対称空間

田崎博之

筑波大学

2014 年 5 月 24 日

第 12 回秋葉原微分幾何セミナー

1 コンパクト対称空間と対称対

2 極大トーラスの共役性

3 多重 Kähler 角度

4 ユニタリ群の実 Grassmann 多様体への作用

1 コンパクト対称空間と対称対

M : Riemann 多様体

$\forall x \in M \ \exists s_x$: 点対称

s_x : 等長変換、$s_x^2 = 1_M$

x は s_x の孤立不動点

M を Riemann 対称空間と呼ぶ

$(ds_x)_x = -1$ となり、s_x は x を通る測地線を逆向きに変換。

定理 1.1
連結 Riemann 対称空間は測地的完備。
等長変換群全体は推移的に作用し、Lie 変換群になる。特に、Riemann 等質空間になる。

以後

対称空間：連結 Riemann 対称空間

定理 1.2　　M：対称空間

G：M の等長変換全体の単位連結成分

$o \in M, K = \{k \in G \mid ko = o\}$

$\sigma : G \longrightarrow G\ ;\ g \mapsto s_o g s_o$

　対合的自己同型 $(\sigma^2 = 1_G)$

　$F(\sigma, G)$：σ の不動点集合

　$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$

$\mathfrak{g}$: G の Lie 代数、 $\mathfrak{k}$: K の Lie 代数

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}$$

$d\sigma$ の -1 固有空間を $\mathfrak{p}$ とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} : \text{直和分解}$$

$\pi : G \longrightarrow M \; ; \; g \mapsto go$ とすると

$$d\pi_e : \mathfrak{p} \longrightarrow T_oM : \text{線形同型}$$

G：連結コンパクトLie群、

H：Gの閉部分群

(G, H)：コンパクト対称対

$\exists \sigma : G \longrightarrow G$：対合的自己同型

$F(\sigma, G)_0 \subset H \subset F(\sigma, G)$

$(G, K), G/K$：コンパクト型

$\Leftrightarrow G$：コンパクト半単純

定理 1.3 (G, K) : コンパクト対称対

$\pi : G \longrightarrow G/K$: 自然な射影、

$o = \pi(e)$

$\sigma : G \longrightarrow G$: 対合的自己同型

$F(\sigma, G)_0 \subset K \subset F(\sigma, G)$

G 不変 $\mathrm{Riemann}$ 計量に対して G/K は

対称空間になり

$$s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma, \quad \tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o$$

2 極大トーラスの共役性

定理 2.1 (G, K) : コンパクト対称対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cong T_o(G/K)$

N : G/K の全測地的部分多様体 (TGS)

$o \in N \Rightarrow T_oN$: Lie 三対系 $(\subset \mathfrak{p})$

$\mathfrak{n}$: Lie 三対系 $\subset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathrm{Exp}_o\mathfrak{n}$: TGS

N : 平坦 $\Leftrightarrow T_oN$: 可換 $(\subset \mathfrak{p})$

N : 極大平坦 TGS

$\Leftrightarrow T_oN$: 極大可換部分空間 $(\subset \mathfrak{p})$

定理 2.2 (G, K) : **コンパクト対称対**

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cong T_o(G/K)$

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}$ **の極大可換部分空間**

$A = \mathrm{Exp}_o \mathfrak{a}$

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}_G(k)\mathfrak{a}, \quad G/K = \bigcup_{k \in K} kA.$$

$\mathrm{rank}(G/K) = \dim \mathfrak{a}$: G/K **の階数**

共役性の別の見方

$\forall X \in \mathfrak{p}\ \exists k \in K\ \mathrm{Ad}(k)X \in \mathfrak{a}$

$\forall x \in G/K\ \exists k \in K\ kx \in A$

$\mathfrak{a}, A$: K の作用に関する標準形のある場所

$U(n)/O(n)$ $\mathfrak{p} \cong S_n(\mathbb{R})$ $\mathfrak{a}$: 対角行列全体

$\forall X \in S_n(\mathbb{R})\ \exists k \in O(n)$

$\mathrm{Ad}(k)X = kXk^{-1} \in \mathfrak{a}$

多くの行列の標準形 : コンパクト対称対の極大可換部分空間、極大トーラスの共役性

3 多重 Kähler 角度

定義 3.1 V : $\mathbb{C}^n$ の実 2 次元部分ベクトル空間

v_1, v_2 : V の正規直交基底

$$\theta(V) = \cos^{-1} |\langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle| : \text{Kähler 角度}$$

$$\theta(V) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V : \text{複素部分空間}$$

$$\theta(V) = \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad V \perp \sqrt{-1} V$$

命題 3.2(完全不変量)

Kähler 角度 $\theta(V)$: $U(n)$ 不変

$$\theta(V_1) = \theta(V_2) \Leftrightarrow \exists g \in U(n) : V_2 = g V_1$$

定義 3.3　ω : $\mathbb{C}^n$ の標準的 Kähler 形式

$k \leq n$ のとき、

V : $\mathbb{C}^n$ 内の実 k 次元部分空間

$\exists \alpha^1, \dots, \alpha^k$: V^* の正規直交基底

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i},$$

$$0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{[k/2]} \leq \pi/2$$

$\theta(V) = (\theta_1, \dots, \theta_{[k/2]})$: 多重 Kähler 角度

$n < k < 2n$ のとき、$\theta(V) := \theta(V^{\perp})$

$k = 2$ の Kähler 角度の拡張になっている

(1) 多重 Kähler 角度：$U(n)$ 不変

(2) $\theta(V) = (0, \ldots, 0)$

$\Leftrightarrow \exists W$: 複素 $[k/2]$ 次元部分空間 $\subset V$

(3) $\theta(V) = (\pi/2, \ldots, \pi/2)$

$\Leftrightarrow V \perp \sqrt{-1}V$

命題 3.4(完全不変量)

V, W : $\mathbb{C}^n$ 内の実 k 次元部分空間

$\theta(V) = \theta(W) \Leftrightarrow \exists g \in U(n) : W = gV$

4 ユニタリ群の実 Grassmann 多様体への作用

(G, K_1), (G, K_2) : コンパクト対称対

K_2 の G/K_1 への自然な作用 : Hermann 作用

$\exists$ 平坦トーラス $T \subset G/K_1$:

任意の K_2 軌道は T に直交する

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$\mathbb{C}^n$ 内の実 k 次元部分空間全体

$G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ ： 実 Grassmann 多様体

対応するコンパクト対称対

$$(SO(2n), S(O(k) \times O(2n-k)))$$

他方、$(SO(2n), U(n))$ もコンパクト対称対

$U(n)$ の $G_k^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ への作用は Hermann 作用

$k \le n$ のとき、

$$V_\theta^k$$
$$= \sum_{i=1}^{[k/2]} \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_{2i-1}, \cos\theta_i\sqrt{-1}e_{2i-1} + \sin\theta_i e_{2i}\}$$

k が奇数のときは $\mathbb{R}e_k$ を加える。

$n < k$ のとき、

$$V_\theta^k = (V_\theta^{2n-k})^\perp.$$

V_θ^k の多重 Kähler 角度は θ

$T = \{V_{\theta}^{k} \mid \theta \in \mathbb{R}^{[k/2]}\}$

：$G_{k}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{n})$ 内の平坦トーラス

$U(n)$ の $G_{k}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{n})$ への作用の軌道は T と交わる

多重 Kähler 角度：T の座標