対称三対の実形の交叉への応用

井川　治　（京都工芸繊維大学）

2014 年 8 月 24 日

第 61 回幾何学シンポジウム

§ **0** 問題

§ **1** 対称三対

§ **2** コンパクト対称三対

§ **3** 二つの実形の交叉 **(**共同研究**:**田中**-**田崎**)**

§ **3.1** 合同な二つの実形の交叉

§ **3.2** 合同でない二つの実形の交叉

§0 問題

M: コンパクト型既約エルミート対称空間

$L = F(\tau, M)$: 実形 (τ:反正則対合的等長変換)

$L_1, L_2 \subset M$: 二つの実形

<u>問題</u> $L_1 \cap L_2$ が離散的になるための条件と，このときの $L_1 \cap L_2$.

<u>答えの一部</u> $L_1 \cap L_2$ は L_i の対蹠集合.

(Chen-Nagano) $S \subset L$: 対蹠集合 $\Leftrightarrow$ 任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$

L の対蹠集合の元の個数の最大値を **2-number** といい, $\#_2 L$ で表す.

大対蹠集合: $\#_2 L$ を与える対蹠集合

コンパクト型既約エルミート対称空間 M

実形 $L = F(\tau) \subset M = G \cdot J \subset \mathfrak{g}$

$I_\tau : G \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ (対合)

$(G, F(I_\tau))$: コンパクト対称対

$L_1, L_2 \subset M \rightsquigarrow (G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$: コンパクト対称三対

$\rightsquigarrow (\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$: 対称三対 $\rightsquigarrow$ 実形の交叉の研究

§1 対称三対

(復習) $\mathfrak{a}$: 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元線形空間

有限部分集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が $\mathfrak{a}$ のルート系

(1) $\mathfrak{a} = \mathrm{span}(\Sigma)$

(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して $s_\alpha \beta := \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha \in \Sigma$

(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$$

既約, ワイル群 $W(R)$ の定義，分類

対称三対

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$: $(\mathfrak{a}, \langle\ ,\ \rangle)$ の**対称三対 (symmetric triad)**

(1) $\tilde{\Sigma}$: $\mathfrak{a}$ の既約ルート系

(2) $\Sigma(\subset \mathfrak{a})$: $\mathrm{span}(\Sigma)$ のルート系

(3) $W \neq \emptyset$:-1 倍不変, $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$

(4) $\Sigma \cap W \neq \emptyset$, $l := \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$,
$\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.

(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle\alpha, \lambda\rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W$$

注意 Σ : $\mathfrak{a}$ のルート系

$H \in \mathfrak{a}$: 正則点 $\Leftrightarrow$

$\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ **for** $\lambda \in \Sigma$ **,** $\langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ **for** $\alpha \in W$

§ 2 コンパクト対称三対

(G, F_1, F_2): **compact** 対称三対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$:極大可換部分空間

以下，$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$, G:単純，θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わないと仮定.

$(G, F_1, F_2) \rightsquigarrow \mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

θ_1 と θ_2 は可換だから

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$

$\epsilon = \pm 1$ に対して
$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1 \theta_2 X = \epsilon X\}$

$$\Sigma := \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}$$

$$W := \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

<u>定理</u> $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の対称三対

§ 3 実形の交叉への応用

コンパクト型既約エルミート対称空間 M

実形 $L = F(\tau) \subset M = G \cdot J \subset \mathfrak{g}$

$I_\tau : G \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ (対合)

$(G, F(I_\tau)) \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ (標準分解)

極大可換 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \rightsquigarrow$ 制限ルート系 $R \subset \mathfrak{a}$

$H \in \mathfrak{a}$： 正則元 $\Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ $(\lambda \in R)$

§3.1　合同な二つの実形の交叉

定理

(M, J) : **compact** 型既約 **Hermite** 対称空間

$M \supset L$: 実形

$L \cap aL$: 離散的 $\Leftrightarrow H$: 正則元　　　$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$

このとき,

$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J =$「$L$ の大対蹠集合」

§ 3.2　合同でない二つの実形の交叉

二つの実形 $L_i = F(\tau_i) \subset M = G \cdot J$

$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ とできる.

compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \mathfrak{g} &= \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 \\ &= (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \end{aligned}$$

極大 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \rightsquigarrow$ 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

$H \in \mathfrak{a}$: $\underline{\text{正則元}} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \Sigma), \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \ (\alpha \in W) \end{cases}$

定理

(M, J) : **compact** 型既約 **Hermite** 対称空間

$M \supset L_1, L_2$: 実形 $(L_1 \neq L_2)$

$L_1 \cap aL_2$: 離散的 $\Leftrightarrow H$: 正則元

$$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$$

このとき,

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

系 交叉 $L_1 \cap aL_2$ $(a = \exp H)$ が離散的であると仮定する.
もし，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ならば，$\tilde{\Sigma} = R_1$ であり，

$$L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J$$

となる．これは L_1 の大対蹠集合である.

系の条件を満たす (M, L_1, L_2)

(1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$．このとき，
$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^n$.

(2) $(Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(3) $(SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$.
このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(4) $(E_7/T \cdot E_6, T \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$.

このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 8$.

(5) $(E_6/T \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$.

このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = 3$.

(6) $(G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$.

このとき，$\#(L_1 \cap aL_2) = \begin{pmatrix} m+q \\ q \end{pmatrix}$.

$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ のとき $\tilde{\Sigma} = R_1, L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$

(7)

$(M, L_1, L_2) = (Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1})$

$(s > 0, r < t)$ について $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$

$\#(L_1 \cap aL_2) = 2r.$

$\tilde{\Sigma} \neq R_1, R_2$ となる場合：

(8) $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ のとき, $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J$, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$

$$\#_2(L_1) = \binom{2m}{m}, \quad \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

$$\tilde{\Sigma} = C_m, \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$