複素旗多様体内の
二つの実旗多様体の交叉

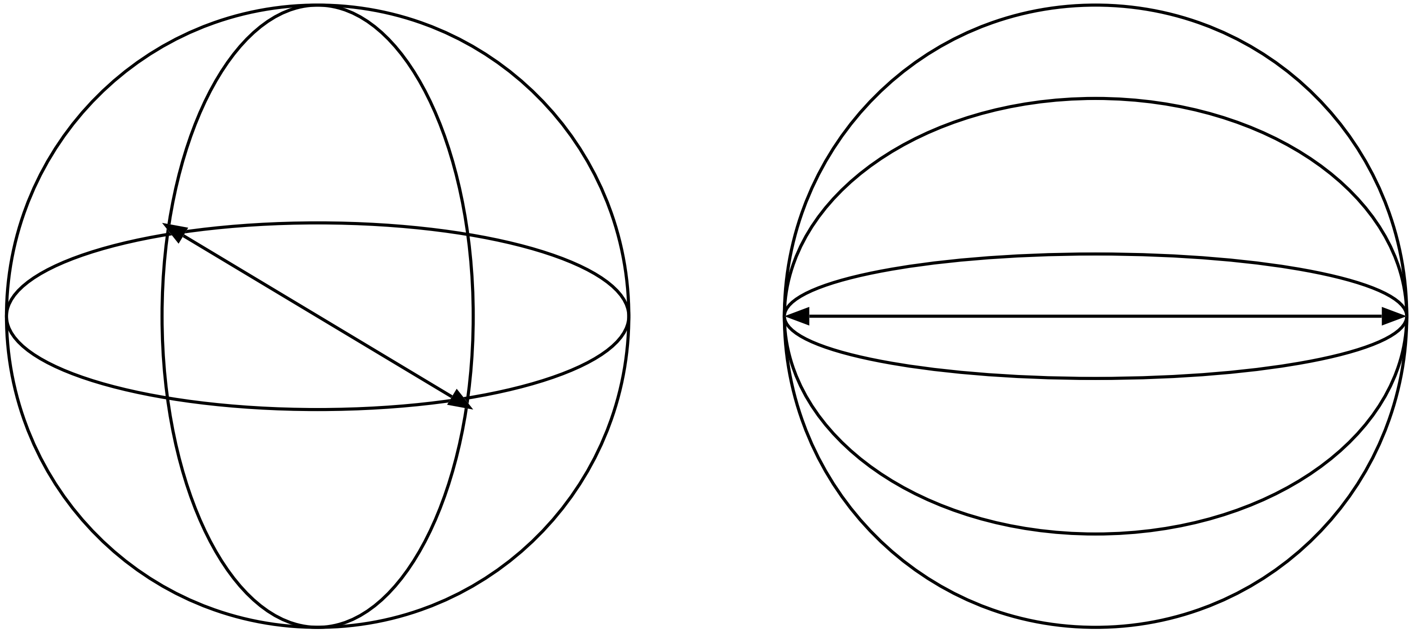
広島大学談話会

田崎博之

筑波大学

2014 年 12 月 9 日

球面内の二つの大円の交叉



対蹠点の対

球面	**大円**	**対蹠点の対**
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
複素二次超曲面	**実形**	**対蹠集合**
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
コンパクト型 Hermite **対称空間**	**実形**	**対蹠集合**
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
複素旗多様体	**実旗多様体**	**一般化対蹠集合**

複素旗多様体

：コンパクト半単純 Lie 群の

随伴表現の軌道

単連結コンパクト等質 Kähler 多様体

実旗多様体

：コンパクト型対称対の

線形イソトロピー表現の軌道

Kähler 多様体内

τ ： 対合的反正則等長変換

$\mathrm{Fix}(\tau)$ の連結成分 ： 実形

全測地的 Lagrange 部分多様体

実旗多様体 ： 複素旗多様体の実形

M ： 複素旗多様体

L_0, L_1 ： M 内の二つの実旗多様体

$L_0 \cap L_1$ ： 離散的

$\Rightarrow L_0 \cap L_1$ はよい形を持つ

Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1)$ の計算

に利用できるかもいれない

定義 (Chen-長野)

M : Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: **対蹠集合**

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \; s_x(y) = y$

2-number $\#_2 M$

$\#_2 M = \max\{\# S \mid S : M$ の対蹠集合$\}$

S : **大対蹠集合** $\Leftrightarrow \# S = \#_2 M$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$G_k(\mathbb{K}^n)$: Grassmann 多様体

$\{v_i\}$: $\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底

$\Rightarrow \{\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle_{\mathbb{K}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$

$= \{V \in G_k(\mathbb{K}^n) \mid V : v_j$ が生成する $\}$

: $G_k(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_k(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{k}$$

M ：複素旗多様体

$\exists$ M の k 対称構造

$x \in M$ s_x ：M の等長変換、$s_x^k = 1_M$

x は s_x の孤立固定点

$\rightarrow$ M の対蹠集合、大対蹠集合

複素旗多様体の場合、s_x は正則等長変換になる

$\boldsymbol{n_1 + \cdots + n_r < n}$ に対して

$$\boldsymbol{F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)}$$

$$= \left\{ \boldsymbol{(V_1, \ldots, V_r)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{V_i} : \mathbb{K}^n \text{ 内の } \mathbb{K} \text{ 部分空間} \\ \dim \boldsymbol{V_i = n_1 + \cdots + n_i} \\ \boldsymbol{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r} \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right\}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\boldsymbol{G = SU(n)}$

$\mathfrak{g}$: $\boldsymbol{G}$ の Lie 環

$\exists\ \boldsymbol{Z} \in \mathfrak{g}\ \boldsymbol{F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n) \cong \mathrm{Ad}(G)Z} \subset \mathfrak{g}$

$\{\boldsymbol{(V_1, \ldots, V_r)} \in \boldsymbol{F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)} \mid \boldsymbol{V_i} : \boldsymbol{v_j}$ が生成する $\}$

: $\boldsymbol{F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)}$ の大対蹠集合

定理 1(T. 2010)　M ： **複素二次超曲面**

L_0, L_1 ： M **の実形**

$L_0 \cap L_1$ ： **離散的**

$\Rightarrow L_0 \cap L_1$ ： **対蹠集合**

定理 2(**田中**-T. 2012)

M ： **コンパクト型** Hermite **対称空間**

L_0, L_1 ： M **の実形**

$L_0 \cap L_1$ ： **離散的**

$\Rightarrow L_0 \cap L_1$ ： **対蹠集合**

定理 3(入江-酒井-T. 2013)

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

L_0, L_1 : M の実形

$L_0 \cap L_1$: 離散的

$$\Rightarrow HF(L_0, L_1) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

この結果には応用がある

応用 (コンパクト型 Hermite 対称空間)

- 一般化された Arnold-Givental 不等式
- Hamilton 体積最小性

一般化

- 複素旗多様体

定理 4(井川-田中-T.)

M : 既約コンパクト$\mathrm{Herm.}$対称空間

L_0, L_1 : M の実形

$L_0 \cap L_1$: 離散的

$\Leftrightarrow$ 対称三対による条件

この場合

$L_0 \cap L_1$: M の対蹠集合、

ある種のWeyl群の軌道、二点等質

井川、入江、奥田、酒井との共同研究

G : コンパクト半単純 Lie 群

$\mathfrak{g}$: G の Lie 環、 $Z \in \mathfrak{g} - \{0\}$

$M = \mathrm{Ad}(G)Z \subset \mathfrak{g}$

: 複素旗多様体

$\mathfrak{t}$: 極大可換部分環

$M \cap \mathfrak{t}$: 大対蹠集合

(G, K) : 対称対

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p},\ Z \in \mathfrak{p} - \{0\}$$

$L = \mathrm{Ad}(K)Z \subset M$: 実旗多様体

実旗多様体の例

$$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \subset F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n),$$

$$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) \subset F_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$$

(G, K) : 対称対

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間

$A = \exp \mathfrak{a}$

極大トーラスの共役性

$$\Rightarrow G/K = \bigcup_{k \in K} kA \cdot o$$

$G = KAK$

$L = \mathrm{Ad}(K)Z$: M 内の実旗多様体

$\forall k \in K \quad \mathrm{Ad}(k)L = L$

$g \in G \quad L \cap \mathrm{Ad}(g)L$

$\exists k_i \in K,\ \exists a \in A \quad g = k_0 a k_1$

$$\begin{aligned} L \cap \mathrm{Ad}(g)L &= L \cap \mathrm{Ad}(k_0 a k_1)L \\ &= \mathrm{Ad}(k_0)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L) \end{aligned}$$

$$L \cap \mathrm{Ad}(g)L \quad \to \quad L \cap \mathrm{Ad}(a)L$$

定理 5(IIOST)

$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$: 離散的

$\Leftrightarrow$ 対称対 (G, K) の制限ルート系による a のある条件

この場合

$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$: M の対蹠集合、

対称対 (G, K) の Weyl 群 $W(G, K)$ の軌道

(G, K_i) : 対称対、 $(i = 0, 1)$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i$, $Z \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 内の極大可換部分空間

$A = \exp \mathfrak{a}$

Heintze-Palais-Terng-Thorbergsson

$$\Rightarrow G/K_1 = \bigcup_{k \in K_0} kA \cdot o$$

$G = K_0 A K_1$

$\boldsymbol{L_i = \mathrm{Ad}(K_i)Z}$: M 内の実旗多様体

$$\forall \boldsymbol{k}_i \in \boldsymbol{K}_i \qquad \mathrm{Ad}(\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_i$$

$$\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{g})\boldsymbol{L}_1$$

$$\exists \boldsymbol{k}_i \in \boldsymbol{K}_i,\ \exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{a}\boldsymbol{k}_1$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{g})\boldsymbol{L}_1 &= \boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{a}\boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{L}_1 \\ &= \mathrm{Ad}(\boldsymbol{k}_0)(\boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{L}_1) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{g})\boldsymbol{L}_1 \quad \to \quad \boldsymbol{L}_0 \cap \mathrm{Ad}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{L}_1$$

σ_i : (G, K_i) の対合

$\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0$ を仮定する。

定理 6(IIOST)

$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$: 離散的

$\Leftrightarrow$ 対称三対による a のある条件

この場合

$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$: M の対蹠集合、

ある種の Weyl 群の軌道

今後の課題

- $\sigma_0\sigma_1 \neq \sigma_1\sigma_0$ の場合
- 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の Floer ホモロジー
- 実旗多様体の交叉積分公式
- 実旗多様体の Hamilton 体積最小性