コンパクト対称空間の幾何学

田中真紀子 田崎博之

東京理科大学 筑波大学

2010 年

第 4 回秋葉原微分幾何セミナー

全体の構成

1 対称空間

2 Chen-Nagano理論

3 対蹠集合

4 実形の交叉

1 対称空間

1.1 Grassmann多様体

係数体$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\mathbb{K}$-Grassmann多様体

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$: r次元部分空間全体

$r = 1$の場合

$\mathbb{K}P^n = G_1(\mathbb{K}^{1+n})$

: n次元$\mathbb{K}$射影空間

$$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$$

$$\begin{array}{cccc} \phi_V : & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{\perp}) & \longrightarrow & G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \\ ; & f & \longmapsto & \mathrm{graph} f \end{array}$$

ただし $\mathrm{graph} f = \{v + f(v) \mid v \in V\}$.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{\perp}) \cong \mathbb{K}^{rn} \cong \mathbb{R}^{drn}$

$(d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K})$

$\{\phi_V \mid V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})\}$ は $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に多様体構造を与える。

$\boldsymbol{T_V(G_r(\mathbb{K}^{r+n})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{\perp})}$

$\boldsymbol{f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{\perp})}$

$$\boldsymbol{\langle f, g \rangle = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(f^* g)]}$$

$\boldsymbol{U_{\mathbb{K}}(V) \times U_{\mathbb{K}}(V^{\perp})}$ **不変内積になる。**

これは $\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{r+n})}$ **上の** $\mathrm{\mathbf{Riemann}}$ **計量、**

$\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{r+n})}$ **は** $\mathrm{\mathbf{Riemann}}$ **多様体。**

$\boldsymbol{U_{\mathbb{K}}(r+n)}$ **は** $\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{r+n})}$ **の等長変換群。**

1.2 対称空間

M ： Riemann 多様体

$\forall x \in M\ \exists s_x$ ： 点対称

　s_x ： 等長変換、$s_x^2 = 1_M$

　x は s_x の孤立不動点

M を Riemann 対称空間と呼ぶ

$(ds_x)_x = -1$ となり、s_s は x を

通る測地線を逆向きに変換。

定理 1.2.1 連結Riemann対称空間は測地的完備。等長変換群全体は推移的に作用し、Lie変換群になる。特に、Riemann等質空間になる。

以後

対称空間：連結 Riemann 対称空間

定理 1.2.2

M：対称空間

G：M の等長変換全体の単位連結成分

$\boldsymbol{o \in M, K = \{k \in G \mid ko = o\}}$

$\boldsymbol{\sigma : G \longrightarrow G\ ;\ g \mapsto s_o g s_o}$

対合的自己同型

$$\boldsymbol{F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)}$$

$\mathfrak{g}$: G の Lie 代数、 $\mathfrak{k}$: K の Lie 代数

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}$$

$d\sigma$ の -1 固有空間を $\mathfrak{p}$ とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} : \text{直和分解}$$

$\pi : G \longrightarrow M \ ; \ g \mapsto go$ とすると

$$d\pi_e : \mathfrak{p} \longrightarrow T_oM : \text{線形同型}$$

$$\gamma_{d\pi_e(X)}(t) = \exp(tX)o \quad (X \in \mathfrak{p})$$

$V \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ に対して

$$s_V = 1_V - 1_{V^\perp} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)$$

s_V の $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ への作用は等長変換、$s_V^2 = 1$、V は s_V の孤立不動点

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ は対称空間

$$G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \frac{U_{\mathbb{K}}(r+n)}{U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)}$$

Lie 代数 $\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n)$ の直和分解

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r+n) = \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(r) \times \mathfrak{u}_{\mathbb{K}}(n) + \mathfrak{p},$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; X \in M(r, n; \mathbb{K}) \right\}$$

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の測地線

$$\gamma_X(t) = \exp t \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{bmatrix} \mathbb{K}^r$$

G : 連結 Lie 群、 H : G の閉部分群

(G, H) : Riemann 対称対

$\exists \sigma : G \longrightarrow G$: 対合的自己同型

$F(\sigma, G)_0 \subset H \subset F(\sigma, G)$

$\mathrm{Ad}_G(H)$: コンパクト

最後の条件は不変内積の存在を保証

$(G, K), G/K$: コンパクト型

$\Leftrightarrow G$: コンパクト半単純

定理 1.2.3 (G, K) : Riemann 対称対

$\pi : G \longrightarrow G/K$: 自然な射影、

$o = \pi(e)$

$\sigma : G \longrightarrow G$: 対合的自己同型

$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$

G 不変 Riemann 計量に対して G/K は

対称空間になり

$$s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma, \quad \tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o$$

1.3 曲率と全測地的部分多様体

定理 1.3.1 (G, K) : Riemann 対称対

$R : G/K$ の曲率テンソル

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cong T_o(G/K)$

$X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ に対して

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$$

$\mathfrak{n}$: **Lie 三対系**

$\mathfrak{n}$: Lie 代数の部分空間

$$X, Y, Z \in \mathfrak{n} \Rightarrow [[X, Y], Z] \in \mathfrak{n}$$

定理 1.3.2 (G, K) : Riemann 対称対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cong T_o(G/K)$

N : G/K の全測地的部分多様体 (TGS)

$o \in N \Rightarrow T_o N$: Lie 三対系 $(\subset \mathfrak{p})$

$\mathfrak{n}$: Lie 三対系 $\subset \mathfrak{p}$

$\Rightarrow \mathrm{Exp}_o \mathfrak{n}$: TGS

N : 平坦 $\Leftrightarrow T_o N$: 可換 $(\subset \mathfrak{p})$

N : 極大平坦 TGS

$\Leftrightarrow T_o N$: 極大可換部分空間 $(\subset \mathfrak{p})$

定理 1.3.3 (G, K) : Riemann **対称対**

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cong T_o(G/K)$

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}$ **の極大可換部分空間**

$A = \mathrm{Exp}_o \mathfrak{a}$

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}_G(k)\mathfrak{a}, \quad G/K = \bigcup_{k \in K} kA.$$

$\mathrm{rk}(G/K) = \dim \mathfrak{a}$: G/K **の階数**

$$G_r(\mathbb{K}^{r+n})\ (r \le n)$$

$$X(x_i) = [\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)\ O] \in M(r, n; \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X(x_i) \\ -X(x_i)^* & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathfrak{a}$：$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間、$\mathrm{rk} G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = r$

$$e_i(\theta) = \cos\theta e_i + \sin\theta e_{r+i} \in \mathbb{K}^{r+n}$$

$$A = \{\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_1(\theta_1), \ldots, e_r(\theta_r)\} \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$の極大平坦TGS

$\mathfrak{a}$の共役性：行列の標準形

1.4 コンパクトLie群

G : コンパクトLie群

$$\begin{aligned} \sigma \; : \; G \times G \; &\longrightarrow \; G \times G \\ ; \; (g_1, g_2) \; &\longmapsto \; (g_2, g_1) \end{aligned}$$

$G^* = \{(g, g) \mid g \in G\}$

$(G \times G, G^*)$: Riemann対称対

$G \times G / G^* \longrightarrow G; (g_1, g_2)G^* \longmapsto g_1 g_2^{-1}$

微分同型

$G \times G$ 不変 Riemann 計量

($G \times G / G^*$ 上)

$\leftrightarrow$ 両側不変 Riemann 計量 (G 上)

$$s_e(g) = g^{-1}, \quad s_x(g) = xg^{-1}x$$

一径数部分群 $=$ 単位元を通る測地線

Lie 群の指数写像

$=$ Riemann 多様体の指数写像