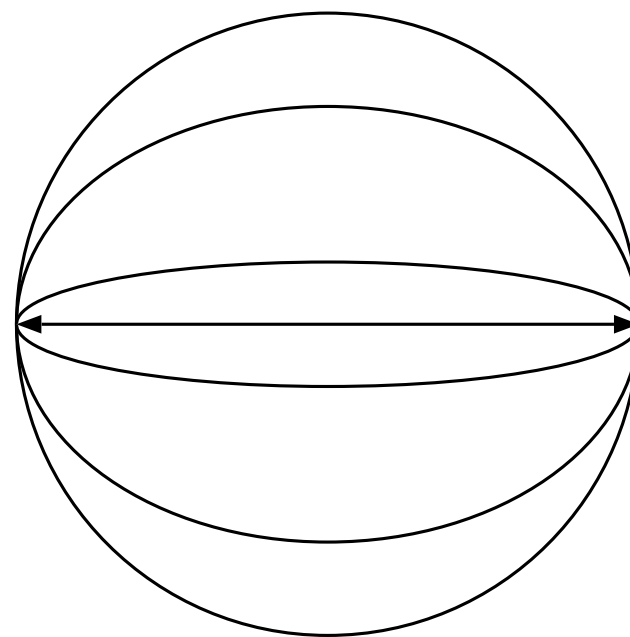
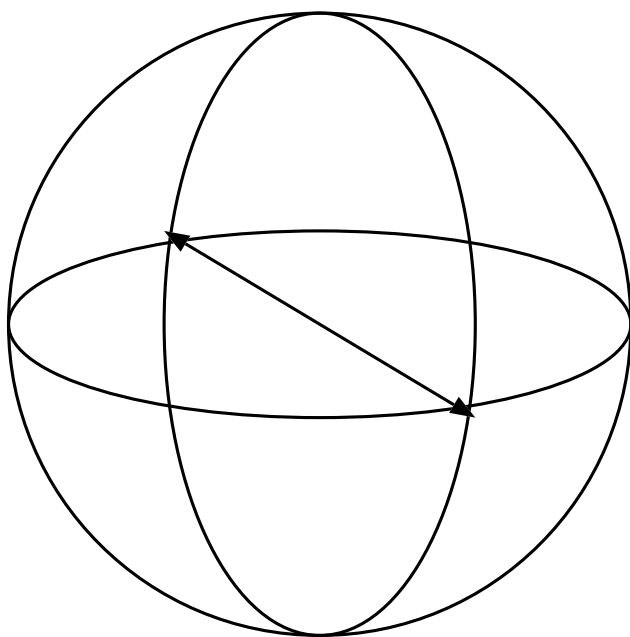


4. 実形の交叉

$\mathbb{C}P^1$ 内の二つの $\mathbb{R}P^1$



$\bar{M}$: Hermite 対称空間
(点対称が正則等長的)

M : $\bar{M}$ の実形

$\exists$ 対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形 : 全測地的 Lagrange 部分多様体

$$\omega|_M = 0 \quad (\omega : \bar{M} \text{ の Kähler 形式})$$

$$\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{C}} \bar{M}$$

実形の例

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n,$$

$$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n,$$

$$G_r(\mathbb{R}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{C}^{r+n})$$

コンパクト型 Hermite 対称空間

正則等長変換で写る : 合同

実形の分類 : Leung, 竹内

$$G_r(\mathbb{C}^{r+n}) : G_r(\mathbb{R}^{r+n}),$$

$$G_q(\mathbb{H}^{q+m}) \quad (r = 2q, n = 2m),$$

$$U(n) \quad (r = n)$$

定理 4.1(田中-T.)

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$: L_1 と L_2 の対蹠集合

定理 4.2(田中-T.)

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の合同な実形、
横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$: L_1 と L_2 の大対蹠集合

定理 4.3(田中-T.)

M : 既約コンパクト

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の実形、

横断的に交わり、 $\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

(1) $(M, L_1, L_2) \not\cong$

$(G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$

$(m \geq 2)$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$: L_1 の大対蹠集合

$$\begin{aligned}
(2) \quad & (M, L_1, L_2) \cong \\
& (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m)) \\
& (m \geq 2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m$$

$$< \binom{2m}{m} = \#_2 G_m(\mathbb{H}^{2m})$$

$$< 2^{2m} = \#_2 U(2m)$$

$\mathbb{C}^n$ 内の Lagrange 部分空間全体

$$U(n)/O(n) = U(n)\mathbb{R}^n \subset G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$$

$$\sigma : U(n) \rightarrow U(n) ; g \mapsto \bar{g}$$

$(U(n), O(n))$: Riemann 対称対

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{o}(n) + \sqrt{-1}\mathfrak{s}(n)$$

$$D(\theta_i) = \sqrt{-1}\text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

$$\mathfrak{a} = \{D(\theta_i) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

$\sqrt{-1}\mathfrak{s}(n)$ の極大可換部分空間

$\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$V(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

$$= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta_1} e_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} e_n \right\}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}^n$$

$$A = \text{Exp} \mathfrak{a}$$

$$= \{ V(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_i \in \mathbb{R} \}$$

$$U(n)/O(n) = \bigcup_{k \in O(n)} kA$$

Lagrange 部分空間の標準形

$V : \mathbb{C}^n$ の Lagrange 部分空間

$$\exists k \in O(n) \quad V \in kA$$

$$\exists \theta_i \in \mathbb{R} \quad V = kV(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

$$kV(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

$$= k \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta_1} e_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} e_n \right\}_{\mathbb{R}}$$

$$= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta_1} k e_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} k e_n \right\}_{\mathbb{R}}$$

$V : \mathbb{C}^n$ の Lagrange 部分空間

$$\exists \theta_i \in \mathbb{R}$$

$\exists \{v_i\} : \mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$V =$$

$$\left\{ e^{\sqrt{-1}\theta_1} v_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} v_n \right\}_{\mathbb{R}}$$

$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$ の交叉

$\mathbb{R}P^n, u\mathbb{R}P^n$: 横断的

$(u \in U(1+n))$

$\exists \{v_i\} : \mathbb{R}^{1+n}$ の正規直交基底

$\exists \theta_i \in \mathbb{R}$

$u\mathbb{R}^{1+n} = \{e^{\sqrt{-1}\theta_i}v_i\}_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}P^n \cap u\mathbb{R}P^n = \{\mathbb{C}v_1, \dots, \mathbb{C}v_{1+n}\}$

証明の概要

補題 4.4

M : コンパクト Kähler 多様体、
正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 : M の全測地的コンパクト
Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

補題 4.5

M : コンパクト対称空間

A : 極大トーラス、 $o \in A$

S : 基本胞体 $\bar{S} = \cup_i S_i$

A_1 : 極大トーラス、 $o \in A_1$

$A_1 \cap A \cap \text{Exp} S_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \text{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$

実形の極大トーラス

補題 4.5

⇒

実形の極大トーラスの交叉

: 基本胞体の頂点

⇒ 定理 4.1

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

$\Rightarrow$ 各極地 M_j^+ : 同上

L : M の実形

$L \cap M_j^+ \neq \emptyset$

$\Rightarrow L \cap M_j^+ : M_j^+$ の実形

M, L_1, L_2 : 定理 4.2, 4.3

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

$o \in L_1 \cap L_2$ としてよい

$$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$$

$$L_1 \cap L_2 =$$

$$\bigcup_{j=0}^r \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

極地による数学的帰納法