コンパクト対称空間と対蹠集合

田中 真紀子

東京理科大学 創域理工学部 数理科学科

鶴岡微分幾何学研究集会

庄内産業振興センター

2024 年 10 月 26 日–27 日

対蹠集合と 2-number

コンパクト対称空間の対蹠集合と 2-number の基本事項について述べる

B.-Y. Chen 先生と長野先生による共著論文 (C. R. Acad. Sci. Paris 1982, Trans. Amer. Math. Soc. 1988) で導入・研究された

この講演ではコンパクト Riemann 対称空間を単にコンパクト対称空間という

点 x における点対称を s_x で表す

s_x は x を孤立固定点にもつ対合的等長変換

コンパクト対称空間は特に断らない限り連結とする（あとで連結ではない場合も扱う）

A : コンパクト対称空間 M の部分集合

A : M の**対蹠集合** (an antipodal set) $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ s_x(y) = y$

M の **2-number** $\#_2 M := \max\{|A| : A$ は M の対蹠集合 $\}$

対蹠集合 A が $|A| = \#_2 M$ を満たすとき A を**大対蹠集合** (a great antipodal set) という

A : 対蹠集合 $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in A,\ \exists \gamma$: 閉測地線 s.t. x, y は γ 上で対蹠点

非コンパクト型 Riemann 対称空間や Euclid 空間では s_x で固定される点は x のみ

Ex 1. $M = S^n\,(\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$x \in S^n$ に対して s_x は $\langle x \rangle = \mathbb{R}x$ に関する $\mathbb{R}^{n+1}$ の鏡映 $\rho_{\langle x \rangle}$ の S^n への制限

$s_x(y) = y \Leftrightarrow y = \pm x$

$\{x, -x\}$ は大対蹠集合で $\#_2 S^n = 2$

Ex 2. $M = \mathbb{R}P^n$

$u \in \mathbb{R}P^n$ に対して s_u は ρ_u から誘導される

$s_u(v) = v \;\Leftrightarrow\; v = u$ or $v \subset u^\perp$

$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底とすると $\{\langle u_1\rangle, \ldots, \langle u_{n+1}\rangle\}$ は大対蹠集合で $\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$

Ex 3. $M = G$: コンパクト Lie 群

両側不変計量に関してコンパクト対称空間

$g \in G$ に対して $s_g(h) = gh^{-1}g \; (h \in G)$

G の単位元 e に対して $s_e(g) = g \;\Leftrightarrow\; g^2 = e$

$g^2 = h^2 = e$ のとき $s_g(h) = h \;\Leftrightarrow\; gh = hg$

T を G の極大トーラスとすると $\{t \in T \mid t^2 = e\}$ は G の対蹠集合

$r(G) := \mathrm{rank}\, G = \dim T$ とすると $\{t \in T \mid t^2 = e\}$ は $(\mathbb{Z}_2)^{r(G)}$ に同型な部分群

これは大対蹠集合になるとは限らない

$(\mathbb{Z}_2)^t$ に同型な部分群 $G' \subset G$ が存在する自然数 t の最大値を G の **2-rank** という

$r_2(G)$ を G の 2-rank とすると $r(G) \leq r_2(G)$ で $\#_2 G = 2^{r_2(G)}$

G の点対称は群構造のみで定まっているので G が連結でない場合でも点対称が自然に定まる

コンパクト Lie 群については連結でない場合も含める

M の対蹠集合が包含関係に関して極大のとき**極大対蹠集合**という

大対蹠集合は極大対蹠集合であるが、逆は一般に成立しない

（古典型コンパクト Lie 群の商群 G においては極大対蹠集合 A で $|A| < \#_2 G$ を満たす例がいろいろある）

Chen-Nagano は多くのコンパクト Riemann 対称空間 M について $\#_2 M$ を決定した。

田崎博之さんとの共同研究で古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の分類を行い、各代表元を行列を用いて具体的に表示し、それらの位数を求めて位数の最大値を決定することで Chen-Nagano の $\#_2 M$ に関する結果の別証明を与えた。

・古典型コンパクト Lie 群 $U(n), SU(n), Sp(n), O(n), SO(n)$ とそれらの商群 (J. Lie Theory 2017)
・古典型コンパクト対称空間 $G_k(\mathbb{K}^n)(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, $Sp(n)/U(n)$, $SO(2n)/U(n)$ とそれらの商空間 (Differ. Geom. Appl. 2020)
・古典型コンパクト対称空間 $U(n)/O(n)$, $U(2n)/Sp(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $SU(2n)/Sp(n)$ とそれらの商空間 (in preparation)

・例外型コンパクト Lie 群 G_2 および例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ (T.-Tasaki-Yasukura, Proc. Amer. Math. Soc. 2022)

極地と対蹠集合

Chen-Nagano, Nagano はコンパクト対称空間の極地と子午空間について研究（(M^+, M^-) 理論, Chen-Nagano 理論）

M : コンパクト対称空間

$x \in M$ に対して $F(s_x, M) := \{y \in M \mid s_x(y) = y\}$ の連結成分を x に関する**極地** (a polar) という

$\{x\}$ を自明な極地という

1 点からなる極地を**極** (a pole) ともいう

（例えば、S^n の極地は極のみ）

$y : x$ に関する極 $\Leftrightarrow$ $s_y = s_x$

極地は全測地的部分多様体でコンパクト対称空間（極地の次元 $< \dim M$)

極地の点対称は M の点対称の制限

Ex 1. $M = \mathbb{R}P^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$

$F(s_u, \mathbb{R}P^n) = \{u\} \cup P(u^\perp), \quad P(u^\perp) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$

Ex.2 $M = U(n)$: n 次ユニタリ群

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \{g \in U(n) \mid g^2 = 1_n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{g\, I_j\, g^{-1} \mid g \in U(n)\}$$

$$I_j := \mathrm{diag}(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-j})$$

$\{g\, I_j\, g^{-1} \mid g \in U(n)\} = U(n)/(U(j) \times U(n-j)) \cong G_j(\mathbb{C}^n)$（複素 Grassmann 多様体）は $U(n)$ の 1_n に関する極地

M には $I_0(M)$ が推移的に作用

$y = g(x), \ g \in I_0(M) \ \Rightarrow \ s_y = g\, s_x\, g^{-1}$

$s_y(z) = z \ \Leftrightarrow \ s_x g^{-1}(z) = g^{-1}(z)$

$F(s_y, M) = g(F(s_x, M))$

x に関する極地と y に関する極地は $g \in I_0(M)$ により合同

Theorem 1 (Chen-Nagano, T.-Tasaki)

M : コンパクト対称空間, $\quad o \in M$

$I(M)$: M の等長変換群, $\quad I_0(M)$: $I(M)$ の単位連結成分

$K = \{k \in I_0(M) \mid k(o) = o\}$, $\quad K_0$: K の単位連結成分

M^+ : o に関する極地, $\quad x_0 \in M^+$

$\Rightarrow$

$M^+ = \{k(x_0) \mid k \in K_0\} = \{k(x_0) \mid k \in K\}$

$I_0(M^+) = \{k|_{M^+} \mid k \in K_0\}$

$F(s_x, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$: 連結成分の直和への分解, $\quad M_0^+ := \{x\}$

$A : M$ の対蹠集合, $x \in A \ \Rightarrow \ A \subset F(s_x, M)$, $A = \bigcup_{j=0}^{r}(A \cap M_j^+)$

$A \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $A \cap M_j^+$ は M_j^+ の対蹠集合

Remark. A が M の極大対蹠集合のとき $A \cap M_j^+$ は M_j^+ の極大対蹠集合とは限らない

$$\#_2 M \leq \sum_{j=0}^{r} \#_2 M_j^+$$

M が対称 R 空間ならば等号成立（竹内勝先生の結果よりわかる）

$A_j : M_j^+$ の対蹠集合 $\ \Rightarrow \ \{x\} \cup A_j : M$ の対蹠集合

A_j が M_j^+ の極大対蹠集合ならば $\{x\} \cup A_j \subset \tilde{A}$ を満たす M の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ に対して $A_j = \tilde{A} \cap M_j^+$

M の極大対蹠集合の合同類の分類の基本方針：

M をコンパクト Lie 群 G の単位元 e の極地として実現

G の極大対蹠部分群の共役類の分類結果（これは得られているものとする）を利用して M の極大対蹠集合の合同類の分類を求める

Theorem 2 (Chen-Nagano, T.-Tasaki)

G : コンパクト Lie 群, G_0 : G の単位連結成分

$g \in G,\ I_g : G \to G,\ I_g(h) := ghg^{-1}\ (h \in G)$

M : G の単位元 e に関する極地, $x_0 \in M$

$\Rightarrow$

$M = \{I_g(x_0) \mid g \in G_0\}, \quad I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$

M によっては連結 Lie 群の極地として実現されないが非連結 Lie 群の極地として実現される場合がある

非連結 Lie 群の極地について T.-Tasaki (Contemp. Math. 777) で研究

G : 連結コンパクト Lie 群, σ : G の対合的自己同型写像

$\langle\sigma\rangle = \{1, \sigma\}$: σ が生成する $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群

$G \rtimes \langle\sigma\rangle = (G, 1) \cup (G, \sigma)$: 連結成分への分解

$\hat{e} := (e, 1)$: $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の単位元

$g \in G$, $\rho_\sigma(g) : G \to G$, $\rho_\sigma(g)(h) := gh\sigma(g)^{-1}$ $(h \in G)$

ρ_σ を σ による**捩れた共役作用**という

Theorem 3 (T.-Tasaki)

$F(s_{\hat{e}}, G \rtimes \langle\sigma\rangle) = (F(s_e, G), 1) \cup (F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$

特に、$(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の各連結成分は $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地

$(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の (e, σ) を含む連結成分は $(\rho_\sigma(G)(e), \sigma)$ に一致

$\rho_\sigma(G)(e) \cong G/F(\sigma, G)$

$I_{(g,1)}((h,1)) = (g,1)(h,1)(g,1)^{-1} = (ghg^{-1},1) = (I_g(h),1)$
$I_{(g,1)}((h,\sigma)) = (g,1)(h,\sigma)(g,1)^{-1} = (gh,\sigma)(g^{-1},1) = (gh\sigma(g^{-1}),\sigma) = (\rho_\sigma(g)(h),\sigma)$

つまり、単位連結成分 $(G,1)$ の元 $(g,1)$ による共役作用 $I_{(g,1)}$ は、単位連結成分では G 上に共役作用 I_g を誘導し、もう一方の連結成分では G 上に捩れた共役作用 $\rho_\sigma(g)$ を誘導する。

コンパクト対称空間 $M = G/F(\sigma, G)$ は非連結コンパクト Lie 群 $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地として実現される

Ex. $G = U(n)$, $\sigma_I(g) := \bar{g}$ $(g \in U(n))$
$F(\sigma_I, U(n)) = O(n)$
コンパクト対称空間 $U(n)/O(n)$ は非連結コンパクト Lie 群 $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の極地として実現される

一般に、連結コンパクト Lie 群 G の極地 $M = G/K$ に対して

$\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, K$ が成立

$\mathrm{rank}\, U(n) > \mathrm{rank}\, O(n)$ だから $U(n)/O(n)$ は連結コンパクト Lie 群の極地としては実現されない

$(G, 1)$ の標準形は G の極大トーラス T に対して

$$(G, 1) = \bigcup_{g \in G} (g, 1)\,(T, 1)\,(g, 1)^{-1}$$

Hermann 作用の一般論より (G, σ) の標準形は $F(\sigma, G)$ の極大トーラス T_σ に対して

$$(G, \sigma) = \bigcup_{g \in G} (g, 1)(T_\sigma, \sigma)(g, 1)^{-1}$$

(G, σ) 内の極地を求めるには (T_σ, σ) 内の対合的な元の $(G, 1)$ 共役軌道を求め、異なる軌道を決定すればよい（これは個別の G に対して実行可能）

奇数次数の被覆準同型写像と対蹠部分群

G, G' :（連結とは限らない）コンパクト Lie 群

$\pi : G \to G'$ が奇数次数の被覆準同型写像のとき、π を通して極大対蹠部分群は変わらない (T.-Tasaki, Int. Electron. J. Geom., 2024)

証明には Sylow の定理を使う

A' を G' の対蹠部分群とするとある自然数 r に対して $A' \cong \mathbb{Z}_2^r$, $|A'| = 2^r$

$k := |\ker \pi|$ とおくと k は奇数

$\pi^{-1}(A')$ は G の部分群で $|\pi^{-1}(A')| = 2^r k$

Sylow の定理より $\pi^{-1}(A')$ の部分群 B で $|B| = 2^r$ なるものが存在

B の元の位数は 2 の冪だから $B \cap \ker \pi = \{e\}$

よって $\pi|_B : B \to A'$ は同型写像

よって $\pi^{-1}(A')$ の 2-Sylow 部分群 B は G の対蹠部分群

Theorem 4

G, G' : コンパクト Lie 群, $\pi : G \to G'$: 奇数次数の被覆準同型写像

G_0, G_0' : G, G' の単位連結成分

(1) A が G の (*resp.* 極大) 対蹠部分群ならば $\pi(A)$ は G' の (*resp.* 極大) 対蹠部分群である。G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 が G 共役 (*resp.* G_0 共役) ならば、G' の極大対蹠部分群 $\pi(A_1), \pi(A_2)$ は G' 共役 (*resp.* G_0' 共役) である。

(2) A' が G' の (*resp.* 極大) 対蹠部分群ならば、G の (*resp.* 極大) 対蹠部分群 A が存在して $\pi|_A : A \to A'$ は同型写像になる。G' の極大対蹠部分群 A_1', A_2' が G' 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G 共役である。G_0 が $\ker \pi$ を含むときは、G' の極大対蹠部分群 A_1', A_2' が G_0' 共役ならば、対応する G の極大対蹠部分群 A_1, A_2 は G_0 共役である。

上の定理は次の結果をコンパクト Lie 群の場合に精密化したものと言える

Proposition 5 (Chen-Nagano)

One has $\#_2 M' = \#_2 M$, if there exists a k-fold covering morphism $f : M' \to M$ between compact Riemannian symmetric spaces and k is odd.

$G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合と八元数の代数構造

(T.-Tasaki-Yasukura, Proc. Amer. Math. Soc. 2022)

例外型コンパクト Lie 群 G_2

$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+, \quad M_1^+ \cong G_2/SO(4)$

G_2 を八元数 $\mathbb{O}$ の自己同型群とみなし、準同型写像

$\psi : Sp(1) \times Sp(1) \to G_2$ で $\psi(Sp(1) \times Sp(1)) \cong SO(4)$ となるものを用いて次の結果を得た。

Theorem 6

$M_1^+ \cong G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合は $\{\psi(1,-1), \psi(i,\pm i), \psi(j,\pm j), \psi(k,\pm k)\}$ に合同である。よって $\#_2 G_2/SO(4) = 7$。

G_2 の極大対蹠部分群は $\{\psi(1,\pm 1), \psi(i,\pm i), \psi(j,\pm j), \psi(k,\pm k)\}$ に共役である。よって $\#_2 G_2 = 8$。

$\tilde{G}_{\mathrm{ass}}$: $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の結合的 3 次元部分空間全体からなる Grassmann 多様体

$\tilde{G}_{\mathrm{ass}} \cong G_2/SO(4)$ (Harvey-Lawson)

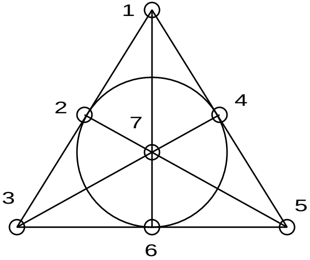
$\xi \in M_1^+ \subset G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ に対して $V(\xi) := \{x \in \mathrm{Im}\mathbb{O} \mid \xi(x) = x\} \in \tilde{G}_{\mathrm{ass}}$ を対応させる対応によって M_1^+ と $\tilde{G}_{\mathrm{ass}}$ を同一視

M_1^+ の極大対蹠集合 $A = \{\psi(1,-1), \psi(i,\pm i), \psi(j,\pm j), \psi(k,\pm k)\}$ には $\tilde{G}_{\mathrm{ass}}$ の極大対蹠集合 $V(A)$ が対応

$\tilde{G}_{\mathrm{ass}}$ は有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の全測地的部分多様体
$V(A)$ は $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の対蹠集合

$\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合の合同類の分類は Tasaki により得られている

Fano 平面: 7 点と 7 直線をもつ有限射影平面



Fano 平面の各直線に割り振られた順序付き 3 点によって $\mathbb{O}$ の積が決まる

$\{e_1, \ldots, e_7\}$: $\mathbb{R}^7$ の正規直交基底

$\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合は $\{\pm\langle e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \Phi\}$ に合同

ただし、

$\Phi = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\},\{1,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,7\}\}$

Φ には Fano 平面の直線がすべて現れている。

M_1^+ の極大対蹠集合 A の元 a に対して $V(a) \in \tilde{G}_{\mathrm{ass}} \subset \tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の向きをかえたものを $-V(a)$ とすると $\{\pm V(a) \mid a \in A\}$ は $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合である。

$V(A)$ は Fano 平面の各直線に順序付き 3 点を定めていて $\mathbb{O}$ の積が決まる。このようにして $G_2/SO(4) \cong \tilde{G}_{\mathrm{ass}}$ の極大対蹠集合は八元数の代数構造と関係する。