3. 対蹠集合

M：コンパクト対称空間

$S \subset M$：**対蹠集合**

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$\#_2 M$：Mの**2-number**

$= \sup\{\#S \mid S$は対蹠集合$\}$

S：**大対蹠集合**$\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

対蹠集合$A(\subset M)$は有限

$x \in A \Rightarrow A \subset F(s_x, M)$

xはAの孤立点

Aは離散、有限

$\#_2 M$ は有限： 背理法で証明

A_i ： M の対蹠集合 $\lim_{i\to\infty} \#A_i = \infty$

$\exists x \in A_i (i = 1, 2, \ldots)$ とできる

$$A_i \subset F(s_x, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

$$A_i = \bigcup_{j=0}^{r} A_i \cap M_j^+$$

$\exists j \ \lim_{i\to\infty} \#(A_i \cap M_j^+) = \infty$

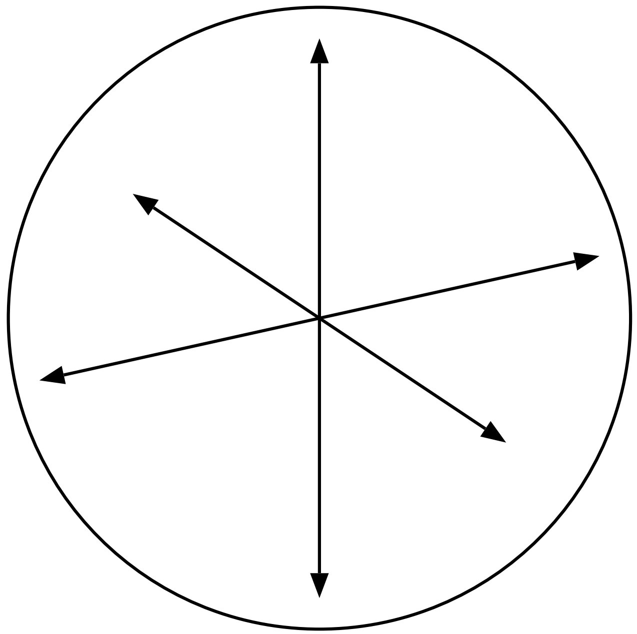
$\#_2 M_j^+ = \infty$ 　極地をとる操作を有限回続けると有限集合になる … 矛盾

$\{x, -x\}$： S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{R}P^2$ の場合

矢印は $\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2, \mathbb{R}e_3$ を表している



$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の場合

$\{\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}_{\mathbb{K}}\}$

: $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \binom{r+n}{r}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\#_2 \mathbb{R}P^n = 1 + n > 2 = \#_2 S^n$$

$$\boldsymbol{F(s_o, M) = \bigcup_{j=1}^{r} M_j^+}$$

極地への分解

$$\#_2 M \leq \sum_{j=1}^{r} \#_2 M_j^+$$

定理 (Chen-Nagano)

(G, K) : Riemann 対称対

$\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K)$

$\Rightarrow \#_2(M) \geq \chi(M)$, $M = G/K$

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

$\Rightarrow \#_2(M) = \chi(M)$

証明の概略 A : K の極大トーラス

A : G の極大トーラス

$\exists v \in \mathfrak{a}$ $\exp \mathbb{R}v$: A 内で稠密

v を G/K 上のベクトル場とみなす

$F(A, M) = \{x \in M \mid v_x = 0\}$

v の零点での指数はすべて 1

Poincaré-Hopf の定理より

$\chi(M) = \#F(A, M)$

各 $x \in F(A, M)$ に対して $s_x \in A$

$F(A, M)$: 対蹠集合

$\chi(M) = \#F(A, M) \leq \#_2(M)$

M ： コンパクト型 Hermite 対称空間

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s_o}, M) = \bigcup_{j=1}^{r} M_j^+$$

M_j^+ ： コンパクト型 Hermite 対称空間

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{r} \chi(M_j^+) \geq \#_2 M$$

したがって $\chi(M) = \#_2 M$.

N ： 対称 R 空間

M ： コンパクト対称空間

極大トーラスの lattice の基底 ： 立方体

定理(竹内)

M ： 対称 R 空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

定理 (Chen-Nagano)

M, M' ：対称空間

$f : M' \to M$ ：被覆写像

$\deg f$ ：奇数

$\Rightarrow \#_2 M' = \#_2 M$

$\deg f$ が偶数の場合は複雑

$m \leq n$ のとき

$\#_2(S^m \times S^n/\mathbb{Z}_2) = 2(m+1)$

$\boldsymbol{S^m \times S^n/\mathbb{Z}_2}$ **は次と等長的**

$$\left\{ \boldsymbol{x \wedge y} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \sum_{j=1}^{m+1} \mathbb{R}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{y} \in \sum_{j=m+2}^{m+n+2} \mathbb{R}\boldsymbol{e}_j, |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1 \right\}$$

$$\{\pm \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_{m+1+j} \mid 1 \leq j \leq m+1\}$$

：大対蹠集合

$$\#_2(S^m \times S^n/\mathbb{Z}_2) = 2(m+1)$$