コンパクト対称空間の対蹠集合

田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

2010 年 9 月 1 日

1. 対称空間

M : Riemann多様体

$\forall x \in M \ \exists s_x$: 点対称

s_x : 等長変換、$s_x^2 = 1_M$

xはs_xの孤立不動点

MをRiemann対称空間と呼ぶ

$\Rightarrow$ Riemann等質空間

曲率テンソルは平行

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\mathbb{K}$-**Grassmann 多様体**

$\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{r+n})}$: $\boldsymbol{r}$ **次元部分空間全体**

$$\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \frac{U_{\mathbb{K}}(r+n)}{U_{\mathbb{K}}(r) \times U_{\mathbb{K}}(n)}}$$

$\boldsymbol{x \in G_r(\mathbb{K}^{r+n})}$ **に対して**

$$\boldsymbol{s_x = 1_x - 1_{x^{\perp}} \in U_{\mathbb{K}}(r+n)}$$

2. 極地

M：コンパクト対称空間

$o \in M$ の点対称 s_o

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

連結成分 M_j^+：極地

極地：全測地的部分多様体、

コンパクト対称空間

$\boldsymbol{G_r(\mathbb{K}^{n+r})}$ の場合

$$\boldsymbol{\begin{array}{ccc} G_{r-j}(\mathbb{K}^r) \times G_j(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & G_r(\mathbb{K}^{r+n}) \\ (x, y) & \longmapsto & x \bigoplus y \end{array}}$$

: $\mathbb{K}^r$ に関する極地 $\boldsymbol{(0 \leq j \leq r)}$

$\boldsymbol{o = \mathbb{K}^r,\ s_o = 1_o - 1_{o^\perp}}$

$\boldsymbol{s_o}$ は $\boldsymbol{G_{r-j}(\mathbb{K}^r) \times G_j(\mathbb{K}^n)}$ の各点を固定

$\boldsymbol{s_o}$ の固定点はこれらしかないこともわかる

$$\boldsymbol{F(s_o, G_r(\mathbb{K}^{n+r})) = \bigcup_{0 \leq j \leq r} G_{r-j}(\mathbb{K}^r) \times G_j(\mathbb{K}^n)}$$

3. 対蹠集合

M ： コンパクト対称空間

$S \subset M$ ： 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$\#_2 M$ ： M の 2-number

$= \sup\{\#S \mid S$ は対蹠集合$\}$

S ： 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

対蹠集合$A \subset M$は有限

$x \in A \Rightarrow A \subset F(s_x, M)$

xはAの孤立点

Aは離散、有限

$\#_2 M$ は有限：背理法で証明

A_i : M の対蹠集合 $\lim_{i\to\infty} \#A_i = \infty$

$x \in A_i$ とできる

$$A_i \subset F(s_x, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

$$A_i = \bigcup_{j=0}^{r} A_i \cap M_j^+$$

$\exists j \ \lim_{i\to\infty} \#(A_i \cap M_j^+) = \infty$

$\#_2 M_j^+ = \infty$ 　極地をとる操作を有限回

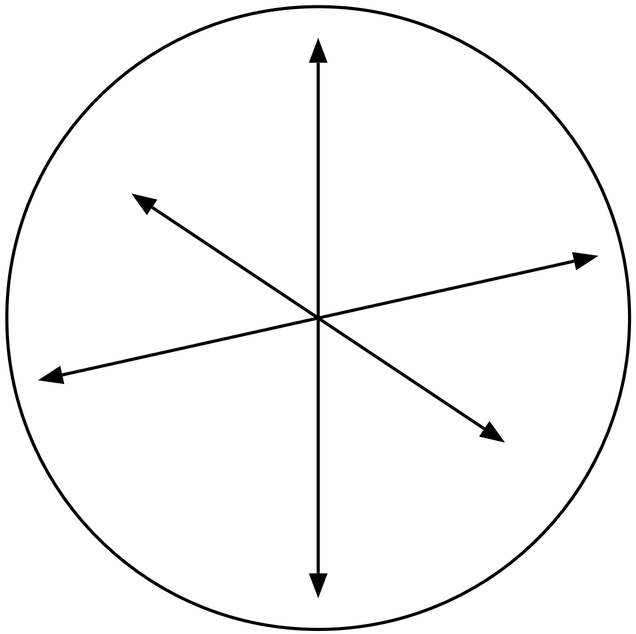
続けると有限集合になる … 矛盾

$\{x, -x\}$: S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{R}P^2$ の場合

矢印は $\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2, \mathbb{R}e_3$ を表している



$G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の場合

$\{\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}_{\mathbb{K}}\}$

: $G_r(\mathbb{K}^{r+n})$ の大対蹠集合

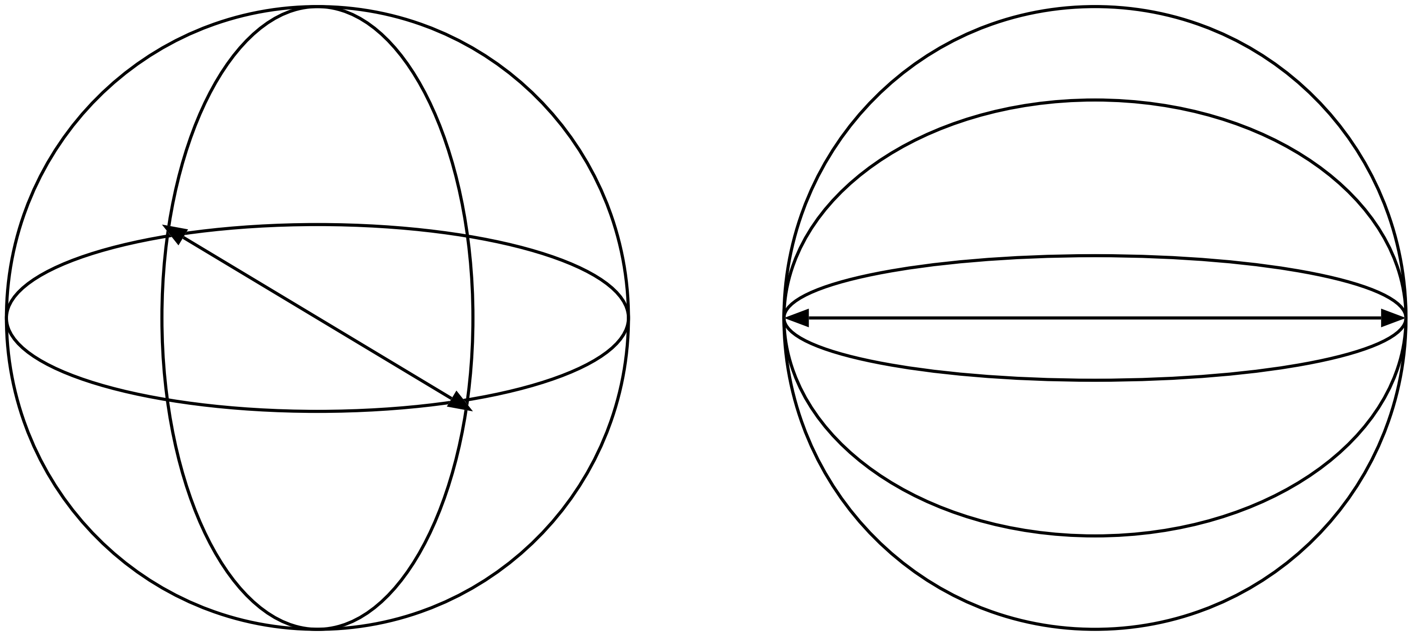
$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^{r+n}) = \binom{r+n}{r}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\#_2 \mathbb{R}P^n = 1 + n > 2 = \#_2 S^n$$

4. 実形の交叉

$\mathbb{C}P^1$ 内の二つの $\mathbb{R}P^1$



$\bar{M}$ ： Hermite対称空間

(点対称が正則等長的)

M ： $\bar{M}$ の実形

∃対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形 ： 全測地的Lagrange部分多様体

実形の例

$$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \subset \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}},$$

$$\mathbb{R}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}} \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}},$$

$$\boldsymbol{G_r}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{r+n}}) \subset \boldsymbol{G_r}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{r+n}})$$

コンパクト型Hermite対称空間

正則等長変換で写る：合同

実形の分類：Leung, 竹内

$$\boldsymbol{G_r(\mathbb{C}^{r+n})} \text{：} \boldsymbol{G_r(\mathbb{R}^{r+n})},$$

$$\boldsymbol{G_q(\mathbb{H}^{q+m})} \ (\boldsymbol{r = 2q, n = 2m}),$$

$$\boldsymbol{U(n)} \ (\boldsymbol{r = n})$$

定理 4.1(田中-T.)

M ： コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ： M の実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ： L_1 と L_2 の対蹠集合

定理 4.2(田中-T.)

M：コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2：M の合同な実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$：L_1 と L_2 の大対蹠集合

定理 4.3(田中-T.)
M ： 既約コンパクト

$\qquad\quad$ Hermite対称空間

L_1, L_2 ： M の実形、

横断的に交わり、$\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

(1) $(M, L_1, L_2) \ncong$

$(G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$

$(m \geq 2)$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$ ： L_1 の大対蹠集合

$$\textbf{(2)}\ (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2) \cong$$

$$(\boldsymbol{G}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), \boldsymbol{G}_m(\mathbb{H}^{2m}), \boldsymbol{U}(2m))$$

$$(\boldsymbol{m} \geq 2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \#(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2) &= 2^m \\ &< \binom{2m}{m} = \#_2 \boldsymbol{G}_m(\mathbb{H}^{2m}) \\ &< 2^{2m} = \#_2 \boldsymbol{U}(2m) \end{aligned}$$

$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$ の交叉

$\mathbb{R}P^n, u\mathbb{R}P^n$ ： 横断的

$(u \in U(1+n))$

$\exists\{v_i\}$ ： $\mathbb{R}^{1+n}$ の正規直交基底

$\exists\theta_i \in \mathbb{R}$

$$u\mathbb{R}^{1+n} = \{e^{\sqrt{-1}\theta_i}v_i\}_{\mathbb{R}}$$

$$\mathbb{R}P^n \cap u\mathbb{R}P^n = \{\mathbb{C}v_i\}$$

5. 証明の概要

補題 5.1

M : コンパクト Kähler 多様体、

正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 : M の全測地的コンパクト

Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

補題 5.2

M ： コンパクト対称空間

A ： 極大トーラス、$o \in A$

S ： 基本胞体 $\bar{S} = \cup_i S_i$

A_1 ： 極大トーラス、$o \in A_1$

$A_1 \cap A \cap \mathrm{Exp} S_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$

実形の極大トーラス

補題 5.2

$\Longrightarrow$

実形の極大トーラスの交叉

：基本胞体の頂点

$\Longrightarrow$ **定理**4.1

M : コンパクト型

$\quad$ Hermite対称空間

$\Rightarrow$ 各極地 M_j^+ : 同上

L : M の実形

$L \cap M_j^+ \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $L \cap M_j^+$: M_j^+ の実形

$\boldsymbol{M, L_1, L_2}$：**定理 4.2, 4.3**

$\boldsymbol{F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+}$

$\boldsymbol{o \in L_1 \cap L_2}$**としてよい**

$\boldsymbol{L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)}$

$\boldsymbol{L_1 \cap L_2 =}$

$\boldsymbol{\bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}}$

極地による数学的帰納法