対称三対とその応用

井川 治

2014 年 5 月 24 日

重複度付き対称三対は重複度付き既約ルート系の拡張概念である．そこでこの講演ではまず重複度付き既約ルート系の定義と基本性質を述べ，それを compact 対称空間のイソトロピー群の軌道の性質を調べることに応用する．次に重複度付き対称三対の定義と基本性質を述べ，ある条件を満たす compact 対称三対から重複度付き対称三対を構成する方法を述べる．以上の準備のもとに Hermann 作用の軌道と compact 型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉を調べる (田中-田崎との共同研究)．Hermann 作用は対称空間のイソトロピー作用の拡張であり，イソトロピー作用の持つ超極性と変分完備性と呼ばれる良い性質を受け継ぐ．対称三対を用いると Hermann 作用の軌道全体のなす空間 (軌道空間) を記述でき，さらに，個々の軌道の性質も調べられる．その結果，イソトロピー作用の軌道の性質との際立った違いも現れる．compact 型 Hermite 対称空間の対合的反正則等長変換の固定点集合を実形という．実形は連結な全測地的 Lagrange 部分多様体になる．任意の compact 型 Hermite 対称空間は少なくとも一つの実形を持つ (村上信吾)．互いに合同な二つの実形の交叉が離散的になるための条件は制限ルート系を用いて記述できる．交叉が離散的のとき，その交叉は実形の大対蹠集合になることがわかる．非合同な二つの実形の交叉が離散的になるための条件と，離散的なときの交叉は対称三対を用いて記述できる．その結果，合同な二つの実形の交叉との際立った違いも現れる．

1 重複度付きルート系

定義 1.1. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元線形空間とする．有限部分集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が $\mathfrak{a}$ の**ルート系**であるとは，次の 3 つの条件を満たすときを言う．

(1) $\mathfrak{a} = \mathrm{span}(\Sigma)$.

(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して $s_\alpha\beta := \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha \in \Sigma$.

(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}.$$

ルート系 Σ が**既約**であるとは Σ が互いに直交する空でない二つの部分集合の和に分かれない場合を言う．

Σ を $\mathfrak{a}$ のルート系とする．$W(\Sigma)$ で Σ の Weyl 群を表す．

$$\Gamma = \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle\lambda, X\rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\ (\lambda \in \Sigma)\}$$

とおく．Γ の点を**全測地点**という．Σ が既約のとき，全測地点の全体は分類されている ([4]).

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda\in\Sigma}\{H \in \mathfrak{a} \mid \langle\lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}\}$$

とおく．$\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**，$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$ の点を**特異点**という．$\mathfrak{a}_r$ の連結成分を**セル**という．Σ の Affine Weyl 群 $\tilde{W}(\Sigma)$ とは $\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群のことである．

命題 1.2. Affine Weyl 群 $\tilde{W}(\Sigma)$ はセル全体に推移的に作用する．

上の補題より，一つのセルを P_0 で表すと

$$\mathfrak{a} = \bigcup_{s\in\tilde{W}(\Sigma)} s\overline{P_0}$$

Π で Σ の基本系を表す．Σ が既約のとき，$\tilde{\alpha}$ で最高ルートを表すと，一つのセル P_0 は

$$P_0 = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle\lambda, H\rangle > 0 \quad (\lambda \in \Pi), \langle\tilde{\alpha}, H\rangle < \pi\}$$

によって与えられる．

次の条件を満たす写像 $m : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える．[1] $\lambda \in \Sigma, s \in W(\Sigma)$ に対して

$$m(\lambda) = m(-\lambda) = m(s\lambda)$$

[1] この条件は Σ が既約の場合には $\lambda, \mu \in \Sigma$ に対して $\|\lambda\| = \|\mu\|$ ならば $m(\lambda) = m(\mu)$ と同値である．

このとき，$m(\lambda)$ を λ の**重複度**という．重複度を備えたルート系を**重複度付きルート系**という．[2]以下，Σ を重複度付きルート系とする．$H \in \mathfrak{a}$ に対して [7] を踏まえて

$$
\begin{aligned}
m_H &= - \sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle) \lambda \in \mathfrak{a}, \\
F(H) &= - \sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}} m(\lambda) \log |\sin(\langle \lambda, H \rangle)|, \\
\mathrm{Vol}(H) &= \exp(-F(H)) > 0
\end{aligned}
$$

とおく．m_H を H の**平均曲率ベクトル**,$\mathrm{Vol}(H)$ を H の**体積**という．

命題 1.3. Σ を $\mathfrak{a}$ の重複度付きルート系とする．$H \in \mathfrak{a}$ と $\sigma = (s, X) \in \tilde{W}(\Sigma)$ に対して $H' = \sigma H$ とおくと

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$$

定義 1.4. Σ を $\mathfrak{a}$ の重複度付きルート系とする．$H \in \mathfrak{a}$ が**極小点**であるとは，$m_H = 0$ となるときをいう．

定義 1.5. $H \in \mathfrak{a}$ が **austere 点**であるとは，重複度付きの集合

$$\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle)(\text{重複度 } m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$

が重複度も含めて -1 倍に関して不変になることである．

H が全測地点ならば任意に与えた重複度に対して H は asutere 点である．austere 点は極小点である．

命題 1.6. Σ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き既約ルート系とする．$H \in \mathfrak{a}$ を全測地点でない austere 点とすると，H は次の形に限られる：

$\Sigma = BC_1 = \{\pm e_1, \pm 2e_1\}, m(e_1) = m(2e_1)$ であり，$H = te_1, \tan^2 t = 2$.

$\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して $\overline{P_0}$ の部分集合 P_0^Δ を

$$
P_0^\Delta = \left\{ H \in \overline{P_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \lambda, H \rangle > 0 (\lambda \in \Delta \cap \Pi), \\ \langle \lambda, H \rangle = 0 (\lambda \in \Delta - \Pi), \\ \langle \tilde{\alpha}, H \rangle \begin{cases} < \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \in \Delta \text{のとき}), \\ = \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \notin \Delta \text{のとき}) \end{cases} \end{array} \right\}
$$

[2]この定義は長野-田中における重複度付き制限ルート系の概念とは微妙に異なる．長野-田中における重複度付き制限ルート系は，ここの意味での重複度付きルート系になるが逆は成り立たない．

と定義する．このとき，$\overline{P_0}$ は次のように階層化される：

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^\Delta$$

$H \in P_0^\Delta$ に対して

$$(\mathrm{grad}F)(H) = m_H$$

が成り立つ．

定理 1.7. [7] 各 P_0^Δ に対してただ一つ極小点 H が存在する．特に $\overline{P_0}$ の頂点は極小点である．極小点 H が $\overline{P_0}$ の頂点でなければ H は不安定である．

2 イソトロピー群の軌道

G を compact 連結半単純 Lie 群とし，(G, F) を compact 対称対とする．商多様体 $M = G/F$ は compact 対称空間になる．$\pi : G \to M$ で自然な射影を表す．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と標準分解し，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を極大可換部分空間とする．$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \lambda, H \rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)\}$$

とおき，$\lambda \in \Sigma$ の重複度 $m(\lambda)$ を

$$m(\lambda) = \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$$

とおく．Σ は $\mathfrak{a}$ の重複度付きルート系になる．Σ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系という．$x \in M$ について F-軌道 Fx を考察する．軌道 Fx は連結になる ([4])．$G = F(\exp \mathfrak{a})F$ となるので $x = \pi(\exp H)$ $(H \in \mathfrak{a})$ と仮定してよい．

$$F\pi(\exp H) \text{ が正則軌道} \Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \Sigma) \Leftrightarrow H \text{ が正則点}$$

命題 2.1. $F\pi(\exp H)$ が全測地的部分多様体になるための条件は H が全測地点になることである．

命題 2.2. 軌道 $F\pi(\exp H)$ が極小部分多様体になるための条件は H が極小点になることである．

Harvey-Lawson[5] はリーマン多様体 M の部分多様体に対して，austere 部分多様体の概念を定義した：

リーマン多様体 M の部分多様体 L の形作用素を A で表す．L の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値全体が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，L を **austere 部分多様体**という．austere 部分多様体は極小部分多様体である．Harvey-Lawson[5] は球面内のいくつかの austere 部分多様体を構成した．Bryant[2] は Euclid 空間内のいくつかの austere 部分多様体を構成した．[10] では compact 対称空間の線形イソトロピー表現 (s-表現) の軌道を接空間内の超球面の部分多様体とみたとき，austere 軌道と弱鏡映軌道を分類した．軌道 $K\pi(\exp H)$ が austere 部分多様体になるための条件は H が austere 点になることである．

命題 2.3. [8] Σ を compact 対称対の重複度付き制限ルート系とする．$\lambda, 2\lambda \in \Sigma$ ならば $m(\lambda) > m(2\lambda)$ が成り立つ．

命題 1.6 と命題 2.3 より次が得られる．

定理 2.4. [8] $M = G/F$ を compact 型既約 Rimann 対称空間とする．F-軌道が austere ならば全測地的である．

Leung[15] は Riemann 多様体の部分多様体に対して鏡映という概念を定義した：Riemann 多様体 M の対合的等長変換の固定点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**という．鏡映部分多様体を定める対合的等長変換 (鏡映) は鏡映部分多様体に対して一意に定まる．

一般に

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{全測地的} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

が成り立つ．

命題 2.5. compact 対称空間 $M = G/F$ のイソトロピー群の軌道について

$$\text{鏡映} \Leftrightarrow \text{全測地的} \Leftrightarrow \text{austere}$$

が成り立つ．

定理 1.7 から直ちに次が従う．

定理 2.6. [7] 各 P_0^Δ に対してただ一つ極小部分多様体 $K\pi(\exp H)$ が存在する．特に $\overline{P_0}$ の頂点 H に対して $F\pi(\exp H)$ は極小部分多様体である．極小点 H が $\overline{P_0}$ の頂点でなければ極小部分多様体 $F\pi(\exp H)$ は不安定である．

注意　$\overline{P_0}$ の頂点 H に対して極小部分多様体 $K\pi(\exp H)$ の安定性は，この考察ではわからない．

3　対称三対の定義と性質

定義 3.1. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の**対称三対 (symmetric triad)** であるとは次の条件 (1)~(6) を満たす場合を言う．

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系である．

(2) $\Sigma(\subset \mathfrak{a})$ は $\mathrm{span}(\Sigma)$ のルート系である．

(3) W は -1 倍に関して不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合で $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$.

(4) $\Sigma \cap W \neq \emptyset$ であり，$l = \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$ とおくとき $\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.

(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma.$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W.$$

このとき，Σ は $\mathfrak{a}$ のルート系になる．すなわち，$\mathrm{span}(\Sigma) = \mathfrak{a}$ が成り立つ．実際，

$$\mathfrak{a} \supset \mathrm{span}(\Sigma) \supset \mathrm{span}(\Sigma \cap W) \supset \mathrm{span}\{\text{短いルート} \in \tilde{\Sigma}\} = \mathfrak{a}$$

よって，$\mathrm{span}(\Sigma) = \mathfrak{a}$

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に対して

$$\Gamma = \left\{ X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}) \right\}$$

とおく．Γ の点を**全測地点**という．

$\mathfrak{a}$ の部分集合 $\mathfrak{a}_r$ を

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda\in\Sigma,\alpha\in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle\lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle\alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

と定義する．$\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**, $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$ の点を**特異点**という．$\mathfrak{a}_r$ の連結成分をセルという．

定義 3.2. $\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z}\}$ によって生成される半直積 $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群を $\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の **Affine Weyl 群** $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ という．

$(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda)$ の作用は超平面 $\langle\lambda, H\rangle = n\pi$, に関する鏡映であり，$(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha)$ の作用は超平面 $\langle\alpha, H\rangle = \frac{2n+1}{2}\pi$ に関する鏡映である．

命題 3.3. Affine Weyl 群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ はセルの全体に推移的に作用する．一つのセルを P_0 で表すと $\mathfrak{a} = \bigcup_{s\in\tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)} s\overline{P_0}$

$\tilde{\Sigma}$ の一つの基本系 $\tilde{\Pi}$ をとり，$\tilde{\Sigma}^+$ で $\tilde{\Pi}$ に関する正ルートの全体を表す. $\Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$ とおくと，$\Sigma = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^+), W = W^+ \cup (-W^+)$ となる．Σ の単純ルートの全体を Π と表す.

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \left| \begin{array}{ll} 0 < \langle\lambda, H\rangle & (\lambda \in \Pi), \\ \langle\lambda, H\rangle < \frac{\pi}{2} & (\lambda \in \Sigma^+ \cap W^+), \\ \langle\lambda, H\rangle < \pi & (\lambda \in \Sigma^+ - W^+), \\ -\frac{\pi}{2} < \langle\alpha, H\rangle < \frac{\pi}{2} & (\alpha \in W^+ - \Sigma^+) \end{array} \right. \right\},$$

とおくと，P_0 はセルになる．

定理 3.4. ただ一つ $\tilde{\alpha} \in W^+$ が存在して

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle\tilde{\alpha}, H\rangle < \frac{\pi}{2}, 0 < \langle\lambda, H\rangle \quad (\lambda \in \Pi) \right\}.$$

部分集合 $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して

$$P_0^\Delta = \left\{ H \in \overline{P_0} \left| \begin{array}{l} \langle\lambda, H\rangle > 0 \quad (\lambda \in \Delta \cap \Pi), \\ \langle\lambda, H\rangle = 0 \quad (\lambda \in \Pi - \Delta), \\ \langle\tilde{\alpha}, H\rangle \begin{cases} < \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \in \Delta\text{のとき}), \\ = \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \notin \Delta\text{のとき}) \end{cases} \end{array} \right. \right\},$$

とおくとセルの閉包 $\overline{P_0}$ は次のように階層化される：

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^{\Delta} \quad (\text{互いに素}).$$

定義 3.5. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とおく．写像 $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}^+$ で次の条件を満たすものを考える．

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), \quad n(\alpha) = n(-\alpha)$ であり

$$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, \quad n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W.$$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ のとき，$m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$

(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ のとき，$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$

(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ とする．
$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\|\alpha\|^2}$ が偶数のとき，$m(\lambda) = m(s_\alpha\lambda)$,
$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\|\alpha\|^2}$ が奇数のとき，$m(\lambda) = n(s_\alpha\lambda)$.

このとき，$m(\lambda), n(\alpha)$ をそれぞれ λ, α の**重複度**という．重複度が与えられた対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を**重複度付き対称三対**と言う．

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle\lambda, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda)\cot(\langle\lambda, H\rangle)\lambda + \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle\alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha)\tan(\langle\alpha, H\rangle)\alpha.$$

とおき，m_H を H の**平均曲率ベクトル**という．

$$F(H) = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle\lambda, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda)\log|\sin(\langle\lambda, H\rangle)| - \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle\alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha)\log|\cos(\langle\alpha, H\rangle)|$$

とおく．$\mathrm{Vol}(H) = \exp(-F(H))(> 0)$ を H の**体積**と呼ぶ．

命題 3.6. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}, \sigma = (s, X)$ を Affine Weyl 群の元とし $H' = \sigma H \in \mathfrak{a}$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$$

定義 3.7. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}$ が**極小**であるとは $m_H = 0$ となるときを言う．

命題 3.8. (1) 任意の $H \in P_0^\Delta$ に対して $(\mathrm{grad}\ F)(H) = m_H$.

(2) 任意の $H, H_1 \in P_0^\Delta$ $(H \neq H_1)$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2} F(H + t\overrightarrow{HH_1})_{|t=0} > 0.$$

定理 3.9. 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して，ただ一つ極小点 $H \in P_0^\Delta$ が存在する.

定義 3.10. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}$ が **austere 点**であるとは

$$\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle)\ (\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$
$$\cup \{\alpha \tan(\langle \alpha, H \rangle)\ (\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\}$$

によって定義される $\mathfrak{a}$ 内の部分集合が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるときを言う.

命題 3.11. 次が成り立つ.

(1) 全測地点は任意に与えた重複度に関して austere 点である.

(2) austere 点は極小点である.

定理 3.12. $H \in \mathfrak{a}$ が austere 点となるための必要十分条件は

(1) $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ が任意の $\lambda \in (\Sigma - W) \cup (W - \Sigma)$ について成り立つ.

(2) $2H \in \Gamma_{\Sigma \cap W}$.

(3) $m(\lambda) = n(\lambda)$ が $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ を満たす任意の $\lambda \in \Sigma \cap W$ について成り立つ.

4 compact 対称三対から対称三対の構成

(G, F_1, F_2) を compact 対称三対とする．商多様体 $M_i = G/F_i$ は G の両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される M_i の G-不変計量に関して compact 対称空間になる．F_2 の M_1 への自然な等長作用を **Hermann 作用**という．特に $F_1 = F_2$ の場合には Hermann 作用はイソトロピー作用である.

Hermann 作用は超極作用になることを説明しておこう．一般に，リーマン多様体 M_1 にリー群 F_2 が等長変換群として作用しているとする．このとき，F_2 の M_1 への作用が**超極**であるとは，平坦な閉全測地的部分多様体 $\hat{A}$ が存在して，M_1 の任意の点の F_2-軌道が $\hat{A}$ と直交して交わる場合をいう．$\hat{A}$ をこの作用の**切断**という．

Hermann 作用が超極であることを説明するために切断を構成しておこう．F_i を定める G の対合を θ_i と表す．$\pi_1 : G \to M_1$ で自然な射影を表す．θ_i の微分写像も θ_i と表し，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を二通に標準分解する．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{f}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ を極大可換部分環とする．このとき，$A = \exp \mathfrak{a}$ は G のトーラスになり，$\hat{A} = \pi_1(A)$ が Hermann 作用の切断を与える ([6])．特に

$$G = F_2 A F_1$$

が成り立つ．[3] したがって，M_1 への F_2-作用の軌道全体のなす空間 $F_2\backslash G/F_1$ は $\mathfrak{a}$ をある同値関係 $\sim$ で割った空間と同一視される：

$$F_2\backslash G/F_1 \cong \mathfrak{a}/\sim$$

ここで

$$H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow F_2\pi_1(\exp H_1) = F_2\pi_1(\exp H_2)$$

以下，$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ と仮定する．更に次の (A), (B), (C) のいずれか一つを仮定する．

(A) G は単純で θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない．

(B) (小池 [14]) U が compact 連結単純 Lie 群, σ が U 上の対合で $G = U \times U$,

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma(g), \sigma(h))$$

[3]形式的に類似の結果で次が知られている [12, Theorem 4.1]．G を非 compact 連結 Lie 群で，その中心が有限位数とする．G 上の任意の対合 τ に対して，Cartan 対合 σ を τ と可換にとれる [13, Theorem 6.16]．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を σ と τ により

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$$

と分解する．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ を極大可換部分環とする．K, H でそれぞれ $\mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ に対応する G の解析的部分群を表す．$A = \exp \mathfrak{a}$ とおくと，

$$G = K\overline{A}H$$

(C) U が compact 連結単純 Lie 群, σ が U 上の外部型の対合で $G = U \times U$,

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)).$$

(B) のときには，$F(\theta_2, G) = F(\sigma, U) \times F(\sigma, U)$ であり，$M_1 = U$ と自然に同一視すると

$$(a,b) \cdot x = axb^{-1} \qquad (x \in U, a, b \in F(\sigma, U))$$

(C) のときには，Hermann 作用は σ-作用と呼ばれる．$F(\theta_2, U) = \{(g, \sigma(g)) \mid g \in U\}$ であり，$M_1 = U$ と自然に同一視すると σ-作用は U の U への作用

$$g \cdot x = gx\sigma(x)^{-1}$$

と同値になる．

(A),(B),(C) いずれかを満たす compact 対称三対 (G, F_1, F_2) から $\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を構成しよう．θ_1 と θ_2 は可換だから

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定義し，$\tilde{\Sigma} = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$ とおく．$\epsilon = \pm 1$ に対して $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1\theta_2 X = \epsilon X\}$$

と定める．$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_1\theta_2$-不変だから

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1).$$

このとき，

$$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}, \quad W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

とおく．$\lambda \in \Sigma$ と $\alpha \in W$ に対して

$$m(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, 1), \quad n(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

とおく．

定理 4.1. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対になる.[4]

閉部分群 G_{12} と F_{12} を

$$G_{12} = F(\theta_1\theta_2, G), \quad F_{12} = \{g \in G_{12} \mid \theta_1(g) = g\}$$

と定義する．このとき，G_{12} と F_{12} の Lie 環は

$$\mathfrak{g}_{12} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2), \quad \mathfrak{k}_{12} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$$

compact 対称対 (G_{12}, F_{12}) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系は Σ に一致する.

5 Hermann 作用への応用

(G, F_1, F_2) を前節の条件 (A),(B),(C) のいずれかを満たす compact 対称三対とする．構成される $\mathfrak{a}$ の対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す．Hermann 作用の軌道を考えるためには $H \in \mathfrak{a}$ として，軌道 $F_2\pi_1(\exp H)$ を考えれば十分である．Affine Weyl 群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ で移り合う二点は同一の軌道を定めるので軌道空間 $F_2\backslash G/F_1$ はセル P_0 の閉包 $\overline{P_0}$ と同一視される[5]：

$$F_2\backslash G/F_1 \cong \overline{P_0}$$

このとき，$F_2\pi_1(\exp H)$ が正則軌道，極小軌道，全測地的軌道になるための条件は H がそれぞれ正則点，極小点，全測地点になることである.

定理 5.1. 軌道 $F_2\pi_1(\exp H)$ が全測地的になるための必要十分条件は，それが鏡映になることである.

定理 5.2. 各 P_0^{Δ} に対してただ一つ極小部分多様体 $F_2\pi_1(\exp H)$ が存在する．特に $\overline{P_0}$ の頂点 H に対して $F_2\pi_1(\exp H)$ は極小部分多様体である．極小点 H が $\overline{P_0}$ の頂点でなければ極小部分多様体 $F_2\pi(\exp H)$ は不安定である.

---

[4] 具体的に与えられた (G, F_1, F_2) に対して，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の具体的な形も決定されている．(A) または (B) を満たす (G, F_1, F_2) の全体から全ての対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が得られる．(C) を満たす具体的な (G, F_1, F_2) で G が例外型のとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の具体的な形を決定するために Vogan 図形 ([13]) を用いた.

[5] この結果が田崎先生の多重ケーラー角度に関する定理の一般化である.

注意　$\overline{P_0}$ の頂点 H に対して極小部分多様体 $F_2\pi_1(\exp H)$ の安定性は，この考察ではわからない．

イソトロピー群の軌道の場合とは異なり，Hermann 作用の場合には豊富に austere 軌道を持つことが次の結果からわかる：

命題 5.3. 軌道 $F_2(\exp H)$ が austere であるための必要十分条件は H が austere 点になることである．

[10] では鏡映部分多様体の概念を拡張した弱鏡映部分多様体を定義した：M_1 を Riemann 多様体，L を M_1 の部分多様体とする．各点 $x \in L$ における法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}L$ に対して，次の条件を満たす M_1 の等長変換 σ_ξ が存在するとき，L を**弱鏡映部分多様体**という．

$$\sigma_\xi(x) = x, \quad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \quad \sigma_\xi(L) = L$$

このとき，$(d\sigma_\xi)_x^{-1}A_\xi(d\sigma_\xi)_x = -A_\xi$ が成り立つので弱鏡映部分多様体は austere である．一般に

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

が成り立つ．s-表現の軌道の場合には，austere 軌道を分類し，その中から弱鏡映軌道を分類することができたが，Hermann 作用の軌道の場合には，austere 軌道が分類されているにもかかわらず，弱鏡映軌道の分類は完成していない．

6　実形の交叉への応用

$\mathfrak{g}$ を compact 単純 Lie 環とし，$J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ ととる．$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とし，$M = G \cdot J$ とおく．$\mathfrak{g}$ 上に G-不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れる．G の閉部分群 K を $K = \{k \in G \mid k \cdot J = J\}$ とおく．K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [J, X] = 0\}$$

$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m} = \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}J$ と定めると

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (\text{直交直和}).$$

$\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型写像 $e^{\pi \operatorname{ad} J}$ の $(+1)$-固有空間と (-1)-固有空間がそれぞれ $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{m}$ になる．J は $\mathfrak{m}$ 上の K-作用と可換な複素構造を定める．このようにして $M \cong G/K$ は compact 型既約 Hermite 対称空間になる．逆に全ての compact 型既約 Hermite 対称空間は，このようにして得られる．L を M の実形とする．すなわち，L は M のある対合的反正則等長同型写像 τ の固定点集合である．実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体である．正の正則断面曲率を持つ compact ケーラー多様体 (compact 型 Hermite 対称空間はこの条件を満たす) の実形は連結になる ([22, Lemma 4.1])．このことから compact 型 Hermite 対称空間の二つの実形は必ず交わることがわかる．compact 型既約エルミート対称空間の実形については [16], [18] で分類されている．G 上の対合的自己同型写像 I_τ を

$$I_\tau : G \mapsto G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

と定める．G における I_τ の固定点集合を $F(I_\tau)$ と表すと $(G, F(I_\tau))$ は compact 対称対になる．この対称対による $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ と表すと $J \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ ([22, Theorem 4.3])．$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を $J \in \mathfrak{a}$ となるようにとり，$\mathfrak{a}$ に関する $(G, F(I_\tau))$ の制限ルート系を R と表す.

6.1 合同な二つの実形の交叉

交叉 $L \cap aL$ $(a \in G)$ について考察する．そのためには $a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ としてよい.

定理 6.1. [11] 交叉 $L \cap aL$ $(a = \exp H)$ が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである．このとき，

$$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$$

$W(R)J$ は L の大対蹠集合であり，$W(R)$ の作用に関して二点等質である.

$M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$ となることは知られている ([1])．$M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合を表している．L の大対蹠集合に $W(R)$ が推移的に働くことも知られている ([19])．用語の説明をしておこう．部分集合 $S \subset L$ が対蹠集合であるとは，任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となるときをいう．ここで，s_x は x に関する点対称である．L の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい，$\#_2 L$ で表す．$\#_2 L$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という．これらの概念は Chen-長野が導入した ([3]).

6.2 合同でない二つの実形の交叉

L_1, L_2 を M の二つの実形とする．L から決まる対象物に対する記号と対応する L_i から決まる対象物には同じ記号を用いる．ただし，添え字 i をつける．

以下，$\mathfrak{g}$ は単純で，L_1 と L_2 は互いに合同でないと仮定する．このとき，M は compact 型既約 Hermite 対称空間になる．合同でないという仮定から $I_{\tau_1} \not\sim I_{\tau_2}$ (τ_1 と τ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない) が成り立つ．compact 対称三対の分類と実形の分類から I_{τ_1} と I_{τ_2} は可換にとれる．$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ を極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を $J \in \mathfrak{a}$ ととり，compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$ の定める重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す．$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}_i$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{p}_i$ をとり，compact 対称対 $(G, F(I_{\tau_i}))$ の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を R_i と表す.

交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a \in G$) について考察する．そのためには $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) としてよい.

定理 6.2. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が正則点になることである．このとき，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

$W(\tilde{\Sigma})J$ は $W(\tilde{\Sigma})$ の作用に関して二点等質である.

系 6.3. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a = \exp H$) が離散的であると仮定する．もし，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ならば，$\tilde{\Sigma} = R_1$ であり，

$$L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J$$

となる．これは L_1 の大対蹠集合である.

参考文献

[1] R. Bott, *The geometry and representation theory of compact Lie groups*, Representation theory of Lie groups, (1970), 65–90, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **34**.

[2] R. L. Bryant, *Some remarks on the geometry of austere manifolds*, Bol. Soc. Bras. Mat., **21** (2) (1991), 133–157.

[3] B.-Y.-Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to Borel and Serre*, Trans. Amer. ¡ath. Soc. **308** (1988), 273–297.

[4] D.Hirohashi, O. Ikawa and H. Tasaki, *Orbits of isotropy groups of compact symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **24** (2001) 407–428.

[5] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[6] E. Heintze, R. S. Palais, C. Therng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 214–245.

[7] D. Hirohashi, H. Tasaki, H. Song and R. Takagi, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differntial geometry and its applications **13** (2000) 167–177.

[8] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions* J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.

[9] O. Ikawa, *A note on symmetric triad and Hermann action*, Proceedings of the workshop on differential geometry and submanifolds and its related topics, Saga, August 4–6, 2012, 220–229.

[10] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** No. 2 (2009) pp. 437–481.

[11] O. Ikawa, M. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, in perparation.

[12] M. F.-Jensen, *Spherical functions on a real semisimple Lie group*, Journal of functional analysis **30**, 106–146 (1978).

[13] Anthony W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser.

[14] N. Koike, Examples of certain kind of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Math. J. **43** (2014), 21–42.

[15] D. S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry, **8** (1973) 153–160.

[16] D. S. P. Leung, *Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmeric spaces*, J. Differential Geom., **14** (1979), 179–185.

[17] T. Matsuki, *Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems*, J, Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[18] M. Takeuchi, *Stability of cretain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. Journ. **36** (1984), 293–314.

[19] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[20] H. Tamaru, *The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups*, Differential Geom. Appl. 11 (1999), no. 1, 29–38.

[21] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.

[22] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[23] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[24] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", to appear in J. Math. Soc. Japan.