

対称三対の実形の交叉への応用¹

井川治² (京都工芸繊維大学工芸科学研究科)

対称三対は既約ルート系の拡張概念である．この講演では対称三対の定義について述べ、ある条件を満たすコンパクト対称三対から対称三対を構成する．さらに対称三対をコンパクト型既約エルミート対称空間内の二つの実形の交叉の研究に応用する (田中真紀子，田崎博之との共同研究)．実形とは対合的反正則等長変換の不動点集合のことである．実形は連結な全測地的 Lagrange 部分多様体になる．村上信吾は各コンパクト型既約エルミート対称空間には少なくとも一つの実形があることを示した．田中-田崎は実形が離散的に交わる場合には、交叉は対蹠集合になることを示した．我々は二つの実形が互いに合同な場合には交叉が離散的になるための必要十分条件を制限ルート系を用いて与える．この場合は交叉は実形の大対蹠集合になる．二つの実形が互いに合同でない場合には交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対を用いて与える．対蹠集合の概念は Chen-Nagano が導入した．

松木俊彦氏，田丸博士氏，間下克哉氏，馬場蔵人氏の有益な助言に感謝する．

1 対称三対

この節では対称三対の定義と基本性質について述べる．

ルート系の定義の復習から始める． $\mathfrak{a}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間で内積 $\langle, \rangle$ をもつものとする．

定義 1.1. 有限集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が **ルート系** であるとは、次の三つの条件を満たす場合をいう．

(1) $\mathfrak{a} = \text{span}(\Sigma)$.

(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ ならば $s_\alpha \beta := \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha \in \Sigma$,

(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ ならば、 $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$.

¹第 61 回幾何学シンポジウム (2014 年 8 月 23 日～26 日，名城大学) 講演予稿．

²E-mail: ikawa@kit.ac.jp

$\{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ で生成される直交群 $O(\mathfrak{a})$ の部分群を Σ の**ワイル群**といい、 $W(\Sigma)$ で表す.

$\mathfrak{a}$ のルート系 Σ が**既約**であるとは、 Σ が互いに直交する空でない二つの部分集合に分解できない場合をいう.

以上の準備の下に対称三対を定義しよう.

定義 1.2. 三組 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の**対称三対**であるとは、次の条件を満たす場合をいう：

- (1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系である.
- (2) $\Sigma(\subset \mathfrak{a})$ は $\text{span}(\Sigma)$ のルート系である.
- (3) W は -1 倍で不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合であり、 $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$.
- (4) $\Sigma \cap W$ は空集合ではない. $l = \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$ とおくと、 $\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.
- (5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2 \frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{ が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma.$$

- (6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2 \frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{ が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W.$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の対称三対ならば、 Σ は $\mathfrak{a}$ のルート系である、すなわち、 Σ は $\mathfrak{a}$ を張る. $\mathfrak{a}$ の稠密な開集合 $\mathfrak{a}_r$ を

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

と定める. $\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**という.

2 コンパクト対称三対

この節ではある条件を満たすコンパクト対称三対から対称三対を構成する.

(G, F_1, F_2) をコンパクト対称三対とする, すなわち, (G, F_1) と (G, F_2) を二つのコンパクト対称対とする. G 上の $\text{Aut}(G)$ -不変リーマン計量 $\langle, \rangle$ をとる. このとき, 商多様体 $M_i = G/F_i$ は誘導される G -不変リーマン計量に関してコンパクト対称空間になる. F_2 の M_1 への自然な等長作用を **Hermann 作用** という. $F_1 = F_2$ のときは, Hermann 作用はイソトロピー作用に他ならない. Hermann 作用は超極作用になることを大雑把に説明しよう.

ここで, 一般のリーマン多様体 M_1 へのリー群 F_2 の等長作用が**超極**であるとは, M_1 の閉平坦全測地的部分多様体 $\hat{A}$ が存在して, 任意の F_2 -軌道が $\hat{A}$ と直交して交わる場合をいう. このとき, $\hat{A}$ を**切断**という.

Hermann 作用が超極であることを説明するためには, 切断を構成すればよい. F_i を定める G の対合を θ_i と表し, θ_i の誘導する $\mathfrak{g}$ の対合も θ_i と表す. このとき, $\mathfrak{g}$ は次のように二通りに標準分解される:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{f}_2 \oplus \mathfrak{p}_2.$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる. G から M_1 の上への自然な射影を π_1 と表す. このとき, $A = \exp \mathfrak{a}$ は G のトーラスになり, $\hat{A} = \pi_1(A)$ が Hermann 作用の切断を与えることが知られている. 以後, $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ と仮定する. 更に G は単純で, θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わないと仮定する. この条件を満たすコンパクト対称三対 (G, F_1, F_2) から $\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を構成しよう. $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ だから,

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{f}_1 \cap \mathfrak{f}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{f}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{f}_2 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定め, $\tilde{\Sigma} = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$ とおく. $\epsilon = \pm 1$ に対して, $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1\theta_2 X = \epsilon X\}.$$

と定める. $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_1\theta_2$ -不変だから,

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

が成り立つ.

$$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}, \quad W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

とおく. このとき, 次の定理が得られる:

定理 2.1. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の対称三対である.

3 二つの実形の交叉

この節の内容は田中真紀子と田崎博之との共同研究である. この節ではコンパクト型既約 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉について考察する.

はじめにコンパクト型既約 Hermite 対称空間をあるユークリッド空間の部分多様体と自然に見る方法について説明しよう. G をコンパクト連結単純 Lie 群とし, そのリー環を $\mathfrak{g}$ と表す. $\mathfrak{g}$ 上の $\text{Ad}(G)$ -不変内積 $\langle, \rangle$ をとる. $J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\text{ad} J)^3 = -\text{ad} J$ を満たすようにとる. 随伴作用による J の軌道 $M = \text{Ad}(G)J \subset \mathfrak{g}$ は $\langle, \rangle$ から誘導される計量に関してコンパクト型既約 Hermite 対称空間の構造を持つ. 逆に任意のコンパクト型既約 Hermite 対称空間はこのようにして得られることが知られている.

M の対合的反正則等長変換の不動点集合を**実形**という. 実形は連結な全測地的 Lagrange 部分多様体になる. Leung と竹内勝はコンパクト型既約 Hermite 対称空間の実形を分類した. この節では M 内の二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件を調べ, 交叉が離散的な場合に, その交叉を記述する. 任意の二つの実形は必ず交わる. $L_1 = F(\tau_1, M)$ と $L_2 = F(\tau_2, M)$ を M 内の二つの実形とする. ここで, τ_i は L_i を定める対合的反正則等長変換である. G 上の対合 θ_i を $\theta_i(g) = \tau_i g \tau_i^{-1}$ と定める. $F_i = F(\theta_i, G)$ とおくと, (G, F_1, F_2) はコンパクト対称三対になる. 交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ ($a \in G$) を調べるためには, $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ と仮定してよいことが, コンパクト型既約 Hermite 対称空間の分類からわかる. $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の J を含む極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる. $a \in G$ は $\exp \mathfrak{a}$ の元と仮定してよい. L_1 と L_2 が合同のとき, すなわち, $g \in G$ が存在して $L_2 = \text{Ad}(g)L_1$ となるときには $L_1 = L_2$ と仮定してよい.

3.1 合同な二つの実形の交叉 ($L_1 = L_2$ の場合)

$L = L_1 = L_2, F = F_1 = F_2$ などとおく. 交叉 $L \cap aL$ ($a \in G$) について考察する. $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) と仮定してよい. R でコンパクト対称対 (G, F) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系を表す.

定理 3.1. 交叉 $L \cap \text{Ad}(a)L$ が離散的になるための必要十分条件は任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ となることである. このとき,

$$L \cap \text{Ad}(a)L = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J, \quad (3.1)$$

ここで, $M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合である. 集合 $W(R)J$ は $W(R)$ の作用に関して二点等質である.

ここで, $W(R)J$ が $W(R)$ の作用に関して二点等質であるとは, $\|x-y\| = \|x'-y'\|$ を満たす二つの組 $x, y \in W(R)J$ と $x', y' \in W(R)J$ に対して, $\sigma \in W(R)$ が存在して $\sigma x = x'$ と $\sigma y = y'$ が成り立つときをいう. 対蹠集合や大対蹠集合の定義を説明するために, s_x で $x \in L$ の点対称を表す. 部分集合 $S \subset L$ が対蹠集合であるとは, 任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となるときをいう. L の 2-number $\#_2 L$ とは, 最も元の個数の多い対蹠集合の元の個数である. L の対蹠集合が大対蹠集合であるとは, その元の個数が $\#_2 L$ となるときをいう. これらの概念は Chen-Nagano により導入された. Bott により $M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$ となることが知られている. 竹内勝は $W(R)$ が L の大対蹠集合に推移的に働くことを示した.

3.2 合同でない二つの実形の交叉

L_1 と L_2 が合同でないと仮定する. $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ としてよい. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ で (G, F_1, F_2) から構成される $\mathfrak{a}$ の対称三対を表す. $\mathfrak{p}_i$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{a}$ を含むようにとる. $\mathfrak{a}$ の極大性から $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ となる. R_i で (G, F_i) の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を表す. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a \in G$) について考察する. $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) と仮定してよい.

定理 3.2. 交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の正則点になることである. このとき,

$$L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}.$$

これは L_i ($i = 1, 2$) の対蹠集合である.

系 3.3. 交叉 $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2$ が離散的であると仮定する. もし, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ならば, $\tilde{\Sigma} = R_1$ であり $L_1 \cap \text{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J$ が成り立つ.