2. Chen-Nagano理論

M：対称空間

$o \in M$

M の o に関する**極地**(polar)

$$F(s_o, M) = \{x \in M \mid s_o(x) = x\}$$

の連結成分

$p \in F(s_o, M)$ を含む極地を $M^+_{(p;o)}$ または単に $M^+_{(p)}$ と表す。

$M^+_{(p;o)}$ に対する子午空間 (meridian)

$F(s_p \circ s_o, M)$ の p を含む連結成分

$M^+_{(p;o)}$ に対する子午空間を $M^-_{(p;o)}$ または単に $M^-_{(p)}$ と表す。

$\{o\}$ ：極地

対応する子午空間は M

極地および子午空間は全測地的部分多様体

G：M の等長変換全体の単位連結成分

$x \in M$ に関する極地は o に関する極地

と G 合同

$$x = bo \ (b \in G), \ s_x = b \circ s_o \circ b^{-1}$$

$$s_x(y) = y \Leftrightarrow s_o(b^{-1}y) = b^{-1}y$$

M：非コンパクト型

$$\Rightarrow F(s_o, M) = \{o\}$$

以後、対称空間はコンパクト

$M = S^n (\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$F(s_o, S^n) = \{o\} \cup \{-o\}$

一般に、$M^+_{(p)} = \{p\} (p \neq o)$ のとき

p は o に関する極 (pole)

p：極 $\Rightarrow s_p = s_o$

$-o$ は o に関する極

$F(s_o \circ s_o, S^n) = F(s_{-o} \circ s_o, S^n) = S^n$

$(M^+_{(p)}, M^-_{(p)})$

$= (\{o\}, S^n), (\{-o\}, S^n)$

$M = \mathbb{K}P^n$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$: $\mathbb{K}^{n+1}$ の正規直交基底

$o = \mathbb{K}e_1$

$s_o = 1_o - 1_{o^\perp}$

$F(s_o, \mathbb{K}P^n)$

$= \{o\} \cup \{V \subset \{e_2, \ldots, e_{n+1}\}_{\mathbb{K}} | \dim_{\mathbb{K}} V = 1\}$

$(\cong \mathbb{K}P^{n-1})$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s_p} \circ \boldsymbol{s_o}, \mathbb{K}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}) \\
&= \{\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{o} + \boldsymbol{p} \mid \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \boldsymbol{V} = \mathbf{1}\} \\
&\cup \{\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{o}^{\perp} \cap \boldsymbol{p}^{\perp} \mid \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \boldsymbol{V} = \mathbf{1}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{M}^{+}_{(\boldsymbol{p})}, \boldsymbol{M}^{-}_{(\boldsymbol{p})}) \\
&= (\{\boldsymbol{o}\}, \mathbb{K}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}), (\mathbb{K}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}, \mathbb{K}\boldsymbol{P}^{\mathbf{1}})
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{r}}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}})$$

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{M}^{+}_{(\boldsymbol{p})}, \boldsymbol{M}^{-}_{(\boldsymbol{p})}) \\
&= (\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{a}}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{b}}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}), \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{a}}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2b}}) \times \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{b}}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{2b}})) \\
&\qquad\qquad\qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

$$M = U(n)$$

$$X, Y \in U(n)$$

$$s_X(Y) = XY^{-1}X$$

E：単位行列

$$s_E(X) = X^{-1}$$

$$F(s_E, U(n)) = \{X \in U(n) \mid X^2 = E\}$$

$$\boldsymbol{X^2 = E}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}\text{ は }\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}\text{ に共役}$$

$$\boldsymbol{F(s_E, U(n)) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} G_k(\mathbb{C}^n)}$$

p：対角行列、対角成分のうち最初の k 個 -1、残り $+1$

$\boldsymbol{p \in G_k(\mathbb{C}^n)}$

$$\boldsymbol{F(s_p \circ s_E, U(n)) = \{X \in U(n) | pX = Xp\}}$$
$$\boldsymbol{= U(k) \times U(n-k)}$$

$$\boldsymbol{(M^+_{(p)}, M^-_{(p)}) = (G_k(\mathbb{C}^n), U(k) \times U(n-k))}$$
$$\boldsymbol{(0 \leq k \leq n)}$$

既約な M に対して $(M^+_{(p)}, M^-_{(p)})$ は
Chen-Nagano, Nagano により決定

M_1, M_2：対称空間
$\Rightarrow M_1 \times M_2$：対称空間

$$(M_1 \times M_2)^+_{(p_1,p_2)} = M^+_{1(p_1)} \times M^+_{2(p_2)}$$
$$(M_1 \times M_2)^-_{(p_1,p_2)} = M^-_{1(p_1)} \times M^-_{2(p_2)}$$

K：oにおけるイソトロピー部分群

命題 2.1

(1) $M^+_{(p)}$ と $M^-_{(p)}$ は点pで互いに直交

(2) $M^+_{(p)}$ はpを通るK 軌道

(3) $M^-_{(p)}$ の階数$=M$ の階数

$q \in M^+_{(p)}$ に対して $M^-_{(q;o)}$ と $M^-_{(p;o)}$ は K 合同

系 2.2

A：oを通る極大トーラス

$\Rightarrow A$はoに関する任意の極地と交わる

M, N：対称空間

C^∞写像$f : M \longrightarrow N$が準同型

$\Leftrightarrow {}^\forall x \in M, f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$

準同型写像$\Leftrightarrow$アファイン写像

命題 2.3

$f : M \longrightarrow N$：準同型写像

$\Rightarrow f(M^{+}_{(p;o)}) \subset N^{+}_{(f(p);f(o))}$,

$f(M^{-}_{(p;o)}) \subset N^{-}_{(f(p);f(o))}$

M から N への準同型写像より、M の極地（子午空間）から N の極地（子午空間）への準同型写像を得る。

系 2.4
S^m から $\mathbb{C}P^n$ への全測地的埋め込みが存在するならば $m \leq 2$

$M = S^m$ に対して
$(M^+_{(p)}, M^-_{(p)})$
$= (\{o\}, S^m), (\{-o\}, S^m)$

$\boldsymbol{N} = \mathbb{C}\boldsymbol{P}^n$ に対して

$(\boldsymbol{N}^+_{(q)}, \boldsymbol{N}^-_{(q)})$

$= (\{\boldsymbol{o}\}, \mathbb{C}\boldsymbol{P}^n), (\mathbb{C}\boldsymbol{P}^{n-1}, \boldsymbol{S}^2)$

S^m から $\mathbb{C}P^n$ への全測地的埋め込みが存在すれば、S^m は S^2 に全測地的に埋め込まれるので $m \leq 2$。

定理 $\mathbf{2.5}$

M, N：コンパクト既約対称空間

M が N に等長的

$\Leftrightarrow$ 組 $(M^+_{(p)}, M^-_{(p)})$ に対して、組 $(N^+_{(q)}, N^-_{(q)})$ で、$M^+_{(p)}$ は $N^+_{(q)}$ に等長的かつ $M^-_{(p)}$ は $N^-_{(q)}$ に等長的なものが存在

定理 2.6(長野)

M, N：コンパクト既約対称空間

M が N に同型ならば、組 $(M^+_{(p)}, M^-_{(p)})$ に対して、組 $(N^+_{(q)}, N^-_{(q)})$ で、$M^+_{(p)}$ は $N^+_{(q)}$ に同型かつ $M^-_{(p)}$ は $N^-_{(q)}$ に同型なものが存在。

逆に、組 $(M^+_{(p)}, M^-_{(p)}), (N^+_{(q)}, N^-_{(q)})$ に対して、$M^+_{(p)}$ が $N^+_{(q)}$ に同型かつ $M^-_{(p)}$ が $N^-_{(q)}$ に同型ならば、M は N に局所同型。

$\boldsymbol{M = SU(3)}$

$\boldsymbol{N = SU(3)/\mathbb{Z}_3}$

Riemann計量：$\mathfrak{su}(3)$のKilling形式の-1倍

NとMは局所同型なコンパクトRiemann対称空間

$$(M^+_{(p)}, M^-_{(p)}) = (\mathbb{C}P^2, T \cdot SU(2))$$
$$\cong (N^+_{(q)}, N^-_{(q)})$$

（同型だが等長的でない）

定理の証明のアイディア

$M = KM^-_{(p)}$ という事実を用いて、同型写像 $M^-_{(p)} \longrightarrow N^-_{(q)}$ を局所同型写像 $M \longrightarrow N$ に拡張する。