点 \$o\$ に対して \$F(s_o, M) = \{o\}\$ となるので、極地は自明な極のみである。一般に、非コンパクト型対称空間の極地は自明な極のみである。

例 2.3 \$e_1, \dots, e_{n+1}\$ を \$\mathbb{R}^{n+1}\$ の正規直交基底とする。\$M = \mathbb{R}P^n\$ (\$n\$ 次元実射影空間) の点 \$o = \langle e_1 \rangle\$ に対して \$F(s_o, M) = \{o\} \cup \{V \subset \langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle : 1 \text{ 次元線形部分空間}\}\$ となるので、極地は \$M_0^+ = \{o\}\$ と \$M_1^+ \cong \mathbb{R}P^{n-1}\$ である。

例 2.4 \$G\$ を両側不変計量をもつコンパクト Lie 群とすると \$G\$ は対称空間で、点対称は \$x, y \in G\$ に対して \$s_x(y) = xy^{-1}x\$ で与えられる。\$o\$ として単位元 \$e\$ を取ると \$F(s_e, G) = \{x \in G \mid x^2 = e\}\$ となる。\$G = U(n)\$ の場合には

$$F(s_e, G) = \bigcup_{j=0}^n \text{Ad}(U(n)) \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_j, 1, \dots, 1)$$

となるので、極地は \$M_0^+ = \{e\}\$ および \$M_j^+ \cong G_j(\mathbb{C}^n)\$ (\$1 \leq j \leq n\$) である。ただし \$G_j(\mathbb{C}^n)\$ は \$\mathbb{C}^n\$ の \$j\$ 次元複素線形部分空間全体からなる Grassmann 多様体である。\$M_n^+ = \{\text{diag}(-1, \dots, -1)\}\$ は極である。

以下では、\$M\$ をコンパクト連結対称空間とする。

\$x \in M\$ は \$s_x\$ の孤立不動点であることから、\$s_x\$ の \$x\$ における微分 \$(ds_x)_x : T_x M \to T_x M\$ は恒等変換の \$-1\$ 倍に等しい。また、\$y \in M\$ に対して \$s_x(y) = y\$ ならば、\$(ds_x)_y\$ は \$T_y M\$ に作用し、\$s_x\$ が対合的であることから \$(ds_x)_y\$ も対合的でその固有値は \$\pm 1\$ である。

\$M_j^+\$ を \$M\$ の \$o\$ に関する極地とする。\$p \in M_j^+\$ に対して \$s_o(p) = p\$ であるから \$T_p M\$ は \$(ds_o)_p\$ の \$+1\$ 固有空間 \$V_+\$ と \$-1\$ 固有空間 \$V_-\$ の直和 \$T_p M = V_+ \oplus V_-\$ に分解し、\$V_+ = T_p M_j^+\$ である。また \$(ds_p)_p = -\text{Id}\$ より、\$V_+, V_-\$ はそれぞれ合成写像 \$(ds_p)_p \circ (ds_o)_p = d(s_p \circ s_o)_p\$

の $-1, +1$ 固有空間に一致する。このとき、 V_- を p での接ベクトル空間とする全測地的部分多様体 $M_j^-(p)$ が存在するが、 $M_j^-(p)$ は $F(s_p \circ s_o, M)$ の p を含む連結成分である。 $M_j^-(p)$ を p における M_j^+ に対する子午空間 (meridian) とよぶ。

G を M の等長変換群の単位連結成分とし、 $K = \{g \in G \mid go = o\}$ を o におけるイソトロピー部分群とする。

命題 2.5 (Chen-Nagano [2]) M の o に関する極地 M_j^+ は K 軌道である。

$p, q \in M_j^+$ に対して、 p における子午空間 $M_j^-(p)$ と q における子午空間 $M_j^-(q)$ は K 合同である。また、 $o, o' \in M$ に対して $F(s_o, M)$ と $F(s_{o'}, M)$ は G 合同になるので、 o に関する極地はそれぞれ対応する o' に関する極地と G 合同である。したがって、極地や子午空間を扱うときには、 M のある点に関する極地 M_j^+ と、その極地 M_j^+ のある点における子午空間 M_j^- を考えれば十分である。

注意 2.6 Riemann 多様体の対合的等長変換による固定点集合の連結成分は鏡映部分多様体とよばれる。極地や子午空間は鏡映部分多様体である。

定理 2.7 (Nagano [12]) 既約コンパクト対称空間 M, N が等長的であるための必要十分条件は、 M における一組の極地と子午空間と、 N における一組の極地と子午空間で、それぞれ等長的なものが存在すること。

この定理によりコンパクト既約対称空間は、理論上は一組の極地と子午空間でその構造が決まることになる。その一例として次が成り立つ。

命題 2.8 (Nagano [12]) M を既約対称空間とする。このとき、 M がコンパクト型 Hermite 対称空間であるための必要十分条件は、ともにコンパクト型 Hermite 対称空間であるような極地と子午空間の組が存在することである。

ここで、対称空間 M がコンパクト型であるとは、 M はコンパクト対称空間で M の等長変換群が半単純 Lie 群であること。

2.2. 対蹠集合と 2-number

M をコンパクト対称空間とする。 M の部分集合 S が任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ を満たすとき、 S は対蹠集合 (antipodal set) であるという。対蹠集合 S は離散集合で有限である。

M の 2-number $\#_2 M$ を

$$\#_2 M := \sup\{\#S \mid S \subset M : \text{対蹠集合}\}$$

で定義する。 $\#_2 M$ は有限であることがわかる。対蹠集合 S が $\#S = \#_2 M$ を満たすとき大対蹠集合 (great antipodal set) とよぶ。

例 2.9 S^n の点 o に対して $S = \{o, -o\}$ は対蹠集合であり、3 点以上からなる対蹠集合は存在しないので、 $\#_2 S^n = 2$ であり S は大対蹠集合である。

例 2.10 $\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$ であり、 \mathbb{R}^{n+1} の正規直交基底 e_1, \dots, e_{n+1} に対して $\{\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_{n+1} \rangle\}$ は $\mathbb{R}P^n$ の大対蹠集合である。

例 2.11 G をコンパクト Lie 群とする。 G の対蹠集合 S が単位元 e を含むならば、任意の $x \in S$ は $x^2 = e$ を満たし、 S の任意の二つの元は可換になる。したがって、 S が大対蹠集合ならば可換部分群になる。したがって S は $(\mathbb{Z}_2)^r$ と同型である。

注意 2.12 Borel-Serre [1] はコンパクト Lie 群 G に対して、 $(\mathbb{Z}_p)^r$ (p : 素数) と同型な G の部分群が存在する最大の r を G の p -rank と定義した。 G の 2-rank $r_2(G)$ に対して $\#_2 G = 2^{r_2(G)}$ が成り立つ。

S を M の大対蹠集合とする。このとき、 $o \in S$ に対して $S \subset F(s_o, M)$ となる。 $F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$ とすると、 $S \cap M_j^+$ は極地 M_j^+ の対蹠集合であるから $\#(S \cap M_j^+) \leq \#_2 M_j^+$ である。したがって

$$\#_2 M \leq \sum_{j=0}^r \#_2 M_j^+$$

が成り立つ。

コンパクト対称空間は、あるコンパクト型対称空間の線形イソトロピー軌道として実現されるとき対称 R 空間 (symmetric R -space) とよばれる。

定理 2.13 (Takeuchi [16]) M を対称 R 空間とし、 M_o^+, \dots, M_r^+ を M の極地とすると次が成り立つ。

$$\#_2 M = \sum_{j=0}^r \#_2 M_j^+$$

定理 2.14 (Takeuchi [16]) M を対称 R 空間とし、 $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ を M の \mathbb{Z}_2 係数ホモロジー群とすると次が成り立つ。

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$$

コンパクト型 Hermite 対称空間は、コンパクト半単純 Lie 群の随伴軌道として実現されるので、対称 R 空間である。

定理 2.15 (Chen-Nagano [3]) コンパクト対称空間 M に対して $\#_2 M \geq \chi(M)$ が成り立つ。 M がコンパクト型 Hermite 対称空間ならば $\#_2 M = \chi(M)$ が成り立つ。ただし、 $\chi(M)$ は M のオイラー数である。

定理 2.16 (Tanaka-Tasaki [19]) 対称 R 空間 M の対蹠集合について次が成り立つ。

- (A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。
- (B) 二つの大対蹠集合は合同である。

ただし、二つの部分集合が合同とは、 M の等長変換群の単位連結成分の元で写り合うことである。

$SU(4)/\mathbb{Z}_4$ には極大対蹠集合であるが、大対蹠集合ではないものが存在する。したがって性質 (A) を満たさない ([19])。

注意 2.17 最近の奥田氏と栗原氏による研究で、コンパクト対称空間の対蹠集合とデザイン理論との関係が扱われている。

3. コンパクト型 Hermite 対称空間の実形

3.1. 定義と例

M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 τ を M の対合的反正則等長変換とする。このとき、 $L := F(\tau, M)$ を M の実形 (real form) とよぶ。実形は連結であることがわかり、 M の全測地的 Lagrange 部分多様体である。

例 3.1 CP^n に対して τ を複素共役とすれば $F(\tau, M) = \mathbb{R}P^n$ である。より一般に実 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は複素 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{C}^n)$ の実形である。

例 3.2 $G_n(\mathbb{R}^{2n})$ は $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ の実形であるが、これ以外にも実形が存在する。 $U(n)$ および $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ (ただし $n = 2m$) も $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ の実形である。

既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の分類は Leung [8], Takeuchi [15] により与えられている。

M を Hermite 対称空間とし、 τ を M の反正則等長変換とする。このとき、写像

$$M \times M \ni (x, y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x)) \in M \times M$$

は $M \times M$ の対合的反正則等長変換となる。これにより定まる $M \times M$ の実形

$$D_\tau(M) := \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$$

を τ により定まる対角実形 (diagonal real form) とよぶ。

コンパクト型 Hermite 対称空間 M に対して、 $I(M), A(M)$ をそれぞれ M の等長変換群、正則等長変換群とし、 $I_0(M), A_0(M)$ をそれぞれの単位連結成分とする。このとき $I_0(M) = A_0(M)$ である ([5] Chap.VIII, Lemma 4.3)。

命題 3.3 (Tanaka-Tasaki [20]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とする。 $I(M) - A(M)$ の元はすべて反正則等長変換であり、対応 $\tau \in I(M) - A(M) \mapsto D_\tau(M)$ により、 $I(M) - A(M)$ の連結成分と対角実形の合同類は 1 対 1 に対応する。

命題 3.4 (Tanaka-Tasaki [20]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ を既約因子への分解とする。(各 M_j は既約コンパクト型 Hermite 対称空間である。) このとき、 M の実形は、既約因子の実形と、同型な二つの既約因子 M_i, M_j の直積 $M_i \times M_j$ の対角実形のいくつかの直積である。

3.2. 対称 R 空間と実形

コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間として特徴づけられる。

定理 3.5 (Takeuchi [15]) 対称 R 空間はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形として実現できる。逆に、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間である。

定理 3.6 (Takeuchi [15], Loos [9]) M が対称 R 空間であるための必要十分条件は、 M の極大トーラスの単位格子が、互いに直交する長さの等しいベクトルで生成されることである。

ここで、 Γ が極大トーラス A の単位格子であるとは、 $o \in A$ に対して、 $\Gamma = \{X \in T_o A \mid \text{Exp}_o X = o\}$ となることである。

4. コンパクト対称空間の全測地的部分多様体の交叉

4.1. コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の二つの実形 L_1, L_2 の交叉を考える。まず、命題 3.4 に基づき L_1, L_2 の可能な組み合わせを考える。

定理 4.1 (Tanaka-Tasaki [20]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間、 L_1, L_2 を M の実形とする。 $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m$ を M の既約因子への分解とする。このとき、 L_1, L_2 は

$$L_1 = L_{1,1} \times L_{1,2} \times \cdots \times L_{1,n}, \quad L_2 = L_{2,1} \times L_{2,2} \times \cdots \times L_{2,n} \quad (1 \leq n \leq m)$$

と分解され、各 a ($1 \leq a \leq n$) に対して $L_{1,a}$ と $L_{2,a}$ の組み合わせは次の (1) から (4) のいずれかである。

- (1) とともに M のある同じ既約因子の実形
- (2) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s$) および実形 $N_1 \subset M_1, N_{2s+1} \subset M_{2s+1}$ によって定まる二つの実形

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}.$$

- (3) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s-1$) および実形 $N_1 \subset M_1, N_{2s} \subset M_{2s}$ によって定まる二つの実形

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3}) \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}).$$

- (4) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s-1$) および $\tau_{2s} : M_{2s} \rightarrow M_1$ によって定まる二つの実形

$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}).$$

既約コンパクト型 Hermite 対称空間を \square で表し、その中の実形を \square で表す。二つの既約コンパクト型 Hermite 対称空間の積を $\square\square$ で表し、各既約因子の実形の積を $\square\square$ で表し、対角実形を $\square+\square$ で表す。三つ以上の既約コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形についても同様に表す。このとき、定理 4.1 の結果は次のように表すことができる。

$$(1) \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c} \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \\ \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{c} \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \\ \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{c} \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \\ \square+\square \quad \cdots \quad \square+\square \end{array}$$

注意 4.2 二つの対角実形の組は (4) の特別な場合 ($s = 1$) である。

定理 4.3 (Tanaka-Tasaki [17], [18]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。 M の実形 L_1, L_2 の交叉が離散的ならば、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合である。

次の命題によりコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形は必ず交わることがわかる。

命題 4.4 (Cheng [4], Tasaki [21]) M を正則断面曲率が正のコンパクト Kähler 多様体とし、 L_1, L_2 を M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体とすると、 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ である。

定理 4.3 の証明の概略を述べる。 $o \in L_1 \cap L_2$ とする。 $L_1 \cap L_2$ が二点以上からなることを考えればよいので $p \in L_1 \cap L_2 - \{o\}$ を任意にとり、 o と p が L_1 と L_2 において対蹠的であること、つまり、 o と p を含む L_i ($i = 1, 2$) の閉測地線 γ が存在し、 γ 上で o と p が対蹠点になっていることを示せばよい。 o, p を含む L_i における極大トーラス A_i をとり、さらに、 A_i を含む M の極大トーラス A'_i をとる。 M の制限ルート系に関して極大トーラスの基本胞体を考え、Takeuchi [14] による結果を用いた議論により、 p を含む基本胞体の壁が 0 次元、つまり、頂点であることがわかり、 M の極大トーラスの性質 (定理 3.6) から o と p が M において対蹠的、したがって L_1 と L_2 においても対蹠的であることがわかる。

この議論の中で、 M が既約の場合には、 M の制限ルート系が C 型か BC 型であることを用いる。 M が既約でない場合には、定理 4.1 により、二つの実形 L_1, L_2 の交叉を調べることは (1) から (4) のそれぞれの場合に $L_{1,a}$ と $L_{2,a}$ ($1 \leq a \leq n$) の交叉を調べることに帰着される。 (1) は既約の場合である。 (2) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s} \cdots \tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})\}$$

となり、 $(\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ は既約因子 M_1 の実形なので、この場合は既約の場合に帰着される。 (3) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})\}.$$

となり、 $(\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})$ は既約因子 M_1 の実形なので、この場合も既約の場合に帰着される。 (4) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \mid (x, \tau_{2s}^{-1}(x)) \in D_{\tau_{2s-1} \cdots \tau_1}(M_1) \cap D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)\}$$

であり、 $D_{\tau_{2s-1} \cdots \tau_1}(M_1)$ と $D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)$ は $M_1 \times M_{2s} \cong M_1 \times M_1$ 内の対角実形だから、この場合はこれらの交叉を調べることに帰着されるが、既約の場合と同様な議論で証明できる。

二つの実形が合同な場合には次が成り立つ。

定理 4.5 (Tanaka-Tasaki [17]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M の合同な実形で交叉が離散的であるとすると、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、 $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

既約コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交点数について次の結果を得た。

定理 4.6 (Tanaka-Tasaki [17]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M の二つの実形で交叉が離散的であるとする。 $\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$ とする。

- (1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ ($m \geq 2$) であり、 L_1 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、 L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

- (2) それ以外の場合、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 の大対蹠集合になる。すなわち次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 (\leq \#_2 L_2).$$

コンパクト型 Hermite 対称空間が既約でない場合には、対角実形同士の交叉について考えれば十分なので、その場合に交点数を調べた。

定理 4.7 (Tanaka-Tasaki [20]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とする。 M の反正則等長変換 τ_1, τ_2 から定まる対角実形 $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$ の交叉が離散的になると仮定する。

- (1) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})$ ($m \geq 2$) であり、 $\tau_2 \tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M.$$

- (2) $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})$ ($m \geq 2$) であり、 $\tau_2 \tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M.$$

- (3) それ以外の場合、 $D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)$ は $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M)$ の大対蹠集合になり、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M.$$

この定理における場合分けは次の結果によるものである。

命題 4.8 (Murakami [10], Takeuchi [13]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とする。このとき、 $I(M)/I_0(M)$ および $A(M)/A_0(M)$ は以下の通りである。

- (1) M が $Q_{2m}(\mathbb{C})$ ($m \geq 2$) または $G_m(\mathbb{C}^{2m})$ ($m \geq 2$) のとき

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad A(M)/A_0(M) \cong \mathbb{Z}_2.$$

- (2) M が上記以外のとき

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2, \quad A(M) = A_0(M).$$

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の点対称は正則等長変換であることから、 M の極地はコンパクト Hermite 対称空間になることがわかるが、実際にはコンパクト型 Hermite 対称空間であることがわかる。

補題 4.9 ([17]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 M の点 o に関する極地を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

と表す。

(1) o を含む実形 L に対して

$$F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^r L \cap M_j^+$$

であり、 $L \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $L \cap M_j^+$ は M_j^+ の実形である。さらに次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^r \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) o を含む実形 L_1, L_2 の交叉が離散的ならば次が成り立つ。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^r \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\},$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^r \# \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}.$$

定理 4.5, 4.6, 4.7 の証明には、この補題により極地に関する数学的帰納法を用いる。定理 4.3 を Floer ホモロジーに 응용して Iriyeh-Sakai-Tasaki は次の結果を得た。

定理 4.10 (Iriyeh-Sakai-Tasaki [6]) M を単調なコンパクト型 Hermite 対称空間とする。 L_1, L_2 を M の実形で交叉が離散的であり、最小 Maslov 数はともに 3 以上とすると

$$HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ。ここで、 $HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2)$ は \mathbb{Z}_2 係数の Floer ホモロジー群である。

さらに、コンパクト Hermite 対称空間が既約なときには、定理 4.6 から次の結果を得た。

定理 4.11 (Iriyeh-Sakai-Tasaki [6]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M の二つの実形で交叉が離散的であるとする。

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ ($m \geq 2$) であり、 L_1 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、 L_2 は $U(2m)$ と合同ならば次が成り立つ。

$$HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}$$

(2) それ以外の場合には次が成り立つ。

$$HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}}$$

注意 4.12 最近の入江氏、酒井氏と田崎氏の研究で、複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉と一般化された対蹠集合との関係が調べられている ([7])。

4.2. 階数1のコンパクト対称空間の全測地的部分多様体の交叉

M を階数1のコンパクト対称空間とすると、 M は S^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathbb{O}P^2$ のいずれかに等長的である。

階数1のコンパクト対称空間の全測地的部分多様体はWolfによって分類されている。

定理 4.13 (Wolf [22]) M を階数1のコンパクト対称空間とし、 N を M の全測地的部分多様体とすると、 N は次で与えられる。

- (1) $M = S^n$ の場合、 N は S^k ($1 \leq k \leq n-1$)と合同である。
- (2) $M = \mathbb{R}P^n$ の場合、 N は $\mathbb{R}P^k$ ($1 \leq k \leq n-1$)と合同である。
- (3) $M = \mathbb{C}P^n$ の場合、 N は $\mathbb{C}P^s$ ($1 \leq s \leq n-1$)または $\mathbb{R}P^t$ ($1 \leq t \leq n$)と合同である。
- (4) $M = \mathbb{H}P^n$ の場合、 N は $\mathbb{H}P^s$ ($2 \leq s \leq n-1$), $\mathbb{C}P^t$, $\mathbb{R}P^t$ ($2 \leq t \leq n$)または S^k ($1 \leq k \leq 4$)と合同である。
- (5) $M = \mathbb{O}P^2$ の場合、 N は $\mathbb{H}P^2$, $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{R}P^2$ または S^k ($1 \leq k \leq 8$)と合同である。

定理 4.14 (Tanaka-Tasaki) M を階数1のコンパクトRiemann対称空間とし、 N_1, N_2 を $\dim N_1 + \dim N_2 = \dim M$ を満たす M の全測地的部分多様体とする。 $N_1 \cap N_2$ が離散的ならば、 $N_1 \cap N_2$ は N_1 と N_2 の対蹠集合であり、次が成り立つ。

- (1) $M = S^n$ で N_1 は S^k に合同で N_2 は S^{n-k} に合同 ($1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) ならば、 $\#(N_1 \cap N_2) = 2 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$ である。
- (2) $M = \mathbb{C}P^n$ で N_1, N_2 は $\mathbb{R}P^n$ に合同ならば、 $\#(N_1 \cap N_2) = n+1 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$ である。
- (3) $M = \mathbb{H}P^n$ で N_1, N_2 は $\mathbb{C}P^n$ に合同ならば、 $\#(N_1 \cap N_2) = n+1 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$ である。
- (4) $M = \mathbb{O}P^2$ で N_1, N_2 は $\mathbb{H}P^2$ に合同ならば、 $\#(N_1 \cap N_2) = 3 = \#_2 N_1 = \#_2 N_2$ である。
- (5) 上記以外の場合には、 $\#(N_1 \cap N_2) = 1 < \min\{\#_2 N_1, \#_2 N_2\}$ である。

4.3. 対称R空間の鏡映部分多様体の交叉

定理4.3の証明を見直すと、コンパクト型Hermite対称空間の実形からさらに適用範囲を広げることが可能なことがわかる。

定理 4.15 (Tanaka-Tasaki) 既約対称R空間 M の二つの鏡映部分多様体 N_1, N_2 の交叉が離散的ならば、 $N_1 \cap N_2$ は N_1 と N_2 の対蹠集合である。

参考文献

- [1] A. Borel and J. P. Serre, Sur certains sousgroupes des groupes de Lie compacts, *Comm. Math. Helv.* **27** (1953), 128–139.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II, *Duke Math. J.* **45** (1978), 405–425.
- [3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 273–297.
- [4] Xu Cheng, The totally geodesic coisotropic submanifolds in Kähler manifolds, *Geometriae Dedicata* **90** (2002), 115–125.
- [5] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [6] H. Iriyeh, T. Sakai and T. Tadaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in *J. Math. Soc. of Japan*, arXiv:1108.0260.
- [7] H. Iriyeh, T. Sakai and T. Tadaki, Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, *Proceedings of The Sixteenth International Workshop on Diff. Geom.* **16** (2012), 97–105.
- [8] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **14** (1979), 179–185.
- [9] O. Loos, Charakterisierung symmetrischer R -Räume durch ihre Einheitsgitter, *Math. Z.* **189** (1985), 211–226.
- [10] S. Murakami, On the automorphisms of a real semisimple Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan*, **4** (1952), 103–133.
- [11] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **11** (1988), 57–79.
- [12] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, II, *Tokyo J. Math.* **15** (1992), 39–82.
- [13] M. Takeuchi, On the fundamental group and the group of isometries of a symmetric space, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1* **10** (1964), 88–123.
- [14] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I, *Tsukuba J. Math.* **2** (1978), 35 – 68.
- [15] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. J., (2)* **36** (1984), 293–314.
- [16] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, *Nagoya Math. J.* **115** (1989), 43–46.
- [17] M. S. Tanaka and H. Tadaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. of Japan.* **64** (2012), 1297–1332.
- [18] M. S. Tanaka and H. Tadaki, Correction to: “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”, preprint.
- [19] M. S. Tanaka and H. Tadaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, to appear in *Osaka J. Math.* **50** (2013).
- [20] M. S. Tanaka and H. Tadaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, preprint.
- [21] H. Tadaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 375–382.
- [22] J. A. Wolf, Elliptic spaces in Grassmann manifolds, *Illinois J. Math.* **7** (1963), 447–462.