対称三対とその応用

井川　治　（京都工芸繊維大学）

2014 年 5 月 24 日

第 12 回秋葉原微分幾何セミナー

§ 0 導入

§ 1 重複度付きルート系

§ 2 イソトロピー群の軌道

§ 3 対称三対の定義と性質

§ 4 compact 対称三対から対称三対の構成

§ 5 Hermann 作用への応用

§ 6 実形の交叉への応用 (共同研究:田中-田崎)

§ 6.1 合同な二つの実形の交叉

§ 6.2 合同でない二つの実形の交叉

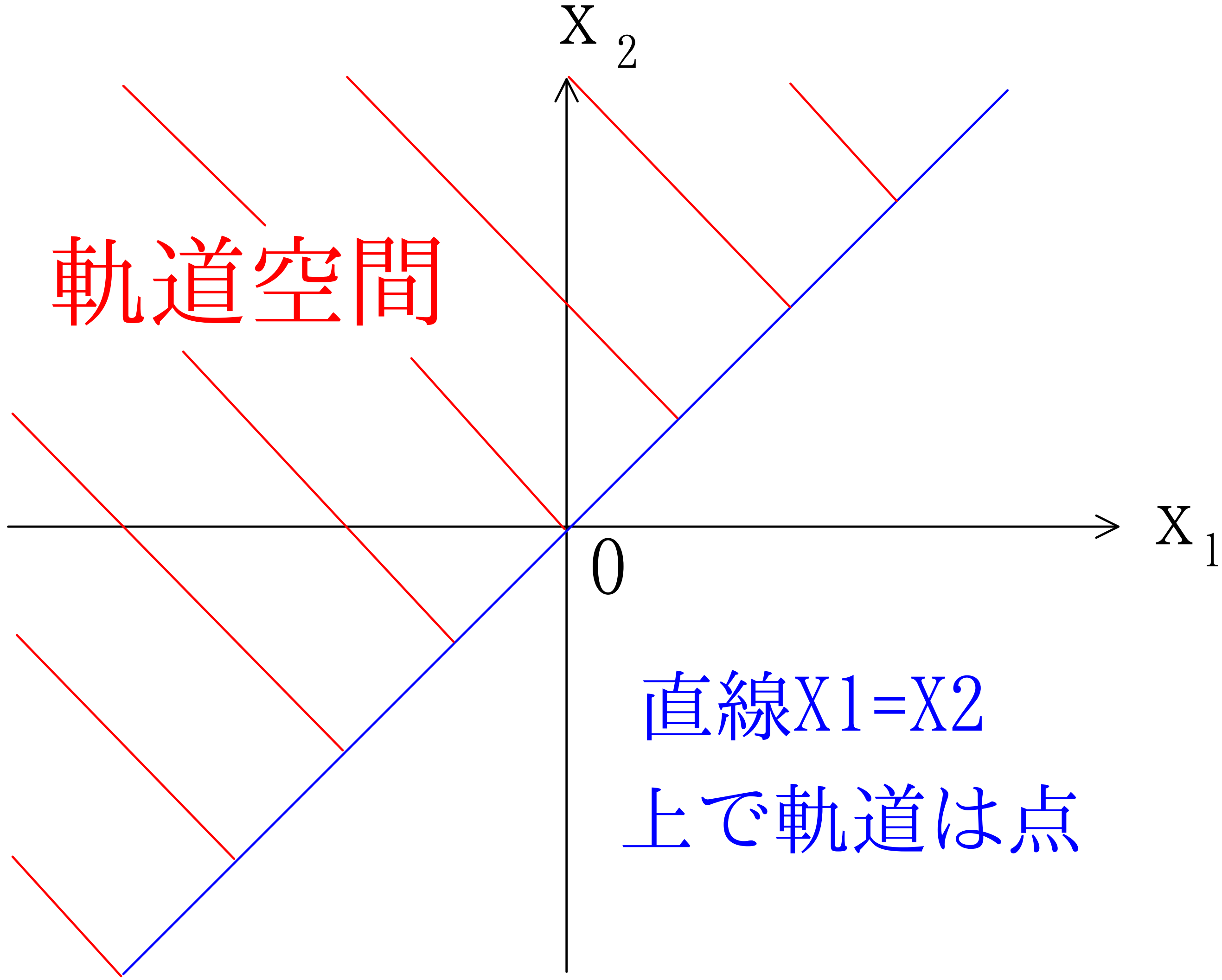
§0 導入 -Riemann 幾何における標準形理論-

$K = SO(n) \curvearrowright M =$「$n$ 次実対称行列全体」

$M \supset A =$「n 次対角行列全体」$\cong \mathbb{R}^n$

任意の点 $x \in M$ の軌道は A と直交して交わる

軌道空間 $\cong \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$

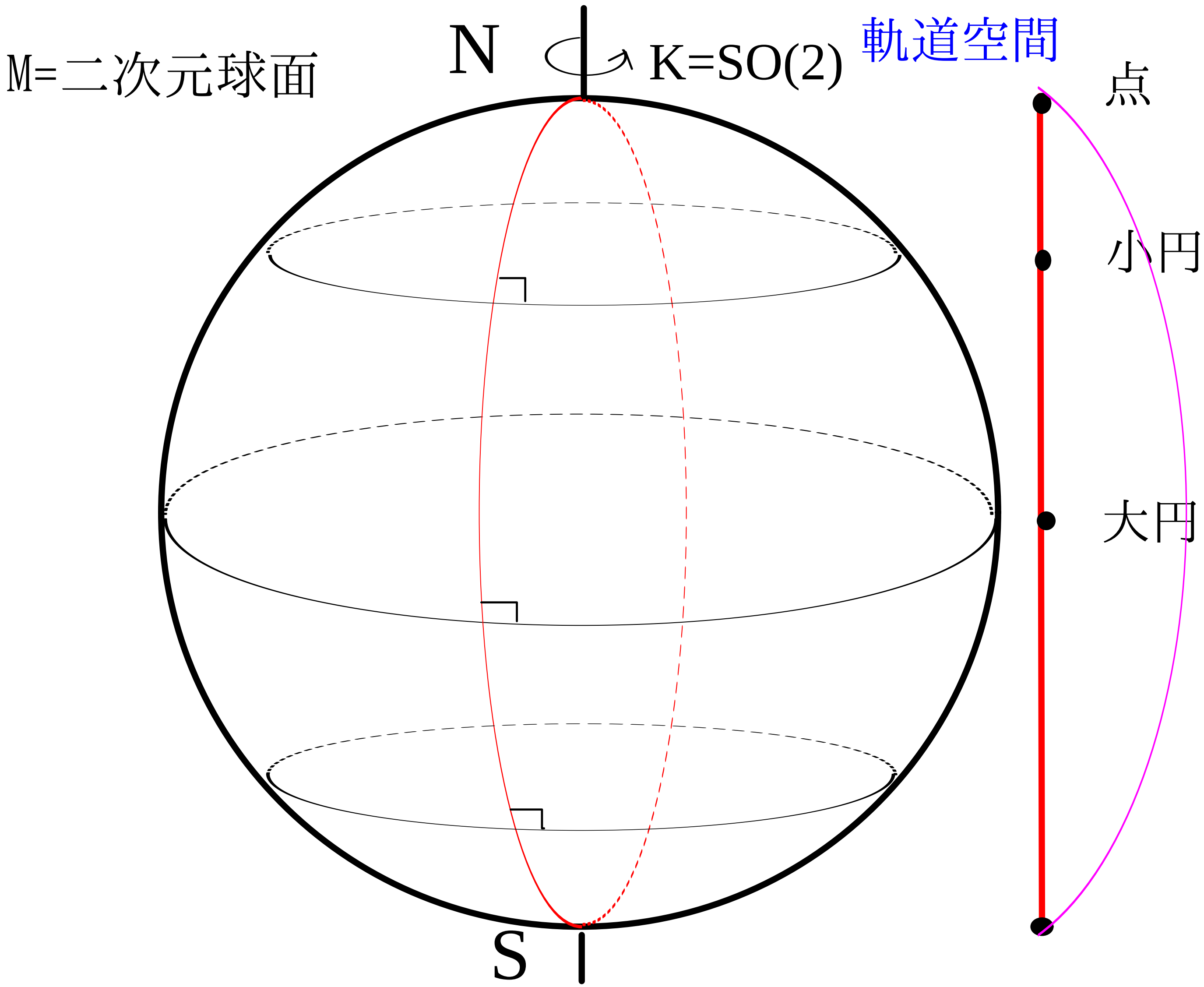

X 2
X 1
0
軌道空間
直線X1=X2
上で軌道は点

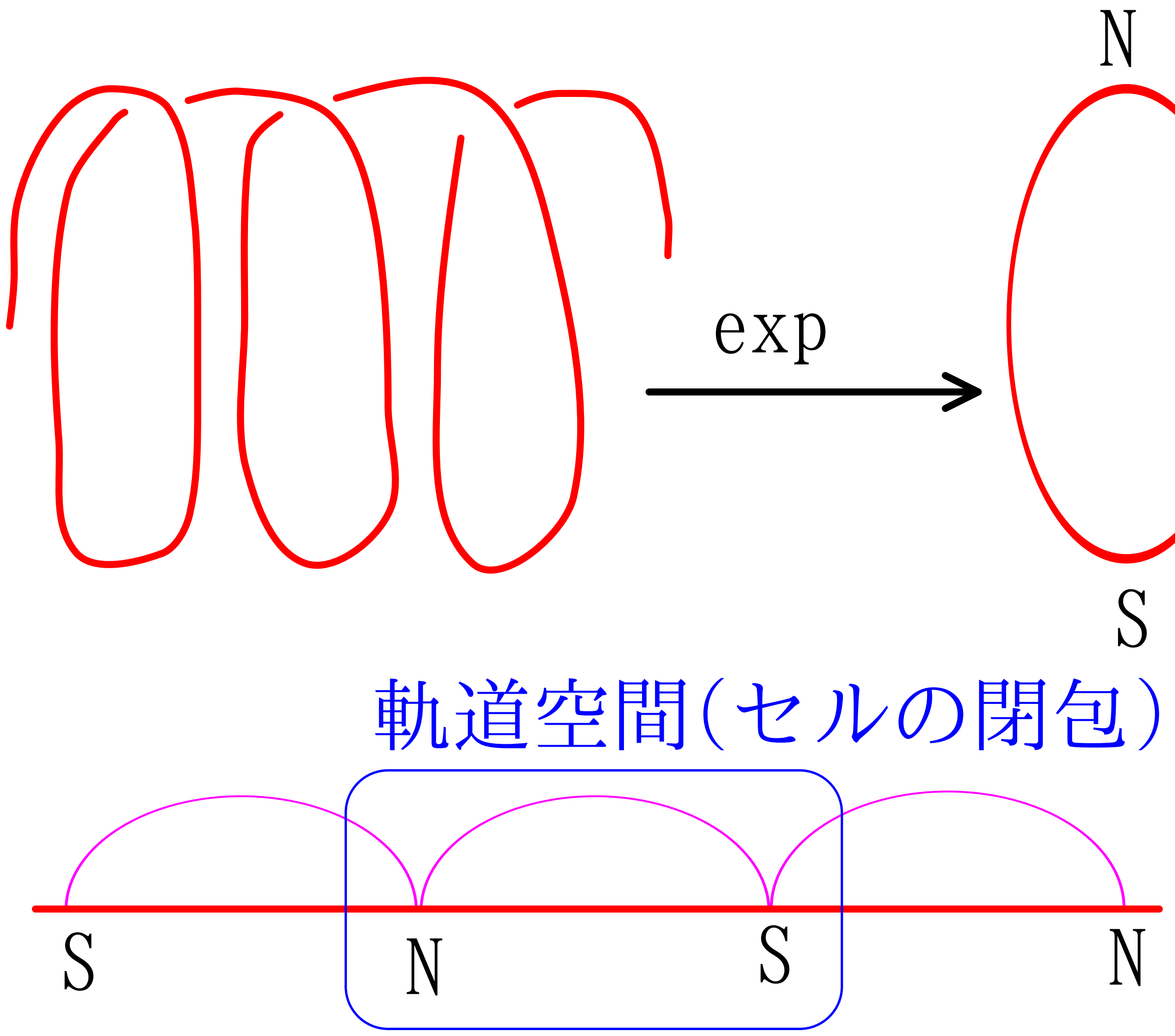
$K \curvearrowright M$:Riemann 多様体への等長作用,

超極作用: 平坦な閉全測地的部分多様体 A が存在して任意の点の K-軌道が A と直交して交わる

A: **切断**

このとき，軌道空間 $\cong A/\sim$


M=二次元球面
N
K=SO(2)
軌道空間
点
小円
大円
S


exp
N
S
軌道空間(セルの閉包)
S
N
S
N

§1 重複度付きルート系

$\mathfrak{a}$：内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元線形空間

有限部分集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が $\mathfrak{a}$ の**ルート系**

(1) $\mathfrak{a} = \mathrm{span}(\Sigma)$

(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して $s_\alpha \beta := \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha \in \Sigma$

(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$$

既約, **被約** (reduced) の定義，分類

全測地点 $\in \Gamma := \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\ (\lambda \in \Sigma)\}$

正則点 $\in \mathfrak{a}_r := \bigcap_{\lambda \in \Sigma} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}\}$,

特異点 $\in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$,　**セル** : $\mathfrak{a}_r$ **の連結成分**

Σ **の Weyl 群:** $W(\Sigma) \curvearrowright \Sigma$

Σ **の Affine Weyl 群** $\tilde{W}(\Sigma)$ **:**
$\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\}$ **で生成される** $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ **の部分群**

命題　$\mathfrak{a} = \bigcup_{s \in \tilde{W}(\Sigma)} s\overline{P_0} \quad (P_0 :$ **セル**$)$

Π：Σ の**基本系**

Σ が既約のとき，$\tilde{\alpha}$：**最高ルート**

$$P_0 = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \quad (\lambda \in \Pi), \langle \tilde{\alpha}, H \rangle < \pi\}$$ **(三角錐)**

$$m : \Sigma \to \mathbb{R}_{>0}$$

λ の**重複度**:$m(\lambda) = m(-\lambda) = m(s\lambda) > 0 \quad (s \in W(\Sigma))$

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H := -\sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle)\lambda \in \mathfrak{a},$$

$$F(H) := -\sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}} m(\lambda) \log |\sin(\langle \lambda, H \rangle)|,$$

$$\mathrm{Vol}(H) := \exp(-F(H)) > 0 : \quad H \text{ の体積}$$

m_H:H の平均曲率ベクトル

命題 $H \in \mathfrak{a}$ と $\sigma = (s, X) \in \tilde{W}(\Sigma)$ に対して $H' := \sigma H$

$\Rightarrow \mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$

定義 $H \in \mathfrak{a}$:**極小点** $\Leftrightarrow m_H = 0$

$H \in \mathfrak{a}$: **austere 点** $\Leftrightarrow$ 重複度付きの集合

$$\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle)(\text{重複度 } m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$

が重複度も含めて -1 倍に関して不変

命題 **全測地点** $\Rightarrow$**austere 点** $\Rightarrow$ **極小点**

命題 $\exists H \in \mathfrak{a}$ **：全測地点でない austere 点**
$\Rightarrow \Sigma = BC_1 = \{\pm e_1, \pm 2e_1\}, \quad m(e_1) = m(2e_1)$

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^{\Delta} \quad (\{\text{ 頂点 }\} \cup \{\text{ 辺 }\} \cup \{\text{ 面 }\} \cup \{\text{ 内部 }\})$$

$H \in P_0^{\Delta}$ **に対して** $(\mathrm{grad} F)(H) = m_H$

定理 $\exists ! H \in P_0^{\Delta}$**：極小点，特に** $\overline{P_0}$ **の頂点は極小点**

極小点 H **が** $\overline{P_0}$ **の頂点でなければ** H **は不安定**

§ 2 イソトロピー群の軌道

(G, F): **compact 対称対,**

$M = G/F$: **compact 対称空間,** $\pi : G \to M$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$**(標準分解)**

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$: **極大可換部分空間**

$\lambda \in \Sigma$ **に対して**

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda) := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \lambda, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

$\Sigma := \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda) \neq \{0\}\}$ **(制限ルート系)**

$\lambda \in \Sigma$ **に対して** $m(\lambda) := \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda)$ **(重複度)**

軌道 $F\pi(\exp H)$ $(H \in \mathfrak{a})$

$F\pi(\exp H)$ が正則軌道 $\Leftrightarrow$ H が正則点

$F\pi(\exp H)$: 全測地的部分多様体 $\Leftrightarrow$ H: 全測地点

$F\pi(\exp H)$:極小部分多様体 $\Leftrightarrow$ H: 極小点

定義 austere 部分多様体 (Harvey-Lawson)

A: $L \subset M$ の形作用素

L の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値全体が -1 倍に関して不変．-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，L : austere 部分多様体

命題 austere 部分多様体 $\Rightarrow$ 極小部分多様体

定理　軌道 $F\pi(\exp H)$:austere 部分多様体

$\Leftrightarrow$ H: austere 点 $\Leftrightarrow$ H: 全測地的 $\Leftrightarrow$ 鏡映

鏡映部分多様体 **(Leung):** M **の対合的等長変換の固定点集合の連結成分**

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{全測地的} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

定理(廣橋-Song-高木-田崎)

$\exists ! H \in P_0^{\triangle}$**:** H **の軌道は極小，特に** $\overline{P_0}$ **の頂点の軌道は極小**

極小点 H **が** $\overline{P_0}$ **の頂点でなければ** H **の軌道は不安定**

§ 3 対称三対の定義と性質

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$: $(\mathfrak{a}, \langle\ ,\ \rangle)$ の**対称三対 (symmetric triad)**

(1) $\tilde{\Sigma}$: $\mathfrak{a}$ の既約ルート系

(2) $\Sigma (\subset \mathfrak{a})$: $\mathrm{span}(\Sigma)$ のルート系

(3) $W \neq \emptyset$:-1 倍不変, $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$

(4) $\Sigma \cap W \neq \emptyset$, $l := \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$,
$\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.

(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ **に対して**

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W$$

注意 Σ **:** $\mathfrak{a}$ **のルート系**

全測地点 $\in \Gamma = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}) \right\}$

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \}$$

正則点 $\in \mathfrak{a}_r$, **特異点** $\in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$

セル: $\mathfrak{a}_r$ **の連結成分**

Affine Weyl 群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$：

$\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z}\}$ によって生成される $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群

$$\mathfrak{a} = \bigcup_{s \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)} s\overline{P_0}, \quad P_0\text{:セル}$$

$\tilde{\Pi}$: $\tilde{\Sigma}$ の基本系

$\Sigma^+ := \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ := W \cap \tilde{\Sigma}^+$

Π:Σ の単純ルートの全体

定理　$\exists ! \tilde{\alpha} \in W^{+}$ **s.t.**

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \tilde{\alpha}, H \rangle < \tfrac{\pi}{2}, 0 < \langle \lambda, H \rangle \quad (\lambda \in \Pi) \right\}$$

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^{\Delta} \quad \textbf{(互いに素)}$$

重複度 $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), \quad n(\alpha) = n(-\alpha)$,

$$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, \quad n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W.$$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ **のとき，**
$m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$

(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ **のとき，**
$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$

(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ **とする．**
$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\|\alpha\|^2}$ **が偶数のとき，** $m(\lambda) = m(s_\alpha\lambda)$,
$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\|\alpha\|^2}$ **が奇数のとき，** $m(\lambda) = n(s_\alpha\lambda)$.

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H := -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle)\lambda$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \tan(\langle \alpha, H \rangle)\alpha : H$$ の平均曲率ベクトル

H:極小 $\Leftrightarrow m_H = 0$

$$F(H) := -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \log |\sin(\langle \lambda, H \rangle)|$$

$$- \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \log |\cos(\langle \alpha, H \rangle)|$$

$\mathrm{Vol}(H) := \exp(-F(H))(> 0)$: H の**体積**

$H \in \mathfrak{a}, \sigma = (s, X) \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ **に対して** $H' := \sigma H \in \mathfrak{a}$

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$$

(1) **任意の** $H \in P_0^{\triangle}$ **に対して** $(\mathrm{grad}\ F)(H) = m_H$

(2) **任意の** $H, H_1 \in P_0^{\triangle}$ $(H \neq H_1)$ **に対して**

$$\frac{d^2}{dt^2} F(H + t\overrightarrow{HH_1})_{|t=0} > 0$$

定理 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して，$\exists !$ 極小点 $H \in P_0^{\Delta}$

定義 $H \in \mathfrak{a}$:**austere 点** $\Leftrightarrow$

$$\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H\rangle) \ (\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$
$$\cup\{\alpha \tan(\langle \alpha, H\rangle) \ (\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$

が重複度も含めて -1 倍に関して不変

命題　全測地点 $\Rightarrow$austere 点 $\Rightarrow$ 極小点

<u>**定理**</u> $H \in \mathfrak{a}$: **austere 点** $\Leftrightarrow$

(1) $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ **が任意の** $\lambda \in (\Sigma - W) \cup (W - \Sigma)$ **について成り立つ**

(2) $2H \in \Gamma$

(3) $m(\lambda) = n(\lambda)$ **が** $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ **を満たす任意の** $\lambda \in \Sigma \cap W$ **について成り立つ**

§ 4 compact 対称三対から対称三対の構成

(G, F_1, F_2): **compact 対称三対**

$M_i = G/F_i$:**compact 対称空間**

Hermann 作用: $F_2 \curvearrowright M_1$ **(変分完備)**

$F_2 \curvearrowright M_1$: **超極** $\Leftrightarrow \exists$ **平坦な閉全測地的部分多様体** $\hat{A}$ **s.t.**
M_1 **の任意の点の** F_2**-軌道が** $\hat{A}$ **と直交して交わる．** $\hat{A}$**：切断**

定理 (HPTT) Hermann 作用は超極

$\pi_1 : G \to M_1, \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$:**極大可換部分環**

$A = \exp \mathfrak{a}$: **トーラス，**$\hat{A} = \pi_1(A)$**：切断**

$G = F_2 A F_1$

(参考)[Jensen] G:**非 compact 連結単純 Lie 群，中心有限．**G **上の任意の対合** τ **に対して，Cartan 対合** σ **を** τ **と可換にとれる．**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$:**極大可換部分空間**

K, H**：**$\mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ **に対応する** G **の解析的部分群．**$A := \exp \mathfrak{a}$**，**

$$G = K\overline{A}H$$

命題(HPTT) $F_2\backslash G/F_1 \cong \mathfrak{a}/\sim$

以下，$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ と仮定．更に次の (A), (B), (C) のいずれか一つを仮定する．

(A) G:単純，θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない．

(B) (小池) U が compact 連結単純 Lie 群, σ が U 上の対合で $G = U \times U$，

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma(g),\sigma(h))$$

(C) (σ-作用) U が compact 連結単純 Lie 群, σ が U 上の外部型の対合で $G = U \times U$，

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma^{-1}(h),\sigma(g)).$$

(B) のとき:$F(\theta_2, G) = F(\sigma, U) \times F(\sigma, U)$**,** $M_1 \cong U$

$$(a, b) \cdot x = axb^{-1} \qquad (x \in U, a, b \in F(\sigma, U))$$

(C) のとき: $F(\theta_2, G) = \{(g, \sigma(g)) \mid g \in U\}$**,** $M_1 \cong U$

$$g \cdot x = gx\sigma(g)^{-1}$$

$(G, F_1, F_2) \rightsquigarrow \mathfrak{a}$ **の重複度付き対称三対** $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

θ_1 **と** θ_2 **は可換だから**

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$\alpha \in \mathfrak{a}$ **に対して**

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$

$\epsilon = \pm 1$ **に対して**

$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1\theta_2 X = \epsilon X\}$

$$\Sigma := \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}$$

$$W := \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

$\lambda \in \Sigma$ と $\alpha \in W$ に対して

$$m(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, 1), \quad n(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

<u>定理</u> $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対

§ 5 Hermann 作用への応用

(G, F_1, F_2)：**(A),(B),(C)** のいずれかを満たす

$\rightsquigarrow$ $\mathfrak{a}$ の対称三対:$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

定理 $F_2\backslash G/F_1 \cong \overline{P_0}$

$F_2\pi_1(\exp H)$:正則，極小，**austere**，全測地的

$\Leftrightarrow$ H:正則点，極小点，**austere** 点，全測地点

定理　軌道 $F_2\pi_1(\exp H)$:全測地的 $\Leftrightarrow$ 鏡映

定理　各 $P_0^{\triangle}$ に対して $\exists!$ 極小部分多様体 $F_2\pi_1(\exp H)$．
特に $\overline{P_0}$ の頂点 H に対して $F_2\pi_1(\exp H)$ は極小部分多様体．極小点 H が $\overline{P_0}$ の頂点でなければ $F_2\pi(\exp H)$:不安定

(I-S-T) $L \subset M_1$．各点 $x \in L$ における法ベクトル
$\xi \in T_x^{\perp}L$ に対して，次の条件を満たす M_1 の等長変換 σ_ξ が存在するとき，L: 弱鏡映部分多様体

$$\sigma_\xi(x) = x, \quad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \quad \sigma_\xi(L) = L$$

(このとき，$(d\sigma_\xi)_x^{-1}A_\xi(d\sigma_\xi)_x = -A_\xi$)

命題 鏡映 $\Rightarrow$ 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere $\Rightarrow$ 極小

§ 6 実形の交叉への応用

S^2 の二つの大円の交叉

$$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$J = (1/2, 0, 0),\ M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))J$$

$$\tau : \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3;$$

$$X = (x, y, z) \mapsto -\bar{X} = (x, -y, z)$$

$$F(\tau) = L = \{(\tfrac{1}{2}\cos\theta, 0, \tfrac{1}{2}\sin\theta)\} = S^1 \ni J$$

$$I_\tau : G = SU(2) \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1} = \bar{g}$$

$$F(I_\tau) = SO(2)$$

$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{p}$ **(標準分解)**

$\mathfrak{a} = \mathbb{R}J, \quad \alpha = 4J, \quad \langle \alpha, J \rangle = 1$

$R = \{\pm\alpha\} = A_1,$ **ワイル群** $W(R) = \{\pm 1\}$

$H \in \mathfrak{a}$ **に対して**

$\langle \alpha, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ **のとき，**$S^1 = \mathrm{Ad}(\exp H)S^1,$

$\langle \alpha, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ **のとき，**

$$S^1 \cap \mathrm{Ad}(\exp H)S^1 = \{\pm J\} = W(R)J$$

ルート系に付随する特性元

R: 内積を持つベクトル空間 $(\mathfrak{a}, \langle\ ,\ \rangle)$ の既約ルート系

$J \in \mathfrak{a} - \{0\}$ が R に付随した**特性元**

$\Leftrightarrow$ 任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, J \rangle = 0, \pm 1$

$W(R)$: R のワイル群

<u>**命題**</u>　$W(R)J$ は二点等質空間

compact 型既約 Hermite 対称空間 M

実形 $L = F(\tau) \subset M = G \cdot J \subset \mathfrak{g}$

$I_\tau : G \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ **(対合)**

$(G, F(I_\tau)) \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ **(標準分解)**

極大可換 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \rightsquigarrow$ **制限ルート系** $R \subset \mathfrak{a}$

$H \in \mathfrak{a}$ **: 正則元** $\Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in R)$

§6.1　合同な二つの実形の交叉

定理

(M, J) : **compact 型既約 Hermite 対称空間**

$M \supset L$: **実形**

$L \cap aL$: **離散的** $\Leftrightarrow H$: **正則元**　　$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$

このとき，

$$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J = \text{「}L\text{ の大対蹠集合」}$$

(Chen-Nagano) $S \subset L$**: 対蹠集合** $\Leftrightarrow$ **任意の** $x, y \in S$ **に対して** $s_x(y) = y$

L **の対蹠集合の元の個数の最大値を 2-number といい，** $\#_2 L$ **で表す．**

大対蹠集合: $\#_2 L$ **を与える対蹠集合**

§ 6.2 合同でない二つの実形の交叉

二つの実形 $L_i = F(\tau_i) \subset M = G \cdot J$

$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ **とできる．**

compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \mathfrak{g} &= \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 \\ &= (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \end{aligned}$$

極大 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \rightsquigarrow$ **対称三対** $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

$H \in \mathfrak{a}$ **:** **<u>正則元</u>** $\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \Sigma), \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \ (\alpha \in W) \end{cases}$

定理

(M, J) ： compact 型既約 Hermite 対称空間

$M \supset L_1, L_2$ ： 実形 $(L_1 \neq L_2)$

$L_1 \cap aL_2$ ： 離散的 $\Leftrightarrow H$ ： 正則元

$$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$$

このとき，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

系 交叉 $L_1 \cap aL_2$ $(a = \exp H)$ が離散的であると仮定する．
もし，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ならば，$\tilde{\Sigma} = R_1$ であり，

$$L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J$$

となる．これは L_1 の大対蹠集合である．

系の条件を満たす (M, L_1, L_2)

(1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$. **このとき，**
$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^n$.

(2) $(Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$.
このとき， $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(3) $(SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$.
このとき， $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(4) $(E_7/T \cdot E_6, T \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$．

このとき， $\#(L_1 \cap aL_2) = 8$．

(5) $(E_6/T \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$．

このとき， $\#(L_1 \cap aL_2) = 3$．

(6) $(G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$．

このとき， $\#(L_1 \cap aL_2) = \begin{pmatrix} m+q \\ q \end{pmatrix}$．

$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ **のとき** $\tilde{\Sigma} = R_1, L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$

(7)
$(M, L_1, L_2) = (Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1})$
$(s > 0, r < t)$ **について** $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$
$\#(L_1 \cap aL_2) = 2r$**．**

$\tilde{\Sigma} \neq R_1, R_2$ **となる場合：**

(8) $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ **のとき，** $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J,\ \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$

$$\#_2(L_1) = \binom{2m}{m}, \quad \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

$$\tilde{\Sigma} = C_m, \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$

6．今後の課題

○ 既約の仮定を落とす． $\rightsquigarrow$ $\tilde{\Sigma}$ 既約とは限らない

○ 一般化された複素旗多様体内の二つの実形の交叉

$(\mathfrak{a}_1, R_1), (\mathfrak{a}_2, R_2)$ と $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の関係

(大島-関口) $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$: 可換

$\rightsquigarrow$ 二つの佐武図形と対称三対の関係 (Klein の結果を使う)

○ Hermann 作用と実形の交叉の直接的な関係