有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の系列と評価

田崎博之

筑波大学

2014 年 **2** 月 **7** 日

1 有向実Grassmann多様体の対蹠集合

定義1.1(Chen-長野)

M : コンパクトRiemann対称空間

s_x : $x \in M$における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\quad \Leftrightarrow \forall x, y \in S\ x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \# S$: 最大値

定義 1.2

$$\boldsymbol{P_k(n)}$$

$$:= \{\boldsymbol{\alpha} \subset \{1, \ldots, \boldsymbol{n}\} \mid \#\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k}\}$$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{P_k(n)}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow \#(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$: 偶数

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P_k(n)}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$: 対蹠的

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ ： 有向実 **Grassmann** 多様体

　$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ 内の有向 $\boldsymbol{k}$ 次元部分空間全体

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の等長変換全体の単位連結成分

で写り合う: 合同

対称群 $\mathbf{Sym}(\boldsymbol{n})$ で写り合う: 合同

定理 **1.3** 　次の両者は一対一に対応する。

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合の合同類

$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n})$ の極大対蹠的部分集合の合同類

$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{P_k(n)}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha = \{\alpha(1), \ldots, \alpha(k)\}}$$

$\boldsymbol{\{e_i\}}$: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A \subset P_k(n)} \leftrightarrow$

$\boldsymbol{\{\pm \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_{\alpha(1)}, \ldots, e_{\alpha(k)}\} \mid \alpha \in A\}}$

$\subset \boldsymbol{\tilde{G}_k}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$

2 $P_k(n)$ の対蹠的部分集合の分類

$P_k(n)$ の対蹠的部分集合 (AS)、極大対蹠的部分集合 (MAS)：対象

$k = 1$ の場合

$\{\{1\}\}$ ： $P_1(n)$ の MAS

$k = 2$ の場合

$A(2, 2l) = \{\{1, 2\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}$

： $P_2(2l), P_2(2l+1)$ の MAS

$k = 3$ の場合

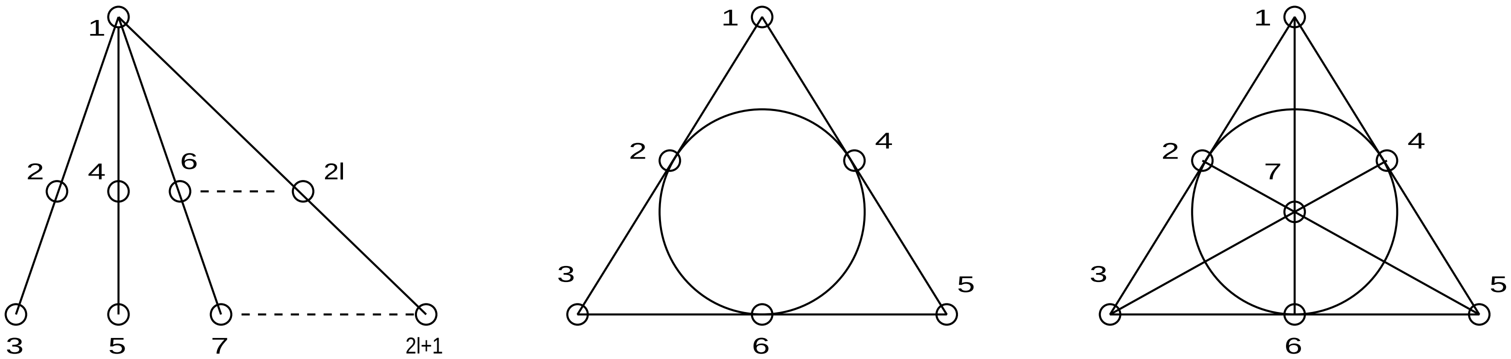


Figure 1: $\boldsymbol{A(3, 2l+1)}$, $\boldsymbol{B(3,6)}$ **and** $\boldsymbol{B(3,7)}$

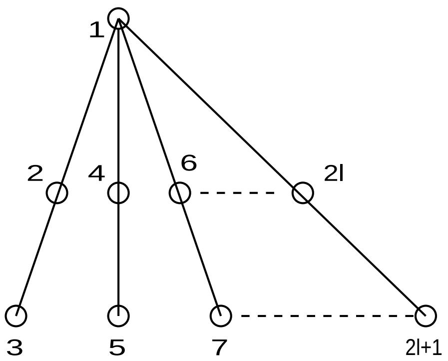
$$\boldsymbol{A(3,5) \subset B(3,6) \subset B(3,7),}$$
$$\boldsymbol{A(3,5) \subset A(3,7) \subset B(3,7).}$$

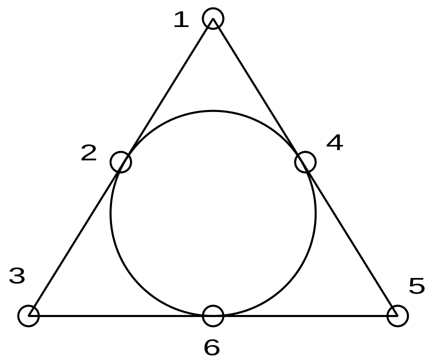
定理 2.1

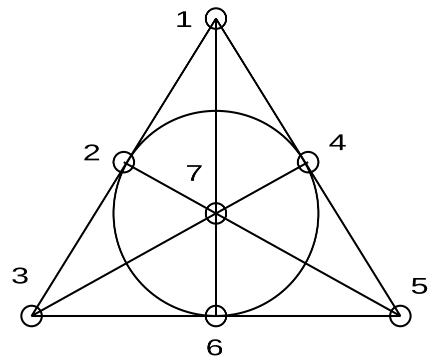
$P_3(n)$ の MAS：

n	$3, 4$	5	6	$7, 8$
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$

n	9 以上
	$A(3, 2[\frac{n-1}{2}]+1), B(3,7)$







$\boldsymbol{k = 4}$の場合

$$\boldsymbol{A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \in P_4(2l) \mid \alpha, \beta}$$
$$\boldsymbol{\in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3, 7)\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 8) = B(4, 7) \cup B(3, 7) \times \{\{8\}\}.}$$

これらは$\boldsymbol{P_4(n)}$の$\mathbf{AS}$。

ただし

$$\boldsymbol{B(3, 7) \times \{\{8\}\} = \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

定理 $\mathbf{2.2}$

高々一つの $\boldsymbol{A(4,2l)}$ $\boldsymbol{(l \geq 2, \neq 4)}$

いくつかの $\boldsymbol{B(4,7)}$, $\boldsymbol{B(4,8)}$

と合同なもののしかるべき合併で

$\boldsymbol{P_4(n)}$ の $\mathbf{MAS}$ はつきる。

$\boldsymbol{P_5(n)}$ の $\mathbf{MAS}$ の合同類の数は $\boldsymbol{n}$ にと

もなって急激に増える。

$\mathbf{MAS}$ の系列の構成の必要性。

3 対蹠的部分集合の系列

$\boldsymbol{A(2k, 2l) = \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \in P_{2k}(2l) \mid \alpha_i \in \{\{1, 2\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\}}$

$\boldsymbol{A(2k+1, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\}}$

命題 **3.1**

$\boldsymbol{A(2k, 2l)}$ は $\boldsymbol{P_{2k}(2l)}$ の AS。

$\boldsymbol{A(2k+1, 2l+1)}$ は $\boldsymbol{P_{2k+1}(2l+1)}$ の AS。

定理 $\mathbf{3.2}$

$\boldsymbol{l \geq 3k-1}$ のとき、$\boldsymbol{A(2k, 2l)}$ は

$\boldsymbol{P_{2k}(2l), P_{2k}(2l+1)}$ の $\mathbf{MAS}$。

さらに $\boldsymbol{k \geq 2}$ のとき、

$\boldsymbol{A(2k+1, 2l+1)}$ は

$\boldsymbol{P_{2k+1}(2l+1), P_{2k+1}(2l+2)}$ の $\mathbf{MAS}$。

$\boldsymbol{k = 1}$ のとき、

$\boldsymbol{A(2, 2l)}$ $\boldsymbol{(l \geq 1)}$ は $\boldsymbol{P_2(2l)}$ の $\mathbf{MAS}$

$\boldsymbol{k = 2}$ のとき、

$\boldsymbol{A}(4, \boldsymbol{8})$ は $\boldsymbol{P}_4(\boldsymbol{8})$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{A}(4, \boldsymbol{2l})$ $(\boldsymbol{l} \geq \mathbf{5})$ は $\boldsymbol{P}_4(\boldsymbol{2l})$ の $\mathbf{MAS}$

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$

$= \{\{\boldsymbol{\alpha}(1), \ldots, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{m})\} \mid$

$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{i}) \in \{2\boldsymbol{i} - 1, 2\boldsymbol{i}\}\,(1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m}),$

偶数の $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{i})$ は偶数個 $\}$.

命題 **3.3**

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$ は $\boldsymbol{P_m}(2\boldsymbol{m})$ の **AS**。

定理 $\mathbf{3.4}$

$\boldsymbol{2l \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2l} : P_l(2l)}$ の $\mathbf{MAS}$

$\boldsymbol{Ev_{8m} : P_{4m}(8m)}$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{A(4m, 8m) \cup Ev_{8m}}$

$\quad \boldsymbol{: P_{4m}(8m)}$ の $\mathbf{MAS}$

4 対蹠的部分集合の評価

$\boldsymbol{a(k,n) = \max\{\# A \mid A}$ は $\boldsymbol{P_k(n)}$ の $\mathbf{AS}\}$

命題 $\mathbf{3.1}$ より次を得る。

補題 $\mathbf{4.1}$

$$\boldsymbol{a(2k,n) \geq \binom{[\frac{n}{2}]}{k}},$$

$$\boldsymbol{a(2k+1,n) \geq \binom{[\frac{n-1}{2}]}{k}}.$$

$\mathbf{2}$ 節の分類結果より

$$a(1,n)=1$$

$$a(2,n)=\left[\frac{n}{2}\right]$$

n	4	5	6	$7,\dots,16$	17 以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$

n	5	6	7	$8,\dots,11$	12 以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{[\frac{n}{2}]}{2}$

大きな n に対しては補題 $\mathbf{4.1}$ の等号成立

定理 $\mathbf{4.2}$

$\boldsymbol{n \geq 57}$ ならば

$$\boldsymbol{a(5,n) = \binom{[\frac{n-1}{2}]}{2}.}$$

さらに、$\boldsymbol{a(5,n)}$ を与える $\boldsymbol{P_5(n)}$ の対蹠的部分集合は $\boldsymbol{A(5, 2[\frac{n-1}{2}]+1)}$ に合同。

一般に集合 $\boldsymbol{X}$ に対して

$$\boldsymbol{P_k(X) := \{\alpha \subset X \mid \#\alpha = k\}}$$

$\boldsymbol{X = X_1 \cup \cdots \cup X_m}$ 互いに素な合併

$\boldsymbol{A_i \subset P_{k_i}(X_i)}$ に対して

$$\boldsymbol{A_1 \times \cdots \times A_m}$$

$$\boldsymbol{:= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_m \mid \alpha_i \in A_i\}}$$

$$\boldsymbol{\subset P_{k_1+\cdots+k_m}(X)}$$

$\boldsymbol{\alpha \in P_k(n)}$ と $\boldsymbol{B \subset P_k(n)}$ に対して

$A_\alpha(B) = \{\beta \in B \mid \alpha, \beta$ は対蹠的 $\} - \{\alpha\}$

定理 $\mathbf{4.2}$ の証明の概要

$\boldsymbol{P_5(n)}$ の対蹠的部分集合 $\boldsymbol{A}$ について

$\#\boldsymbol{A}$ を評価する。

$\{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5}\} \in \boldsymbol{A}$ としてよい。

$\boldsymbol{A_{\{1,2,3,4,5\}}(P_5(n))} =$

$\boldsymbol{P_3(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \times P_2(\{6, \ldots, n\})}$

$\boldsymbol{\cup P_1(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \times P_4(\{6, \ldots, n\})}$

前者を $\boldsymbol{M_2}$、後者を $\boldsymbol{M_4}$ とおく。

互いに素な合併

$$\boldsymbol{A = \{\{1,2,3,4,5\}\} \cup (A \cap M_2) \cup (A \cap M_4)}$$

$\boldsymbol{A \cap M_2 \subset A_1 \times A_2}$

$\boldsymbol{A_1}$: $\boldsymbol{P_3(\{1,2,3,4,5\})}$ の AS

$\boldsymbol{A_2}$: $\boldsymbol{P_2(\{6,\ldots,n\})}$ の AS

この場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_2) \leq 2\left[\frac{n-5}{2}\right]}$

積に含まれない場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_2) \leq 9}$

$\boldsymbol{n \geq 15}$ ならば、$\boldsymbol{\#(A \cap M_2) \leq 2\left[\frac{n-5}{2}\right]}$

$\boldsymbol{A \cap M_4 \subset A_1 \times A_2}$

$\boldsymbol{A_1}$: $\boldsymbol{P_1(\{1,2,3,4,5\})}$ の AS

$\boldsymbol{A_2}$: $\boldsymbol{P_4(\{6,\ldots,n\})}$ の AS

この場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_4) \leq a(4, n-5)}$

積に含まれない場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_4)}$ は

$\boldsymbol{\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n-1}{2}\right]}$ の一次式で上から評価できる。

$\boldsymbol{n}$ が十分大きいとき ($\boldsymbol{n \geq 57}$)、

$$\boldsymbol{\#(A \cap M_4) \leq a(4, n-5) = \binom{\left[\frac{n-5}{2}\right]}{2}}$$

$\boldsymbol{n \geq 57}$ のとき、

$$\boldsymbol{\#A \leq 1 + 2\left[\frac{n-5}{2}\right] + \binom{[\frac{n-5}{2}]}{2}}$$

$$\boldsymbol{= \binom{[\frac{n-1}{2}]}{2}}$$

等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A \cap M_2, A \cap M_4}$ ともに積

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A(5, 2[\frac{n-1}{2}] + 1)}$ に合同。

$\boldsymbol{A \cap M_2}$ が積に含まれない場合

$\boldsymbol{A \cap M_2}$ は

$\boldsymbol{\alpha = \{1, 2, 3, 6, 7\}, \beta = \{1, 2, 4, 6, 8\}}$

を含むとしても一般性を失わない。

$\boldsymbol{A \cap M_2 - \{\alpha, \beta\} \subset A_\beta(A_\alpha(M_2))}$

$\boldsymbol{= \{\{1, 2, 5, 7, 8\}\} \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3}$

この操作を繰り返すことにより

$\boldsymbol{\#(A \cap M_2) \leq 9}$ を得る。